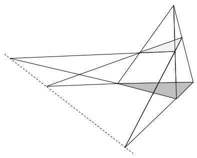
# Chapitre 1

# Introduction

Michel Mizony

Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université Lyon 1



**“ Un problème bien posé est à moitié résolu “**
me disaient souvent mes parents.

Le but essentiel de cet ouvrage est d'éclairer et de donner des pistes pour comprendre les deux objectifs poursuivis par les chercheurs en relativité générale :

Comprendre cette belle théorie de la gravitation.
La confronter aux observations.

De fait notre propos vise essentiellement à jeter des ponts entre ces deux objectifs, en clarifiant les malentendus occasionnés par le délicat passage de l'un à l'autre. Ce passage obligé est la clef de voûte permettant une avancée dans chacun des deux objectifs. Nous tâcherons donc d'être clair à ce propos, quitte à être parfois incisif.

Le leitmotiv sera le suivant : pour résoudre un problème de gravitation dans le cadre géométri-que de la relativité générale, il faut se donner une variété, puis un observateur, puis une jauge ; alors on peut considérer les solutions des équations d'Einstein et les géodésiques, tout en faisant la distinction entre ce qui est covariant (notion infinitésimale) et ce qui est invariant (concept global).

Le calcul tensoriel étant admis, nous ne donnerons qu'un formulaire pour faciliter la lecture, en insistant plus sur les problèmes globaux posés, qui sont source de la plupart des difficultés de mise en oeuvre de la théorie d'Einstein de la gravitation. Est-il nécessaire de rappeler la nature mathématique locale du calcul tensoriel ?

Dès que l'on veut confronter un modèle aux observations, le problème de non unicité de solution des équations d'Einstein apparaît, même avec des conditions de Cauchy. Ceci sera bien étudié pour le problème du champ gravitationnel créé par une boule : il faut une jauge. L'importance de la notion d'observateur est rarement soulignée dans la littérature. Nous verrons l'intérêt de l'observateur inertiel pour l'étude des modèles d'univers isotropes. Nous nous limiterons essentiellement à ces deux études, classiques en relativité générale, estimant qu'il y a encore beaucoup de questions mal posées, en évitant la fuite en avant consistant à étudier des situations pour lesquelles les groupes de symétries sont plus petits.

Des résultats inédits seront donnés au niveau mathématique : Les équations de la relativité générale pour une métrique à symétrie sphérique la plus générale possible sur $\mathbb{R}^4$ se réduisent à une intégrale première et une autre équation (Chap. 4) ; Une preuve simple de l'existence des trois formes de Robertson-Walker de la métrique de De Sitter permet d'établir le plongement isométrique de toute métrique isotrope dans l'espace De Sitter-invariant (Chap. 7) ; dans le cadre de la relativité générale, la relativité restreinte est déjà quantique (Chap. 10).

Des concepts physiques seront bien définis mathématiquement : Le concept de masse ponctuelle est impossible, un effondrement gravitationnel ne peut pas donner naissance à un trou noir (Chap. 4) ; Concept d'observateur de Birkhoff (Chap. 4) ; Définition de quatre concepts de masse pour une boule de matière (Chap. 6) ; Émission d'énergie gravitationnelle par un corps en effondrement sans rotation (Chap. 6) ; Pas de mystère de la constante cosmologique (Chap. 7) ; La relativité générale est et n'est que la géométrisation de la gravitation Newtonienne (Chap. 7) ; Il existe une pression gravitationnelle pure (Chap. 7 et 8) ; Concept de halo d'attraction (Chap. 8) ; Concept d'observateur quantique (Chap. 10). Enfin, l'importance du concept de la jauge harmonique, la nécessité d'une hypothèse de recollement, l'aspect infinitésimal du concept de covariance, le rôle d'un repère inertiel sont mis en évidence pour la compréhension de la gravitation.

Au niveau astronomique de nombreuses retombées : Un test de la jauge harmonique dans le système solaire, i.e. la validité de la troisième loi de Kepler (Chap. 6) ; l'âge de l'univers n'est pas limité par la valeur de la constante de Hubble (Chap. 6) ; un halo massif ne peut pas expliquer la platitude des courbes de vitesses de rotation d'une galaxie (Chap. 8) ; la dynamique d'un amas de galaxies est établie (sans théorème du viriel) : masse et âge en fonction de la vitesse de chute (l'amas de la Vierge pèse environ $5.10^{14}$ masses solaires) (Chap. 8) ; l'âge d'une structure locale en fonction de son rayon d'attraction (Chap. 8).

