Chapitre 4

Sur le théorème de Birkhoff

Michel Mizony

* Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028) Université Lyon 1

Introduction :

L'un des problèmes classiques en théorie de la relativité générale est celui du calcul du champ gravitationnel créé par une boule de matière. La connaissance de ce champ permet ensuite de déterminer les trajectoires des rayons lumineux qui correspondent aux géodésiques isotropes. On peut même calculer les trajectoires des corps de masse non nulle mais considérée comme négligeable devant celle de la boule initiale. Ces calculs permettent alors des vérifications expérimentales, ce qui explique que ces corps soient appelés corps d'épreuve. Par exemple, si la boule initiale est le soleil, Mercure est considéré comme un tel corps.

Mathématiquement, le problème consiste à trouver une métrique sur un espace-temps qui soit lorentzienne et vérifie de plus les équations d'Einstein. Une réduction du problème de la boule dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^4$, s'appuyant sur un théorème dû à Birkhoff, conduit à la solution de Schwarzschild. Ces calculs sont considérés comme suffisamment classiques pour ne pas être reproduits dans la plupart des livres de physique théorique où l'on se contente d'affirmer que le théorème de Birkhoff justifie l'introduction directe du modèle de Schwarzschild. Tout se passe comme si le modèle initial constitué par $\mathbb{R}^4$ et les équations de la relativité générale (équations d'Einstein) était en fait remplacé par le modèle de Schwarzschild, cette substitution étant justifiée par l'existence du théorème de Birkhoff.

Plusieurs auteurs (Narlikar [1], Stavroulakis [2], Fock [3]) ont déjà signalé les difficultés mathématiques que présente cette réduction. Ce problème est dans une certaine mesure

celui des mathématiciens car, du point de vue de la physique, la solution de Schwarzschild conduit à des vérifications expérimentales acceptables, tout au moins pour les champs faibles (déviation des rayons lumineux au voisinage du soleil, déplacement du périhélie de Mercure).
Nous nous proposons ici d'exposer exhaustivement les problèmes mathématiques soulevés par le théorème de Birkhoff, de les résoudre, et de proposer une interprétation physique de l'énoncé du théorème.

Enoncé du problème et des principaux résultats :
On considère la variété plate $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ où, comme d'habitude, la première variable t, est identifiée au temps, et les autres, $x = (x_1 ...)$ aux coordonnées d'espace, et on la munit de la métrique de Minkowski. On se propose de rendre compte, dans le cadre de la relativité générale, du champ gravitationnel créé par une boule de matière dans $\mathbb{R}^3$, qui évolue au cours du temps.

Le choix de $\mathbb{R}^4$ comme variété de base correspond au choix d'un univers statique. Si l'on voulait traiter le même problème dans un univers en expansion, ou plus généralement non vide, il faudrait considérer au départ une autre variété.

Concrètement, il s'agit donc de trouver une métrique lorentzienne, c'est-à-dire de signature (1,3), vérifiant de plus les équations d'Einstein, qui seront précisées plus loin.

Le champ créé par la boule ayant évidemment la symétrie sphérique dans $\mathbb{R}^3$, on se restreint d'abord à chercher les métriques lorentziennes invariantes par rotation dans $\mathbb{R}^3$. Ceci amène naturellement à passer en coordonnées polaires c'est-à-dire à faire un changement de carte sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3*}$.

Usuellement, on se limite aux métriques qui sont de plus statiques, c'est-à-dire qui sont telles que le tenseur métrique, dans les coordonnées polaires, est indépendant du temps. Cette deuxième réduction du problème s'appuie sur le théorème de Birkhoff. Ce théorème, qui utilise des changements de carte supplémentaires met en jeu les équations d'Einstein et le fait que l'on travaille sur une boule. Il s'agit en fait d'un théorème local, dont nous rappelons l'énoncé précis, et dont nous donnons ensuite une version globale. Nous utilisons alors ces deux versions :

- La version globale qui fournit d'une part une intégrale première et d'autre part une intégration partielle des équations d'Einstein, permet de trouver de nombreuses solutions non statiques au problème de la boule statique.
- La version locale montre qu'il existe toujours un observateur pour lequel la boule est statique. Elle permet en outre de montrer facilement que, dans le cadre de la relativité générale, la notion de masse ponctuelle n'existe pas, et qu'un trou noir ne peut pas se former par effondrement à partir d'une boule sphérique.

Reste le problème, proprement physique, de déterminer si ces conclusions sont plus ou moins en accord avec l'observation.

Plan

1 Métriques à symétrie sphérique sur $\mathbb{R}^4$.
2 Théorème local de Birkhoff.
3 Versions globales du Théorème de Birkhoff.
4 Conséquences et interprétation.
5 Qu'est-ce qu'une boule statique ?

