Chapitre 3

Obtention rapide des équations d'Einstein de la relativité générale .

Michel Mizony

* Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université Lyon 1

"C'est le plus beau destin d'une théorie physique, que de montrer elle-même le chemin pour la mise en place d'une théorie qui la contient et au sein de laquelle elle survit comme cas limite"
(Einstein, 1917)

Présentation des équations d'Einstein.

Les équations de la relativité générale sont données, en général, sans démonstration, puisqu'elles veulent traduire un ensemble d'hypothèses à partir desquelles on veut fonder une théorie de la gravitation. Cependant il existe différentes manières de les présenter, nous en rappelons brièvement les principes de base.
La théorie de la gravitation, proposée par A. Einstein en 1915, repose sur les trois principes suivants :

- Le principe de covariance (qui doit se traduire par un ensemble d'équations de forme invariante par changement d'observateur).
- Le principe d'équivalence (entre masse inertielle et masse gravitationelle, comme pour la théorie newtonienne).
- Le principe de la validité de la physique de laboratoire (en l'absence de champ gravitationnel on doit retrouver la relativité restreinte, pour un champ gravitationnel faible on doit retrouver en première approximation la théorie newtonienne, et plus profondément, pour un corps en chute libre, la gravitation est effacée.)

Ce sont des principes heuristiques qui peuvent évidemment être susceptibles de différentes traductions mathématiques ou, si l'on veut, donner naissance à différentes théories de la gravitation. La relativité générale utilise dans sa formulation l'outil mathématique des variétés pseudo-riemanniennes.

Partant de l'idée que tout contenu énergétique modifie les trajectoires des corps dans l'espace-temps de la relativité restreinte, on postule au départ qu'une métrique lorentzienne g, définie sur une variété de dimension 4, doit pouvoir exprimer le champ gravitationnel créé par une répartition d'énergie. Comme le contenu énergétique peut se mettre sous la forme d'un deux-tenseur symétrique et conservatif, appelé tenseur impulsion-énergie, en l'absence de champ gravitationnel comme par exemple dans le cas de l'électromagnétisme ou celui de l'hydrodynamique, s'impose l'idée que l'équation covariante devant traduire le champ gravitationnel doit être une égalité entre un deux-tenseur impulsion-énergie (représentant un contenu énergétique) et un deux-tenseur symétrique et conservatif construit à partir de la métrique g. Or il existe énormément de tenseurs, construit à partir d'une métrique et ayant ces propriétés. Le plus simple faisant intervenir des dérivations au plus d'ordre 2 de la métrique est le tenseur d'Einstein construit à partir des tenseurs de courbure : La forme la plus générale d'un deux-tenseur symétrique $G_{\mu\nu}$, ne comprenant que des dérivées au plus d'ordre 2 de la métrique $g_{\mu\nu}$, est de la forme : $G_{\mu\nu} = AR_{\mu\nu} + BR + Cg_{\mu\nu}$, où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, R la courbure scalaire et A, B et C des constantes. Si l'on veut de plus que $G_{\mu\nu}$ soit à divergence nulle ($\nabla_\mu G_{\mu\nu} = 0$) alors il faut prendre $B = -\frac{A}{2}$.
Ainsi on peut écrire l'équation de champ sous la forme suivante :

$$(1) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \ \kappa T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu},$$

où κ est une constante et où T est censé représenter le tenseur impulsion-énergie (comment ? ceci n'est pas clair).
C'est l'équation tensorielle covariante de la relativité générale , qui peut s'écrire aussi sous la forme équivalente suivante :

$$(2) \quad R_{\mu\nu} = \kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) + \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Faut-il écrire ces équations avec la constante cosmologique Λ ou non ? Si oui la constante cosmologique doit-elle figurer dans le premier ou le deuxième membre ? Ce problème est relié aussi bien à la signification du tenseur impulsion-énergie, qu'à la signification de la métrique. Par ailleurs, les formulations équivalentes (1) et (2) peuvent s'écrire de manière équivariante ou contravariante.

