Chapitre 2
Formulaire tensoriel

Michel Mizony

Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université lyon 1

Dans la mesure où l'expression concrète des équations d'Einstein, de la métrique solution cherchée pour résoudre un problème de gravitation, de la connexion associée, est exprimée dans un système de coordonnées locales (i.e. une carte), il est important de resituer le calcul tensoriel, qui est de nature locale, dans son cadre, ce qui permettra de mieux saisir le domaine de validité de ce calcul.

Pour ce formulaire, nous reprendrons les formules standards, telles qu'elles sont données par exemple par S. Weinberg [1], et nous renvoyons, pour les définitions et propriétés des formules, au livre de B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko [2], dans la mesure où il permet de saisir aussi bien l'exigence de sérieux théorique du mathématicien, que la nécessaire fonctionnalité exigée par le physicien.

1- **Éléments de calcul tensoriel**.

Métrique.

Notons x^μ les coordonnées de $\mathbb{R}^4$; pour g métrique sur la variété V, pour (U, ψ) une carte locale, i.e. un paramétrage (local) de la variété : $M \in U \subset V \to \psi(M) = (x^i) \in \mathbb{R}^4$, notons $g^{\mu\nu}$ les coefficients de la forme quadratique de signature (1,3), vue comme deux-forme sur l'espace tangent muni de la base canonique des champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Tenseur.

Nous noterons T^μ un tenseur contravariant, T_μ un tenseur covariant, et plus généralement $T^{\mu_i}_{\nu_j}$, $i = 1, ..., p$ et $j = 1, ..., q$, un tenseur p fois contravariant et q fois covariant.
Dans un changement de variables $x^\mu \to x'^\mu$ (i.e. un changement de cartes), on a les formules de passage : $T'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} T^\nu$ pour un tenseur contravariant, et $T'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} T_\nu$ pour un tenseur covariant.
Une métrique $g_{\mu\nu}$, exprimée dans une carte (U, ψ), est un deux-tenseur covariant et symétrique (i.e. $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$).

Nous adoptons les conventions d'Einstein sur les indices (ce qui signifie que chaque fois qu'il y a un même indice en haut et en bas dans une formule tensorielle, il y a sommation sur cet indice, par exemple la formule $T'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} T^{\nu}$ doit se lire comme $T'^{\mu} = \sum_{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} T^{\nu}$.

Connexion.
La connexion affine associée à une métrique g est définie dans une carte par :
$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}})$; ce n'est pas un tenseur.

Dérivation covariante.
Soit V^{μ} un tenseur contravariant, la dérivation covariante de ce tenseur est le tenseur $\nabla_{\lambda} V^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa} V^{\kappa}$.
Plus généralement pour un tenseur T, p fois contravariant et q fois covariant, on ajoute à la déridée partielle de T par rapport à λ, le terme $\Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa} T$ pour chaque indice contravariant μ (en substituant l'indice κ à l'indice μ dans T) et on retranche $\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} T$ pour chaque indice covariant ν (en substituant l'indice κ à l'indice ν dans T). Par exemple :
$\nabla_{\lambda} T^{\mu\rho}_{\nu} = \frac{\partial T^{\mu\rho}_{\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa} T^{\kappa\rho}_{\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\kappa} T^{\mu\kappa}_{\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} T^{\mu\rho}_{\kappa}$.

Equations des géodésiques.
Soit $p \to x^{\mu}(p)$ une trajectoire (supposée de classe $\mathcal{C}^2$) ; cette trajectoire est une géodésique pour la métrique g, si elle vérifie le système d'équations :
$\frac{d^2 x^{\mu}}{dp^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^{\nu}}{dp} \frac{dx^{\lambda}}{dp} = 0$; une intégrale première de ces équations est donnée au moyen de la métrique : $\epsilon = g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dp} \frac{dx^{\nu}}{dp}$.

Le Lagrangien géodésique.
On peut également établir les équations des géodésiques, sans calculer la connexion Γ en écrivant les équations de Lagrange associées à ce qui est appelé le Lagrangien géodésique. Posons $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dp} \frac{dx^{\nu}}{dp}$; les équations des géodésiques s'écrivent alors : $\frac{d}{dp} (\frac{\partial L}{\partial (dx^{\mu}/dp)}) = \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}}$.