1 Métriques à symétrie sphérique sur $\mathbb{R}^4$.

La forme la plus générale d'une métrique à symétrie sphérique $g_{\mu\nu}$, définie sur $\mathbb{R}^4$, est la suivante :

$$(1) \quad ds^2 = F^2(r,t)dt^2 + 2E(r,t)dtx.dx - D(r,t)(x.dx)^2 - G(r,t)dx^2$$

où, pour $(t,x) = (t,x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^4$, on note $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,
$x.dx = x_1dx_1 + x_2dx_2 + x_3dx_3$ et $dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, et où $r, x.dx$ et dx^2 sont les trois invariants par rotation.
En utilisant les coordonnées polaires (t,r,θ,ϕ), la métrique s'écrit :

$$(2) ds^2 = F^2(r,t)dt^2 + 2H(r,t)F(r,t)dtdr - (L^2(r,t) - H^2(r,t))dr^2 - C^2(r,t)d\omega^2$$

où $d\omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$.
Pour que cette métrique soit bien définie sur $\mathbb{R}^4$ et soit lorentzienne (de signature (1,3)), il faut et il suffit que les quatre fonctions inconnues F, H, L et C et leurs dérivées partielles par rapport à r (C', C" etc.), vérifient les conditions suivantes (valables pour tout t)(cf. N. Stavroulakis [2]) :

$$(3) \begin{cases} H^2 \leq L^2; \\ F > 0 \; et \; L > 0 \; pour \; tout \; r \geq 0; \\ C > 0 \; pour \; r > 0; \\ C(0,t) = H(0,t) = 0, \; C'(0,t) = L(0,t) \; et \; C"(0,t) = 2L'(0,t). \end{cases}$$

Les conditions du type inégalités traduisent le fait que la métrique est lorentzienne, les dernières conditions assurent le prolongement de la métrique en $r = 0$.

Remarque 1. Soit S_r la sphère euclidienne de rayon r dans $\mathbb{R}^3$; cette surface S_r est une sphère riemannienne pour la partie spatiale de la métrique (2). Le rayon riemannien $\delta(r,t)$ de S_r, à l'instant t, est $\delta(r,t) = \int_0^r L(u,t)du$ et la longueur d'un grand cercle sur la sphère S_r est $2\pi C(r,t)$. Il est habituel en relativité générale de considérer $\rho = C(r,t)$ comme nouvelle coordonnée radiale ; du point de vue mathématique, nous nous imposerons de considérer qu'il s'agit d'un simple changement de variable facilitant les calculs.

Dans la littérature standard sur la relativité générale, le théorème de Birkhoff est utilisé sous la forme de l'énoncé suivant : le champ gravitationnel créé par une boule sphérique est statique ; il est signalé parfois que ce théorème est local. Nous allons donner l'énoncé précis de ce théorème local et les éléments essentiels de la démonstration qui montrent pourquoi ce théorème est local ; puis une version globale qui montre qu'il existe énormément de solutions non statiques, même lorsque la boule sphérique est supposée statique.

Tout d'abord, rappelons l'écriture des équations d'Einstein, dans le cas particulier où $H = 0$.
La métrique solution étant donc supposée de la forme

$$(4) \quad ds^2 = F^2(r,t)dt^2 - L^2(r,t)dr^2 - C^2(r,t)d\omega^2,$$

à l'extérieur de la boule, résoudre le problème physique c'est trouver les fonctions F, L, C définies pour tout t et pour $r \geq r_0(t)$, et vérifiant les équations d'Einstein qui s'écrivent :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a) & 0 = 8\pi G T_0^0 = -\frac{1}{C^2C'}(\frac{C'^2C}{L^2})' + \frac{1}{C^2} + \frac{\dot{C}}{F^2L^2C^2}(L^2C)^{\cdot} \\ b) & 0 = 8\pi G T_1^1 = -\frac{C'}{F^2L^2C^2}(F^2C)' + \frac{1}{C^2} + \frac{1}{C^2\dot{C}}(\frac{\dot{C}^2C}{F^2})^{\cdot} \\ c) & 0 = 8\pi G T_2^2 = \frac{1}{FLC}((\frac{\dot{C}L}{F})^{\cdot} - (\frac{C'F}{L})'\ ) + \frac{1}{FL}((\frac{\dot{L}}{F})^{\cdot} - (\frac{F'}{L})') \\ d) & 0 = 8\pi G T_0^1) = \frac{1}{L^2C}(L^2(\frac{C'}{L^2})^{\cdot} + F^2(\frac{\dot{C}}{F^2})') \end{array} \right.$$

(où $\dot{C}$, $\ddot{C}$, $\dot{L}$ etc. désignent les dérivées partielles par rapport à t).

Théorème local de Birkhoff

Théorème : Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^4$: $U = (t, r, \omega) \in \mathbb{R}^4 \ / \ r > r_0(t)$ (i.e. l'extérieur de la boule). Pour chaque choix d'une fonction $(r,t) \to C(r,t)$ et d'une fonction $(r,t) \to H(r,t)$, continues pour $r \geq r_0(t)$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, pour chaque $(t_1, r_1, \omega_1) \in U$ tel que $C'(r_1, t_1) \neq 0$, il existe une carte V de coordonnées locales $(\tau, \rho, \theta, \psi)$, voisinage dans U du point (t_1, r_1, ω_1), telle que (2) s'écrive sous la forme, dite solution de Schwarzschild :

$$(6) \quad ds^2 = (1 - \frac{b}{\rho})d\tau^2 - (1 - \frac{b}{\rho})^{-1}d\rho^2 - \rho^2 d\omega^2,$$

où b est une constante telle que $C(r,t) \neq b$ sur V.