Il reste à préciser la constante κ. En supposant que, lorsque la constante cosmologique est nulle ($\Lambda = 0$), pour les champs faibles, ces équations doivent permettre d'approximer l'équation de Poisson de la gravitation newtonienne, alors $\kappa \approx 8\pi G/c^4$ où G est la constante de Newton et c la vitesse de la lumière. Il est mis le signe $=$ à la place du signe $\approx$ dans la plupart des ouvrages. Pourquoi ?

Dans l'obtention des équations, il n'est pas question explicitement d'un principe physique à la source de cette théorie de la gravitation, le principe d'équivalence, c'est à dire le principe de l'égalité entre la masse gravitationelle et la masse inertielle. Or si nous avons l'équation du champ, il reste à établir les équations du mouvement dans un champ. Pour établir ces équations du mouvement à partir de ce principe et du fait que $T_{\mu\nu}$ soit de la forme $G_{\mu\nu}$ (c'est l'hypothèse sous-jacente à la présentation), il faut essayer de comprendre ce tenseur impulsion-énergie. Auparavant notons que le principe de covariance ne découle pas du principe d'équivalence mais découle simplement de l'exigence d'avoir une théorie indépendante de tout système de coordonnées. Certes, historiquement, Einstein a fait dériver l'exigence de covariance du principe d'équivalence (avec l'expérience mentale de l'ascenseur en chute libre). Mais la dérivation du principe de covariance de celui d'équivalence pose des problèmes. Autant donc accepter a priori ces deux principes indépendemment l'un de l'autre.

Notons que pour la présentation des équations du champ, nous avons supposé que le tenseur impulsion-énergie avait une forme et une interprétation "classique" en l'absence de champ gravitationnel, i.e. dans un repère localement inertiel. Ainsi nous avons supposé qu'en tout point M d'espace-temps, la métrique admet un repère localement inertiel, ce qui signifie que $g(M)$ est la métrique de la relativité restreinte et que la connexion associée à g est nulle en M (notons au passage que le concept de repère localement inertiel n'est pas un concept local, mais un concept infinitésimal !). Plaçons nous dans un tel repère localement inertiel, alors l'égalité entre champ gravitationnel et champ d'accélération (une manière de traduire le principe d'équivalence) nous donne l'équation des géodésiques. Par exigence de covariance, le principe d'équivalence se traduit donc par l'axiome des géodésiques : les "corps d'épreuves" en chute libre suivent les géodésiques de la métrique.

Nous renvoyons à V. Fock [1] par. 61 et 62 pour une réflexion plus approfondie sur les principes, ainsi qu'à S. Weinberg [2] par 4.1.

Il est souvent question de nuances concernant le principe d'équivalence ; par exemple le principe minimum très faible qui se traduit en particulier par un qualificatif sur le corps d'épreuve, qui sera un point cinématique est évidemment invérifiable expérimentalement ; le principe dit faible qui lui est testable se traduit par le fait que la trajectoire d'un corps d'épreuve massif ne dépend pas de sa composition chimique et de sa structure interne (expérience d'Eötvös), etc. cf. C. Will [3] qui fait bien le point sur ces concepts. Concernant les problèmes très importants liés à cette notion de corps d'épreuves voir N. Stavroulakis [4]. Pour une étude historique détaillée sur les fondements de la relativité générale se reporter à J. Norton [8].

Avant de se lancer dans d'autres justifications des équations d'Einstein, nous pouvons les prendre comme hypothèse de départ, avec la certitude que c'est la théorie la plus simple traduisant les axiomes suivants :

i) La gravitation se traduit par une métrique lorentzienne sur une variété de dimension 4 et les trajectoires des corps d'épreuves sont des géodésiques associées à cette métrique.

ii) Elle est covariante.

iii) Des constantes sont universelles (i.e. ne dépendent pas du point de la variété choisie) ;

en particulier la vitesse de la lumière, la constante de Newton, la constante cosmologique, la constante de Planck.

iv) La variété espace-temps est de classe $\mathcal{C}^1$ (pour traduire la covariance sous la forme la plus simple, tous les repères sont équivalents) et en chaque point il existe un repère localement inertiel ce qui traduit en partie le principe d'équivalence (et pour pouvoir interpréter localement le tenseur impulsion-énergie).