D'Alembertien.
Soit $\Gamma^{\lambda} = g_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{|\, g \,|} g^{\lambda\mu})$, alors le d'Alembertien s'écrit :
$\Delta^2 = g^{\lambda\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} - \Gamma^{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}$.

Tenseur de courbure de Riemann.
Le tenseur de courbure, appelé tenseur de Riemann, est un 4-tenseur défini par :
$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}$; par contraction on définit le

Tenseur de Ricci :
$R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa}$ et la courbure scalaire : $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.
Les identités de Bianchi (propriété de symétrie du tenseur de courbure) donnent, par contraction, les "lois de conservation" :
$\nabla_{\mu} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) = 0$.

Les isomorphismes musicaux dans une carte locale.
Soit une carte (U, ψ), si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ est un champ de vecteurs (i.e. un élément de l'espace

tangent à la variété), alors l'isomorphisme musical bémol, entre l'espace tangent et l'espace cotangent des formes, associe au champ X la forme $X^\flat = g_{ij}X^i dx^j$; l'isomorphisme réciproque dièse associe à la forme $\Omega = a_i dx^i$ le champ $\Omega^\sharp = g^{ij} a_j \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Crochet de Lie de champs.
Soient $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ deux champs de vecteurs, le crochet de Lie des deux champs X et Y est le champ noté $[X, Y]$ défini par :
$[X, Y] = (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}) \frac{\partial}{\partial x^i}$.

2- **Carte, référentiel, système de coordonnées, observateur**.

Toutes ces notions étant très proches les unes des autres, il est important de bien donner leur définition, afin de pouvoir les utiliser sans ambiguïté, en particulier pour les notions de référentiel et d'observateur.
Le concept premier est celui de carte, dans la mesure où il est déjà défini dès que l'on se donne une variété.
Soit (V, g) une variété de classe $\mathcal{C}^1$, munie d'une métrique lorentzienne g.

Carte.
C'est la donnée d'un couple (U, ψ) où U est un ouvert de la variété V et ψ un difféomorphisme de U sur l'ouvert $\psi(U)$ de $\mathbb{R}^4$; nous supposerons toujours que la première coordonnée x^o dans $\mathbb{R}^4$ est une variable temporelle, c'est-à-dire qu'en notant $g_{\mu\nu}$ les composantes de la métrique g dans $\psi(U)$, on a $g_{oo} \geq 0$; une carte "physique" est une carte telle que $g_{oo} > 0$ et telle que la forme quadratique $g_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ soit définie négative sur l'ouvert $\psi(U)$.

Système de coordonnées.
C'est le paramétrage par (x^μ) de l'ouvert $\psi(U)$ d'une carte. Un changement de coordonnées correspond à un changement de carte.

Observateur.
C'est la donnée d'un chemin (une trajectoire) $x^o \to (x^\mu)$ dans une carte ; i.e. c'est la donnée d'un point (x^1, x^2, x^3) fixé dans la partie "espace" d'une carte.
Toute carte définit une famille d'observateurs, famille indexée par les points de la partie "espace" de l'ouvert $\psi(U)$. Un observateur physique est un observateur associé à une carte "physique", ce qui peut se justifier en remarquant que le chemin $x^o \to (x^\mu)$ est du genre temps ($ds^2 > 0$ le long du chemin). Deux cartes différentes peuvent définir un même observateur (par exemple en effectuant un changement de variables sur les coordonnées du type espace). Pour obtenir une formulation plus intrinsèque, il faudrait introduire une relation d'équivalence, cf. I. Segal [3] par exemple. Nous ne le ferons pas pour ne pas alourdir les notations. Par contre, par abus de langage, nous appellerons observateur la donnée d'une carte, i.e. la famille des observateurs associés à une carte.