Preuve : (en suivant la démonstration usuelle, cf. S. Weinberg [4]).
Soient une fonction $H(r,t)$ et une fonction $C(r,t)$, posons $\rho = C(r,t)$, alors $d\rho = C'dr + \dot{C}dt$. Si $C'(r_1, t_1) \neq 0$, introduisons la fonction $B(r,t)$ définie par :

$$(7) \quad B = (F - H\frac{\dot{C}}{C'})^2 - L^2\frac{\dot{C}^2}{C'^2},$$

la forme (2) devient, si $B(r_1, t_1) \neq 0$:

$$ds^2 = Bdt^2 + 2(\frac{FH}{C'} + \frac{(L^2 - H^2)\dot{C}}{C'^2})dtd\rho - \frac{L^2 - H^2}{C'^2}d\rho^2 - \rho^2 d\omega^2$$

ou encore, en posant

$$D = \frac{1}{C'^2}\frac{(FHC' + \dot{C}(L^2 - H^2))^2}{(FC' - H\dot{C})^2 - \dot{C}^2L^2} \ ,$$

$$ds^2 = Bdt^2 + 2\sqrt{BD}dtd\rho + Dd\rho^2 - (\frac{L^2 - H^2}{C'^2} + D)d\rho^2 - \rho^2 d\omega^2 \ ;$$

l'existence d'un facteur intégrant pour la forme $\sqrt{|B|}dt + \sqrt{|D|}dr$ montre qu'il existe alors un voisinage V de (r_1, t_1, w_1), tel que $Bdt^2 + 2\sqrt{BD}dtdr + Ddr^2 = \pm A^2(\rho, \tau)d\tau^2$ ($\pm$ suivant le signe de B) sur ce voisinage. Sur ce voisinage, dans le système de coordonnées locales $(\tau, \rho, \theta, \phi)$, l'intégration des équations d'Einstein est élémentaire et conduit à une métrique formellement statique, ce qui signifie en particulier que le coefficient de $d\rho^2$ est indépendant de τ ; il est plus précisément de la forme $(1 - b/\rho)^{-1}$ où b est une constante d'intégration qui doit être choisie telle que $(1 - b/\rho)$ ne s'annule pas sur V.

Remarque 2 : Du point de vue des quantificateurs, ce théorème a la structure :

$$\forall H(r,t), \forall C(r,t), \forall (t_1, r_1, w_1), \exists V \ et \ \exists b \ tels \ que \ (6).$$

Il n'est pas possible de permuter les quantificateurs sans un minimum de précautions. Or l'interprétation physique de la solution conduit à supposer pour les champs "faibles" l'approximation Newtonienne, ce qui impose la valeur $b = 2M = \frac{2mG}{c^2}$ (où G est la constante de Newton, c la vitesse de la lumière dans un système d'unités préalablement choisi et m la masse supposée constante de la boule sphérique). Le premier problème qui se pose est donc : comment utiliser ce théorème local pour répondre à la question physique posée qui est de nature globale : quel est le champ gravitationnel créé par une boule ?

3 Versions globales du théorème de Birkhoff.

Corollaire 1 : Pour une métrique de la forme (2) on obtient une **intégrale première des équations d'Einstein :**

$$(8) \quad L^2(1 - \frac{2M}{C} + \frac{\dot{C}^2}{F^2}) = (C' - \frac{H\dot{C}}{F})^2 \ .$$

Preuve : Il suffit pour cela d'utiliser le théorème local en revenant aux coordonnées (t, r, ω). On obtient (8) en écrivant que , lorsque $B > 0$, $\frac{L^2 - H^2}{C'^2} + D = (1 - b/\rho)^{-1} = (1 - 2M/C)^{-1}$.

Corollaire 2 : Si $H(r,t) = 0$, une fonction $C(r,t)$ étant donnée, $b = 2M$ étant donné, les équations de la relativité générale s'intègrent partiellement lorsque $\dot{C} \neq 0$ *et* $B > 0$, et les fonctions F et L sont solutions du système :

$$(8) \quad (i) \quad L^2(1 - \frac{2M}{C} + \frac{\dot{C'}^2}{F^2}) = C'^2$$

$$(ii) \quad \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{C}'}{C'} + \frac{\dot{C}F}{C'F}) = 0 \ ,$$

sur chacune des composantes connexes de

$$U \ - \{(t,r,\omega)/C'(r,t) = 0, \ C(r,t) = 2M\}.$$

(Les contraintes (3) ne sont pas prises en compte pour le moment).
Preuve : On obtient (8) (i) à partir de (8), puis on reporte cette égalité dans les équations d'Einstein (5) qui se réduisent toutes à (8) (ii) (simple vérification fastidieuse).