Vu la nouveauté de beaucoup de ces résultats, de très nombreuses questions se posent. Des problèmes ouverts seront proposés.
Les contre-exemples mathématiques nombreux donnés dans cet ouvrage à des théorèmes, employés trop souvent dans la littérature spécialisée concernant la relativité générale, posent question. Un survol de la littérature s'impose donc ; nous nous limiterons aux auteurs qui ont osé poser des questions, en commençant par S. Weinberg dont l'ouvrage de base, "Gravitation and Cosmology", est à double lecture : la plupart des erreurs que je dénonce (et qui sont reproduites dans son manuel), sont signalées par l'auteur de différentes manières, certes discrètes mais indéniables. Comment comprendre la peur des relativistes

dès que l'on évoque l'excellent ouvrage du physicien russe V. Fock, " The theory of Space, Time and Gravitation". Je n'ai vu aucune erreur mathématique dans cet ouvrage, quelle est la raison pour laquelle un "expert" français ès "trous noirs" m'a dit simplement, lors du congrès de la "société française de physique" (Lyon, septembre 89) : "V. Fock démontre à coups de matérialisme dialectique" ; rideau ! Pourquoi J-P. Petit doit-il avoir recours à un genre littéraire très particulier pour dénoncer un certain nombre d'erreurs dans la mise en oeuvre de la relativité générale, dans son livre "enquêtes sur des extraterrestres" ? N. Stavroulakis, en tant que mathématicien, V. Narlikar et L. S. Abrams, en tant que physiciens, dénoncent l'absurdité de la théorie des trous noirs. Combien d'autres, dénonçant ce scandale, n'ont pu publier leurs travaux. Pour ce qui est d'un regard critique sur les modèles d'univers, le livre de M. Novello, "Cosmos et contexte" est à lire.

N'étant ni épistémologue, ni historien des sciences, ce chapitre ne peut-être vu que comme une ébauche du problème suivant : quel est le rôle du groupe d'experts internationaux qui cautionne, par le statut de personne de référence pour chacun de ses membres, des articles basés sur des théorèmes mal utilisés. L'erreur existe, même en science, pourquoi est-il si difficile à un groupe d'experts de le reconnaître ou tout au moins de permettre son dépassement ?

Questions naïves auxquelles ce livre voudrait donner un début de réponse :
Comment parler de la déviation d'une trajectoire d'un rayon lumineux, sans définir le concept de déviation ? Qu'est-ce qu'une boule en effondrement, si on ne sait pas définir une boule statique ? Comment interpréter le tenseur impusion-énergie autrement que par simple analogie avec le concept thermodynamique de "fluide parfait" ? La notion de boule à symétrie sphérique n'étant pas covariante, quelles sont les hypothèses implicites présupposées par l'usage de ce concept ?
Faut-il quantifier la gravitation einsteinienne ? (réponse non !).
Les théories de Newton et d'Einstein de la gravitation sont-elles équivalentes ? (réponse oui !).

Le travail de fond de tout relativiste est un travail de traduction : la partie "version" étant le passage des principes ou concepts physiques à leur traduction en termes mathématiques, le "thème" étant de cerner la signification physique de théorèmes mathématiques (intervertir les mots "thème" et "version" pour le relativiste physicien). Un aspect important du travail de tout traducteur est la relecture minutieuse pour éviter des faux-amis, non-sens et contresens. Le théorème de Birkhoff est de ce point de vue exemplaire : côté version la notion de distance radiale est traduite par le faux-ami rayon de courbure qui mathématiquement a la signification d'un périmètre et non pas d'un rayon ; côté thème le théorème de Birkhoff est employé globalement, alors que mathématiquement c'est un théorème local. Aussi, pour accomplir du mieux possible ce travail de traducteur, nous reprendrons l'habitude, pas assez répandue, de mettre en évidence les hypothèses physiques et leur traduction mathématique (c.f. J.-M. Souriau), et parfois les hypothèses simplificatrices mathématiques (et souvent leur absence de sens physique). Quelques questions sans réponse : Pourquoi les mathématiciens ont donné le nom de "rayon" de courbure a un objet qui a une signification évidente de périmètre ? Pourquoi les physiciens utilisent-ils

**une théorie physique**

| **Partie** mathématique | | **Partie** physique |
|---|---|---|
| **axiomes** mathématiques | $\longleftarrow - - - - - -$ version | **principes** physiques |
| $\downarrow$ | | $\downarrow$ |
| preuves | | expérimentations |
| $\downarrow$ | | $\downarrow$ |
| **théorèmes** | thème $- - - - - - \longrightarrow$ | **lois** |

$\longleftarrow$ $- -$ travail du mathématicien $- -$ $\longrightarrow$

$\longleftarrow$ $- - - - -$ travail du physicien $- -$ $\longrightarrow$

trop souvent globalement des théorèmes locaux ?

" Mais pour terminer sur une boutade, il nous faut peut-être prendre garde à une situation paradoxale qui se développe. Si les mathématiques qui apparaissent en Physique mathématique sont souvent difficiles et passionnantes, il arrive trop souvent que la Physique qui y correspondrait est une Physique virtuelle, imaginaire, qui se nourrit d'elle-même et qui n'est plus ce que l'on appelait naguère la Physique théorique. "

A. Lichnérowicz, ( lors du colloque "Méthodes géométriques et topologiques en Physique théorique" Lyon, Juin 1993).