Référentiel (ou repère).
C'est une carte possédant une propriété particulière ; un référentiel sera donc précisé par

un qualificatif.
Référentiel inertiel en x : c'est une carte pour laquelle il existe un point x de l'ouvert tel que $g_{\mu\nu}(x)$ soit la métrique de Minkowski et telle que la connexion soit nulle en x. En tout point d'une variété lorentzienne il est admis qu'il existe une telle carte, (ce qui est vrai par exemple si la métrique est supposée deux fois différentiable). Un tel repère est plus souvent appelé un repère localement inertiel en x.
Référentiel comobile (ou gaussien normal) : c'est une carte telle que $g_{oo} = 1$ et $g_{oi} = 0$.
Sauf mention explicite du contraire, une carte sera toujours supposée vérifier $g_{oo} > 0$, et $g_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ définie négative, ce qui ne constitue pas une réelle restriction, mais nécessitera quelques précautions.

3- Quelques remarques de nature globale.

Résoudre un problème en relativité générale c'est trouver une métrique solution des équations d'Einstein. Mais une métrique n'existe pas en soi, c'est un objet défini sur une variété (plus précisément c'est une deux-forme). Ainsi avant de chercher une solution, est-il nécessaire de préciser dans quel ensemble on cherche cette solution.
Nous examinons donc à travers cet exemple de la métrique, quels sont les problèmes globaux qui se posent.
La relativité générale a pour but de proposer une théorie covariante (i.e. indépendante de l'observateur, donc d'une carte) de la gravitation ; les lois doivent donc être covariantes, i.e. $T'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} T_\nu$, il faut donc que les changements de cartes soient de classes $\mathcal{C}^1$. **Pour exprimer cette nécessaire covariance il faut donc supposer que la variété V, que l'on se donne, est de classe $\mathcal{C}^1$; tous les changements de cartes seront donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur toute la variété !** Il est nécessaire d'insister sur ce point car des erreurs se glissent facilement si en un seul point un changement de variable n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ (par exemple dans le passage d'un système de coordonnées cartésiennes à un système de coordonnées polaires des précautions devront être prises, à l'origine, pour s'assurer que le changement de cartes est de classe $\mathcal{C}^1$).
Que faut-il supposer sur l'ensemble des métriques définies sur une variété V ? Bien sur qu'elles soient lorentziennes (de signature (1,3)), mais aussi qu'en tout point il existe un système de coordonnées inertielles (c'est la traduction minimum du principe d'équivalence) associé à chaque métrique ; il faut donc que la métrique solution cherchée soit un objet au minimum de classe $\mathcal{C}^0$, puisque la variété est de classe $\mathcal{C}^1$.
Mais pour pouvoir parler des équations des géodésiques, de tenseur de Riemann, de tenseur d'Einstein, il faut que la métrique soit "presque partout" de classe $\mathcal{C}^2$. En particulier, du fait des équations d'Einstein, si la métrique est "presque partout" de classe $\mathcal{C}^2$, alors le tenseur impulsion-énergie est "presque partout" de classe $\mathcal{C}^0$, ce qui semble satisfaisant à priori. Pour ne pas rentrer dans des difficultés liées à la théorie de la mesure, disons que "vrai presque partout" signifiera en pratique vrai sur un ouvert dont le complémentaire est une sous-variété de dimension strictement inférieure. Nous dirons que la métrique est alors $\mathcal{C}^0$,$\mathcal{C}^2$ par morceaux.
En résumé, pour résoudre un problème de relativité générale on supposera toujours :

Hypothèses globales.

a) La donnée d'une variété de classe $\mathcal{C}^1$; (exigence de covariance).

b) La recherche d'une métrique solution de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux et qui soit de classe $\mathcal{C}^0$ (exigence de repère inertiel en tout point).

c) Et en conséquence le tenseur impulsion énergie sera supposé de classe $\mathcal{C}^0$ par morceaux.

d) Il reste le problème de la différentiabilité des géodésiques, qui sont supposées de classe $\mathcal{C}^2$; mais cette différentiabilité ne repose sur aucun principe physique.

Bibliographie.

[1] S. WEINBERG : Gravitation and cosmology ; John Wiley, New-York, (1972).

[2] B. DOUBROVINE, S. NOVIKOV et A. FOMENKO : géométrie contemporaine, méthodes et applications tome 1 ; Editions Mir, Moscou (1982).

[3] I. SEGAL : Mathematical cosmology and extragalactic astronomy ; Academic Press, New-York (1976).