Premier théorème global de Birkhoff : Soit

$$(2) \ \ ds^2 = F^2(r,t)dt^2 + 2H(r,t)F(r,t)dtdr - (L^2(r,t) - H^2(r,t))dr^2 - C^2(r,t)d\omega^2$$

la forme de métrique à symétrie sphérique la plus générale possible; Une fonction $H(r,t)$ étant donnée, une fonction $C(r,t)$ étant donnée, $b = 2M$ étant donné, les équations de la relativité générale s'intègrent partiellement lorsque $\dot{C} \neq 0$, et les fonctions F et L sont solutions du système :

$$(8) \quad L^2(1 - \frac{2M}{C} + \frac{\dot{C}^2}{F^2}) = (C' - \frac{H\dot{C}}{F})^2 \ ;$$

$$(9) \quad (C' - \frac{H\dot{C}}{F})\frac{\dot{L}}{L} - (C' - \frac{H\dot{C}}{F})^{\cdot} + \frac{\dot{C}}{F}(F' - \frac{H\dot{F}}{F}) = 0.$$

Pour la preuve, il suffit de se ramener au résultat précédent, en écrivant la métrique (2) sous la forme : $ds^2 = (Fdt + Hdr)^2 - L^2dr^2 - C^2d\omega^2$, et en disant que localement, il existe une fonction $A(\tau, r)$ telle que $Ad\tau = Fdt + Hdr$. En écrivant que dt est une différentielle exacte on obtient le résultat (sans avoir à calculer la connexion ni le tenseur de courbure!).

Remarques 3 : i) Si $\dot{C} = 0$ *et* $H = 0$, on peut intégrer complètement les équations d'Einstein et la solution générale est

$$ds^2 = \gamma^2(t)(1 - \frac{2M}{C(r)})dt^2 - (1 - \frac{2M}{C(r)})^{-1}C'^2(r)dr^2 - C^2(r)d\omega^2,$$

où γ et C sont des fonctions arbitraires qui ne prennent que des valeurs strictement positives (cf. conditions (3)).

ii) Il est évident, au vu des équations (8) et (9), qu'il existe énormément de solutions non statiques, i.e. telles que $\dot{C} \neq 0$, même dans le cas où la boule est statique, i.e. $r_0(t) = r_0$ est une constante; Par exemple, dans le cas très particulier où $H = 0$ et où les solutions définies sur U sont telles que toutes les orbites circulaires soient stables, l'équation (8) ii) se réduit à l'équation $(\frac{\dot{C}}{C'})^{\cdot} = 0$. Les solutions de cette équation sont de la forme : $C(r,t) = h(at + g(r))$, où h et g sont deux fonctions quelconques de classe $\mathcal{C}^2$ d'une variable et a une constante. Pour que la métrique soit définie à l'extérieur de la boule ($r \geq r_0$) et vérifie l'approximation

Minkowskienne à l'infini il suffit alors de choisir une bijection g de $]r_0,\infty[$ sur $]-\infty,\infty[$, et une bijection h de $]-\infty,\infty[$ sur $]r_0,\infty[$ (où $r_0 > 2M$), telles que g'h' tende vers 1 quand r tend vers l'infini.
Exercice : Soit $G(t)$ une fonction telle que $\gamma(t) = \dot{G}(t)$ soit strictement positive, et soit $C(r,t) = h(G(t)+g(r))$, où h et g vérifient les conditions de la remarque ci-dessus ; vérifier qu'en posant $H = 0,\ FL = \gamma C'\ et\ F^2 = \frac{\gamma^2}{2}(1-\frac{2M}{C}+\sqrt{(1-\frac{2M}{C})^2+4\frac{\dot{C}^2}{\gamma^2}}$, on obtient une famille de solutions pour une boule statique (au sens où $r_0(t) = r_0$ et $r_0(t) = C(r_0(t),t) = r_0$ sont constantes). On exhibe ainsi une famille de solutions dépendant de trois fonctions arbitraires.
Pour avoir une idée de l'importance de l'ensemble des solutions, écrivons les équations (8) et (9) en posant $D = \frac{1}{L}(C' - \frac{H\dot{C}}{F})$, on obtient : pour (8) : $D = \sqrt{1-\frac{2M}{C}+\frac{\dot{C}^2}{F^2}}$ et pour (9) : $L = \frac{\dot{F}C'-\dot{C}F'}{D\dot{F}-\dot{D}F}$;
Ainsi les équations sont intégrées. En effet, si l'on se donne deux fonctions quelconques $C(r,t)$ et $F(r,t)$, on obtient D par la première, L par la seconde puis H par définition de D :

Deuxième théorème global de Birkhoff : Pour une métrique à symétrie sphérique, les équations d'Einstein sont complètement intégrées. Soient deux fonctions quelconques $C(r,t)$ et $F(r,t)$, ces équations se réduisent à :

$$L = \frac{(C'\dot{F}) - F'\dot{C})\sqrt{1-\frac{2M}{C}+\frac{\dot{C}^2}{F^2}}}{(1-\frac{2M}{C}+\frac{\dot{C}^2}{F^2})\dot{F} - \dot{C}(\frac{\ddot{C}}{F} - \dot{C}\frac{\dot{F}}{F^2} + \frac{MF}{C^2})};$$

et

$$H = F\frac{F'(1-\frac{2M}{C}+\frac{\dot{C}^2}{F^2}) - C'(\frac{\ddot{C}}{F} - \dot{C}\frac{\dot{F}}{F^2} + \frac{MF}{C^2})}{(1-\frac{2M}{C}+\frac{\dot{C}^2}{F^2})\dot{F} - \dot{C}(\frac{\ddot{C}}{F} - \dot{C}\frac{\dot{F}}{F^2} + \frac{MF}{C^2})}.$$