Obtention "naturelle" des équations d'Einstein.

En utilisant le principe d'Einstein, phrase en exergue, qui stipule le dépassement de toute théorie par une plus générale qui contient la première comme cas particulier, voici comment on peut obtenir les équations de la relativité générale en partant de la relativité restreinte et de la théorie de Newton. Pour cela nous utilisons essentiellement des remarques judicieuses faites par V. Fock [1].

a) Point de départ : *écriture covariante de la métrique de la relativité restreinte*;

C'est une exigence logique, en effet toute théorie peut s'écrire de manière covariante, i.e. de manière indépendante du repère pris sur l'espace-temps.

La métrique de Minkowski (M) $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

s'écrit de manière covariante sous la forme

$(*)$ $ds^2 = \Sigma_{i,j=0}^{3} g_{ij} dx_i \, dx_j$

b) Deuxième principe : $m_i = m_g$;

Le principe de Newton stipulant l'égalité entre la masse inertielle et la masse gravitationelle ($m_I = m_g$) peut maintenant être utilisé : Ce principe stipule d'une part que tous les corps tombent à la même vitesse et que la gravitation est effacée dans le repère d'un corps en chute libre. Cela se traduit donc par le fait qu'en chaque point, il existe un repère localement inertiel (la connexion s'annule en ce point et en ce point la métrique est celle de Minkowski). C'est une définition d'une variété pseudo-riemannienne. Ainsi l'égalité $m_I = m_g$ conduit à l'introduction naturelle de variétés munies d'une métrique (*) et donc le principe de Newton (et la covariance) justifie l'utilisation des variétés pseudo-riemanniennes. A ce propos signalons que le principe d'équivalence plus fort utilisé heuristiquement par A. Einstein pour établir sa théorie de la relativité générale qui dit qu'il y a équivalence locale entre champ d'accélération et champ gravitationel (on peut effacer localement la gravitation avec la célèbre image de l'ascenseur en chute libre) est faux en toute rigueur car c'est un principe local et non ponctuel (ou non infinitésimal).

Insistons sur le fait que cette hypothèse $m_i = m_g$, se traduit mathématiquement par :*en tout point il existe un système de coordonnées localement inertiel*, c'est-à-dire en tout point on peut effacer la gravitation.

Nous reviendrons sur ce point important, et nous le préciserons à propos du concept d'observateur qui pourra être défini naturellement à partir de $m_i = m_g$.

c) Ecriture covariante de la théorie de Newton :

Par exigence logique (covariance) et par la forme infinitésimale du principe d'équivalence, on a donc une métrique pseudo-riemannienne (*) qui dépend de 10 fonctions inconnues

$g_{\mu\nu}$. On veut généraliser la théorie de Newton (en la rendant covariante) qui s'exprime à l'aide de plusieurs équations.

Partons de l'équation de Poisson :

$$(P) \quad \Delta\, U \;=\; -4\pi G\rho$$

où Δ est le laplacien, U le potentiel newtonien, G la constante de Newton et ρ la densité de matière. Essayons de l'écrire de manière covariante. D'un côté le laplacien, de l'autre un contenu énergétique ; On connaît depuis longtemps une expression covariante de la densité d'énergie ρ, c'est le tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$, qui est de plus conservatif ; si l'on veut la forme la plus générale qui soit Lorentz-invariante alors le deuxième membre de l'équation de Poisson est $\kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$. Par ailleurs la forme covariante et conservative du laplacien est $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$;

Ainsi la forme covariante de l'équation de Poisson est l'équation d'Einstein de la relativité générale :

$$(E) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \;=\; \kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \;.$$

Quand à l'équation du mouvement en théorie newtonienne, son écriture covariante n'est autre que l'équation des géodésiques associée à la métrique (*).