Signification du théorème local :
Le théorème local de Birkhoff affirme que, dans le système de coordonnées (τ,ρ,ω), la métrique est indépendante du temps τ, et correspond à un observateur par rapport auquel la boule sphérique est statique.
Le théorème de Birkhoff affirme donc simplement que quelle que soit la boule sphérique (statique, pulsante ou même en effondrement), il existe toujours des observateurs pour lesquels cette boule est statique.
Rappel : Un observateur est la donnée d'un point fixe en coordonnées d'espace dans une carte, c'est à dire une trajectoire. Concrètement l'affirmation physique "il existe un observateur pour qui ..." se traduit mathématiquement par "il existe une carte dans laquelle ...".
Problème : (Mathématique ? physique ? philosophique ? épistémologique ?) Nous venons de parler plusieurs fois et en des sens différents de boule statique et de solution statique. En fait, dans un premier temps nous avons montré que pour toute boule non statique et pour

toute métrique solution il existe toujours un observateur pour lequel la métrique apparaît statique, puis, dans un deuxième temps que toute boule statique ($r_0(t) = r_0$) admet des métriques solutions non statiques dans le cadre de la relativité générale. C'est en fait le sens profond du théorème de Birkhoff. Nous proposerons dans un paragraphe ultérieur différentes définitions de ce que pourrait être la notion de boule statique, dans l'espoir d'avancer vers une solution au problème du champ gravitationnel créé par une boule (ce problème est occulté si on fait une utilisation globale du théorème local de Birkhoff).

4 Conséquences et interprétation. Que signifie B?

La démonstration du théorème local amène à introduire une fonction B (formule (7)) et nous avons vu que la condition $B \neq 0$ était importante pour savoir intégrer au moins partiellement les équations de la relativité générale. Nous allons maintenant interpréter cette condition.

Remarquons d'abord que :

$B(r,t) > 0 \Leftrightarrow C(r,t) > b = 2M$, ce qui se vérifie en reportant (8) dans B, puis que $B(r,t) > 0 \Leftrightarrow (F(r,t) - \frac{\dot{C}(r,t)H(r,t)}{C'(r,t)})^2 > \frac{\dot{C}^2(r,t)L^2(r,t)}{C'^2(r,t)}$ par définition de B.

Donc, si $\dot{C} \neq 0$, $B > 0 \Leftrightarrow (\frac{\dot{C}L}{C'F-H\dot{C}})^2 < 1$.

Notons que l'étude du mouvement des corps en chute libre montre que la condition $C > 2M$ qu'on obtient à la surface de la boule signifie que la vitesse de libération de l'attraction de la boule est inférieure à la vitesse de la lumière.

Considérons maintenant un observateur pour lequel la boule est statique (i.e. un observateur fixe par rapport au système de coordonnées (τ, ρ, ω) : pour lui on a à la surface de la boule $d\rho = 0$, c'est-à-dire $dC = C'dr + \dot{C}dt = 0$. Or, pour un observateur à la surface, la distance riemannienne $d\delta = Ldr$ est parcourue pendant un élément de son temps propre $du = Fdt + Hdr$; on obtient donc $\frac{d\delta}{du} = \frac{Ldr}{Fdt+Hdr} = -\frac{\dot{C}L}{C'F-H\dot{C}}$, ce qui relie la condition $B > 0$ à la vitesse intrinsèque de la surface de la boule. Nous venons donc de démontrer le résultat suivant :

Proposition 2 : à la surface de la boule les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\rho_0(t) = C(r_0(t), t) > 2M$

ii) $B(r_0(t), t) > 0$

iii) $\frac{d\delta}{du}(r_0(t), t) < 1$.

Cette proposition signifie simplement que l'énoncé "la vitesse de tout point à la surface de la boule est inférieure à la vitesse de la lumière" est équivalent au fait que "$C(r,t) > 2M$ à l'extérieur de la boule". En effet, imposons l'existence d'une solution définie partout à l'extérieur de la boule pour $r \geq r_0(t)$, alors $C'(r,t) > 0$; autrement dit, la condition iii) équivaut à

i)bis pour tout $r \geq r_0$, $C(r,t) > 2M$.

Note : Formulation intrinsèque du théorème global (en utilisant les isomorphismes musicaux). Dans une carte locale, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ est un champ de vecteurs (i.e. un élément de l'espace tangent à la variété), alors l'isomorphisme musical bémol, entre l'espace tangent et l'espace cotangent des formes, associe à X la forme $X^\flat = g_{ij}X^i dxj$; l'isomorphisme

réciproque dièse associe à la forme $\Omega = a_i dx^i$ le champ $\Omega^\sharp = g^{ij} a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$.
Ces définitions étant rappelées, écrivons la métrique (2) sous la forme $ds^2 = (Fdt+Hdr)^2 - L^2dr^2 - C^2d\omega^2$, alors il est immédiat de vérifier que les champs $du^\sharp = (Fdt + Hdr)^\sharp = \frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial t}$, que l'on notera " $^-$ ", et $d\delta^\sharp = (Ldr)^\sharp = \frac{1}{L}(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{H}{F}\frac{\partial}{\partial t})$, que l'on notera " $\tilde{}$ " , permettent d'écrire le théorème global (i.e. les équations (8) et (9)) sous la forme condensée suivante :

$$\mathbf{1 - \frac{2M}{C} = \tilde{C}^2 \; - \; \bar{C}^2 \;\; et \;\; \bar{C}\tilde{F} = F\bar{\tilde{C}}} .$$

Conséquences : Le théorème de Birkhoff permet donc de démontrer simplement deux choses :

a) Dans le modèle statique $\mathbb{R}^4$ de la relativité générale, la notion de masse ponctuelle n'existe pas.

En effet, pour toute solution définie à l'extérieur de la boule de "masse" gravitationnelle M, on a $C(r,t) > 2M$ ce qui signifie que cette boule a une surface minorée par $4\pi M^2$, et que la notion de masse ponctuelle n'existe donc pas.

b) Dans le même modèle, un effondrement gravitationnel ne peut jamais conduire à la formation d'un trou noir.

Cette deuxième affirmation repose sur les remarques suivantes :

Le problème est posé initialement sur $\mathbb{R}^4$ muni des coordonnées cartésiennes usuelles (t, x, y, z). Puis, par changement de variables, en passant aux coordonnées polaires usuelles (t, r, θ, ϕ), nous faisons un calcul sur la variété produit de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^{3*}$ (ce qui en, dimension 2 d'espace, signifierait que l'on travaille sur un cylindre et non sur un plan). Pour tout calcul fait dans cette carte, il faut s'assurer que le changement de variable $(t, x, y, z) \to (t, r, \theta, \phi)$ est réversible. Autrement dit, il faut s'assurer que la métrique trouvée sur la carte (t, r, θ, ϕ) de $\mathbb{R}^4$ se prolonge bien à $\mathbb{R}^4$; deux cas sont à envisager suivant qu' elle se prolonge, ou non.

Si oui, alors toute boule sphérique, de "masse" M, a un rayon de courbure strictement supérieur à 2M, autrement dit on ne peut pas obtenir de trou noir car on a vu dans la proposition 2 que l'inégalité $C(r,t) > 2M$ est équivalente au fait que la vitesse de libération à la surface de la boule est inférieure à la vitesse de la lumière. Sinon, on n'a traité le problème que sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3*}$, c'est-à -dire qu'on a travaillé d'emblée sur un modèle d'espace troué, ou encore que la singularité mathématique, ou le "trou noir" physique, a toujours existé.

Dans les deux cas, une masse de matière ne peut donc pas s'effondrer jusqu'à donner naissance à un trou noir.

Ceci est l'argumentation mathématique, elle est suffisante ; mais il y a également un argument physique, bien décrit par exemple par Landau et Lifchitz [5] (p.395), disant que, pour tout observateur extérieur, cet effondrement jusqu'à un "trou noir" prendrait un temps infini ! C'est-à-dire qu'en aucun cas on ne pourrait, même indirectement, observer cet éventuel "trou noir", (sauf bien sûr s'il a toujours existé !). Tout ceci a déjà été signalé par maints auteurs, et encore récemment par J.V. Narlikar [1] ou par L. S. Abrams [6]. Signalons cependant que des objets possédant un "rayon", ou plutôt un périmètre de courbure à leur surface d'une valeur comprise entre 2M et 6M seraient difficiles à distinguer, du point de vue de l'observation, d'éventuels trous noirs, ils sont d'ailleurs parfois appelés quasi trous noirs.

Conclusion : Le théorème de Birkhoff permet, non pas tant de montrer que toute métrique à symétrie sphérique est localement statique, mais d'intégrer partiellement les équations d'Einstein, grâce au fait qu'il existe toujours un observateur pour lequel la boule est statique. Il permet aussi de montrer facilement les deux conséquences décrites ci-dessus, à savoir que la notion de masse ponctuelle n'existe pas et qu'un trou noir ne peut pas se former à partir d'une boule sphérique.
Mais le plus important est le fait que ce théorème permet d'obtenir l'existence et la définition d'une classe d'observateurs, il s'agit des "observateurs pour lesquels la boule est statique" que nous appellerons observateurs de Birkhoff. Pour cela, il suffit de poser :
Définition : i) Une carte de Birkhoff est une carte $(\tau, \rho, \theta, \phi)$ définie par un changement de variables $\rho = \rho(r,t)$ *et* $\tau = \tau(t,r)$ tel que, dans cette carte, la métrique solution extérieure à la boule soit indépendante de la variable temporelle, et plus précisément soit de la forme : $ds^2 = f^2(\rho)dt^2 - l^2(\rho)d\rho^2 - g^2(\rho)d\omega^2$.

ii) Un observateur de Birkhoff est un point fixe pour les coordonnées d'espace (ρ, θ, ϕ) d'une carte de Birkhoff.

iii) Une trajectoire de Birkhoff est la trajectoire d'un observateur de Birkhoff, que l'on peut paramétrer dans n'importe quelle carte, en particulier dans la carte initiale (t, r, θ, ϕ).