En résumé, nous avons obtenu la relativité générale comme une écriture covariante et relativiste (la vitesse de la lumière est finie) de la théorie de Newton. Plusieurs problèmes se posent : la relativité générale est-elle complète ? la relativité générale est-elle équivalente à la théorie de Newton en prenant en compte la finitude de la vitesse de la lumière (théorie post-newtonienne) ? La géométrie pseudo-riemannienne doit-elle être considérée comme un outil ou comme conceptuellement indispensable ? (en d'autres termes, l'espace-temps est-il courbe ?)

Nous prendrons un autre principe, comme guide, celui que je nommerai principe de complémentarité : Les équations d'Einstein ne pouvant pas, en elles-mêmes, donner une réponse unique à un problème précis posé, nous les compléteront par des équations compatibles avec les autres forces fondamentales reconnues aujourd'hui, en particulier la force électromagnétique (à longue portée) et les interactions faibles et fortes (forces à courtes portées traitées par une théorie, se réduisant à un ensemble de recettes qui fonctionnent très bien, baptisée mécanique quantique).

Autrement dit, sera considéré comme suspect tout recours a priori à la thermodynamique (concept de fluide parfait), ou tout recours à la mécanique classique (nous éviterons de parler de formulation Lagrangienne, de principe de moindre action, etc.). Ce qui ne veut pas dire, bien sûr, ignorer ces théories, mais les utiliser à bon escient c'est-à-dire localement, i.e. dans un repère inertiel, en particulier pour retrouver des choses bien connues pour les champs faibles, ou définir de manière "classique" des notions intrinsèques. Par exemple les géodésiques sont aussi les chemins qui minimisent "l'énergie" : plus précisément pour un chemin $\gamma : t \to \gamma(t)$ de [0,1] dans $\psi(U)$, soit l'intégrale d'action

$S(\gamma) = \int_0^1 g_{\mu\nu}(\gamma(t))\dot{\gamma}^\mu(t)\dot{\gamma}^\nu(t)\, dt$, associé au Lagrangien $\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$, alors les équations d'Euler-Lagrange sont les équations des géodésiques.

2- **La relativité générale , sa richesse ou son ambiguïté**

La relativité générale étant incomplète, elle fournit un cadre géométrique qui, en faisant appel à une jauge ou (et) d'autres théories permet de construire des théories de la gravitation.
Historiquement, il y a eu essentiellement 3 manières pour essayer de la compléter :

a) En faisant appel à la thermodynamique (Le tenseur impulsion-énergie représente un fluide parfait).

b) En ayant recours à la géométrie différentielle, en particulier aux conditions de Cauchy (cf. par exemple le travail de A. Lichnérowicz [5]).

c) Par analogie avec l'électromagnétisme, en utilisant la condition dite de "coordonnées harmoniques" (cf. le travail de V. Fock [1]), ou l'invariance conforme (cf. I. Segal [6]).

Rien d'étonnant donc de trouver des résultats contradictoires dans la littérature ; la relativité générale est en elle-même ambiguë.
En effet les équations de la relativité générale , écrites dans une carte, forment un système de 10 équations aux dérivées partielles à 10 inconnues, chaque fonction inconnue dépendant des 4 variables d'espace-temps (t,x,y,z) de la variété sous-jacente. Si l'on suppose que chaque fonction est un produit de fonctions de chacune des variables, on aurait donc à résoudre un système de 10 équations à 4 x10 = quarante inconnues (et encore à condition de se donner le tenseur impulsion-énergie, sinon c'est un système de 10 équations à 80 inconnues !). Heureusement il y a les 4 identités de Bianchi (qui traduisent une propriété du tenseur d'Einstein) ; Ainsi les équations de la relativité générale se ramèneraient à un système de 6 équations à au moins (40-4X4) = 24 fonctions d'une variable réelle.
Ce calcul simpliste et provocateur de dénombrement d'inconnus, à relativiser comme toute chose, ne permet-il pas cependant de comprendre pourquoi dans la littérature on ne trouve essentiellement que deux problèmes étudiés ? Le problème du modèle isotrope de l'univers et celui de la boule sphérique dans le vide, car les nombreuses symétries postulées dans ces problèmes permettent d'obtenir un nombre d'équations presque aussi grand que celui des inconnues ! On peut alors caresser l'espoir d'une unicité de solution.