Remarques : i) Du fait du principe de covariance, tous les changements de cartes doivent être de classe $\mathcal{C}^1$. Aussi les fonctions ρ et τ doivent l'être également.

ii) Dans la carte (t, r, θ, ϕ) les trajectoires (radiales) $t \to (t, r(t), \theta, \phi)$ des observateurs de Birkhoff sont donnés par les fonctions $t \to r(t) = \rho(r,t)$.

iii) Dans la littérature il est implicitement pris comme définition d'une boule statique celle disant que la carte (t, r, θ, ϕ) est une carte de Birkhoff et que cette carte couvre tout l'extérieur de la boule. Les définitions ci-dessus sont de nature locale (comme le concept de carte). Puis l'utilisation abusive du théorème de Birkhoff se traduit, dans cette même littérature, par la conclusion péremptoire disant que toute boule (non statique) émet un champ statique, en oubliant de se poser la question : pour quel observateur ? i.e. en confondant métrique statique et métrique formellement statique.

iv) Pour des généralisations H. Goenner [7] précise bien la nature locale du théorème de Birkhoff, ainsi que la définition covariante d'une métrique statique (au moyen d'un vecteur de Killing) ; il signale la validité de ce théorème dans l'espace de De Sitter.

5 Qu'est-ce qu'une boule statique ?

Commençons par rappeler le résultat classique suivant, qu'on retrouve d'ailleurs facilement à partir du théorème global :
Proposition 3 : Pour une boule statique de rayon r_o et de masse m, une solution extérieure

statique est la donnée de 4 fonctions F, H, L et C vérifiant, pour $r \geq r_o$, les relations suivantes :

$$(10) \quad \begin{cases} F^2(r) = 1 - \frac{2M}{C(r)} \\ F(r)L(r) = C'(r). \end{cases}$$

Commentaires : Ce résultat est valable si l'on prend pour définition d'une boule statique le fait que son rayon $r_0(t) = r_0$ est constant, et si l'on cherche les solutions dans l'ensemble des métriques formellement statiques ; il signifie qu'une (classe de) solution (s) statique(s) est déterminée par un choix arbitraire de deux fonctions, par exemple par un choix des fonctions H et C. Ainsi il existe une très grande richesse de solutions. Supposons maintenant que l'on cherche les solutions dans l'ensemble de toutes les métriques à symétrie sphérique, statiques ou non, i.e. de la forme (2), alors le théorème global et la remarque 3 nous montrent qu'il existe une variété de solutions encore plus grande.

Qu'est-ce que résoudre un problème en relativité générale ?

Soit V une variété représentant un modèle d'univers. On se propose d'étudier le champ créé par une répartition S finie de masses. Cette étude peut se faire de deux manières différentes :
a) Soit on étudie le champ créé par S, et ceci de la manière la plus intrinsèque possible (certaines difficultés proviennent de la nature de la variété choisie).
b) Soit on étudie deux champs sur V, en l'absence du système de masse S, puis en présence de ce système. On a alors à comparer deux métriques, celle obtenue en l'absence de S que l'on notera $\gamma_{\mu\nu}$, et celle obtenue en sa présence que l'on notera $g_{\mu\nu}$.
Dans les deux cas on résout un problème de relativité générale. Mais ce n'est pas exactement le même. La première approche, plus théorique, permet de trouver une solution, et dans cette approche le problème de la complétude de la relativité générale ne se pose pas et la notion de boule statique n'a aucun sens, puisque tous les observateurs sont équivalents. La deuxième approche est plus pragmatique, et elle est incontournable si l'on veut confronter une solution aux observations (et par exemple comprendre l'expérience du pendule de Foucault). Comment parler d'une métrique asymptotiquement plate ? Comment parler de la déviation d'un rayon lumineux en ne considérant qu'une seule métrique ? Une trajectoire lumineuse ne peut être considérée comme déviée que par rapport à la trajectoire obtenue en l'absence du corps provoquant la "déviation", laquelle est calculée au moyen d'une autre métrique. Et dans cette perspective, la relativité générale est incomplète : il faut une jauge, comme pour l'électromagnétisme. D'autre part on n'échappe pas au problème de la définition de la notion de boule statique, puisque par exemple on ne peut pas parler d'effondrement d'une boule de matière sans une telle définition. Les deux approches sont complémentaires et nécessaires. Dans la littérature, certains auteurs, par exemple V. Fock [3], choisissent explicitement la deuxième approche puisqu'il se donnent au départ un modèle d'univers (c'est-à-dire une variété V munie d'une métrique $\gamma_{\mu\nu}$), chez d'autres les choix sont moins explicites. Illustrons ce propos d'une part en présentant la célèbre expérience du pendule de Foucault et d'autre part en remarquant que la notion de métrique

à symétrie sphérique n'est pas covariante.