En effet il y a des conditions aux limites qui permettent de déterminer des constantes d'intégration, mais elles ne suffisent pas. On peut également utiliser le concept mathématique de conditions de Cauchy, qui permet d'obtenir des théorèmes d'unicité de solutions, encore faut-il que le problème de Cauchy soit bien posé, (cf. [9]). Hélas, ou heureusement, même dans ces deux exemples de problèmes à symétrie maximale, on est loin de l'unicité. La relativité générale est un cadre géométrique qu'il faut compléter pour obtenir une théorie de la gravitation. A ce propos rappelons que la variété d'espace-temps doit être de classe $\mathcal{C}^1$ et que la métrique doit être $C^0, \mathcal{C}^2$ par morceaux. Dans la résolution d'un problème il faudra donc faire appel à des hypothèses de recollement.

Un autre exemple de difficultés : La notion d'espace-temps stationnaire, une manière de définir la notion de métrique stationnaire (ou de métrique statique). Si cette notion est très utile du point de vue théorique, elle n'est définie qu'à un difféomorphisme près sur la variété, donc perd beaucoup de sens lorsqu'il faudra confronter une solution aux observations.

Nous faisons le choix de compléter la relativité générale par la jauge harmonique, en allant beaucoup plus loin que la simple analogie avec l'électromagnétisme. C'est un point de vue, certes critiquable, mais qui a l'avantage de fournir des résultats intéressants.
Par exemple cette jauge permet de justifier la position d'Einstein :

" the Schwarzschild singularities do not exist in physical reality." A. Einstein [7].

Une dernière difficulté ; il est souvent dit que relativité et mécanique quantique sont inconciliables voir incompatibles ; et pourtant beaucoup de recherches sont menées en direction d'une grande unification (des quatre interactions fondamentales). Beaucoup cherchent à quantifier la gravitation. Ne peut-on pas chercher au sein de la relativité générale "le chemin pour la mise en place d'une théorie qui la contient", comme dit A. Einstein, qui permette une avancée vers son unification avec la mécanique quantique. Voici une piste qui repose sur deux points faibles de la traduction axiomatique de principes physiques sous-jacents à la théorie de la relativité générale .

Il est implicitement admis l'invariance des équations de la relativité générale par changement de système d'unités ; pourquoi ? Ne peut-on pas prendre une covariance à la place de l'invariance ?

Un corps en chute libre suit une géodésique (de l'espace-temps muni de sa métrique) ; et il est implicitement admis que les géodésiques sont de classe $\mathcal{C}^2$ (ce qui entraîne une unicité des trajectoires). Ce caractère lisse des trajectoires ne repose sur aucun principe physique ; Ne peut-on pas supposer que les trajectoires soient de classe $\mathcal{C}^{1/2}$ (i.e. 1/2-différentiables, fractales comme le mouvement brownien), comme conséquence des inégalités d'Heisenberg ?

" Dans la relativité générale , à chaque fois qu'on fait un pas il faut s'arrêter pour nettoyer ses chaussures." J.M. Souriau.

Bibliographie.

[1] V. FOCK : The theory of space, time and gravitation ; Pergamon Press, London (1964).
[2] S. WEINBERG : Gravitation and cosmology ; John Wiley, New-York (1972).
[3] C. WILL : Theory and experiments in gravitational physics ; Cambridge university press, London (1981).
[4] N. STAVROULAKIS : Sur le principe d'équivalence et le problème de l'énergie ; Ann. Fond. L. de Broglie, Vol.18 n^o 2, pp.221-230, (1993).
[5] A. LICHNEROWICZ : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Masson(1955).

[6] I. SEGAL : Mathematical cosmology and extragalactic astronomy; Academic Press, New-York (1976).
[7] A. EINSTEIN; Annal Math. Vol. 40 pp922-936 (1939).
[8] J. NORTON; General covariance and the foundations of general relativity; Rep. Prog. Phys. Vol 56 pp791-858 (1993).
[9] Y. FOURES-BRUHAT : Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires; Acta Math. Vol 88 pp141-225 (1952).