Sur le pendule de Foucault

Voici comment l'astrophysicien Trinh Xuan Thuan présente admirablement cette expérience (cf.[8] page 101) :

"Le physicien Français Léon Foucault voulait démontrer que la Terre tournait sur elle-même. En 1851, dans une expérience restée célèbre et qui est maintenant reproduite dans de nombreux musées des sciences du monde, il attacha un pendule à la voûte du panthéon, à Paris. Une fois lancé, le pendule a un comportement remarquable : son plan d'oscillation pivote au fil des heures. Si on le lance dans la direction nord-sud, au bout de quelques heures il oscillera dans la direction est-ouest, et si nous étions aux pôles, le pendule ferait un tour complet en exactement 24 heures. A Paris, à cause d'un effet de latitude, le pendule n'accomplit qu'une fraction de tour en une journée.

Pourquoi le plan du pendule pivote-t-il ? Foucault répondit que ce mouvement n'était qu'apparent : le plan d'oscillation du pendule reste fixe et c'est la Terre qui tourne. Ayant mis en évidence la rotation de la Terre, il s'en contenta. Mais la réponse de Foucault était incomplète, car un mouvement ne peut être décrit que par rapport à un repère fixe : le mouvement absolu n'existe pas. Galilée avait déjà compris que : "Le mouvement est comme rien." Le mouvement n'existe pas en soi, mais relativement à autre chose. La Terre doit "tourner" par rapport à quelque chose qui ne tourne pas. Mais comment trouver ce quelque chose ? Afin de tester l'immobilité d'un point de repère, un astre par exemple, il suffit de lancer le pendule dans sa direction. Si l'astre est immobile, il restera dans le plan d'oscillation du pendule, dont on sait qu'il est fixe. Si l'astre bouge, il dérivera lentement en dehors du plan.

Essayons des objets astronomiques connus, des plus proches aux plus lointains. Si nous orientons le plan de notre pendule vers le Soleil, ce dernier sort perceptiblement du plan d'oscillation après quelques semaines. Les étoiles les plus proches, situées à quelques années-lumière, font de même après quelques années. La galaxie Andromède, située à deux millions d'années-lumière, dérive mois, mais finit par sortir du plan. Le temps passé dans le plan s'allonge et la dérive tend graduellement vers zéro au fur et à mesure que les objets testés sont plus éloignés. Seuls les amas de galaxies les plus lointains, situés à des milliards d'années-lumière, aux confins de l'univers connu, ne dérivent pas par rapport au plan d'oscillation initial du pendule.

- Pourquoi y aurait-il un plan privilégié ?

- Il n'y a pas de plan privilégié. Toutes les directions sont équivalentes. Quelle que soit la direction dans laquelle on a lancé le pendule au début, son plan d'oscillation reste fixe, mais pas par rapport aux objets célestes proches, mais par rapport aux amas de galaxies les plus lointains que l'on puisse détecter dans cette direction. La conclusion à tirer de ces expériences est extraordinaire : le pendule de Foucault ajuste son comportement non pas en fonction de son environnement local, mais en fonction des galaxies les plus éloignées, c'est-à-dire de l'univers tout entier, puisque la quasi-totalité de la masse visible de l'univers se trouve non pas dans les étoiles proches, mais dans ces galaxies lointaines. En d'autres termes, ce qui se trame chez nous se décide dans l'immensité cosmique : ce qui se passe sur notre minuscule planète dépend de la totalité des structures de l'univers.

Pourquoi le pendule de Foucault se comporte-t-il ainsi ? On ne connaît pas la réponse pour l'instant. Le philosophe et physicien autrichien Ernst Mach y voyait une sorte d'omniprésence de la matière et de son influence. Selon lui, la masse d'un objet - la quantité qui mesure son inertie, c'est-à-dire sa résistance au mouvement - est le résultat de l'influence de l'univers tout entier sur cet objet. C'est ce qu'on appelle le principe de Mach. Lorsqu'on peine à pousser une voiture, la résistance qu'elle exerce au mouvement émane de la totalité de l'univers. Mach n'a jamais formulé en détail cette influence universelle mystérieuse, qui est distincte de la gravité, et personne n'a su le faire depuis. ..."

Remarques :

1- Si comme le dit Trinh Xuan Thuan l'expérience de Foucault met en évidence l'aspect qualitatif du principe de Mach, on connaît, depuis V. Fock au moins, l'interprétation dans le cadre de la relativité générale. Cette expérience montre que pour la compréhension d'un phénomène local, il faut se situer dans un modèle global, ici un modèle d'univers isotrope.

2- Il est intéressant de noter que cette expérience est un test sur terre (en laboratoire) d'un aspect de la relativité générale, en l'occurrence celui de travailler avec deux métriques dont celle du modèle global choisi. De fait il existe aussi une autre expérience, faite également par L. Foucault l'année suivante, c'est celle du gyroscope qui permet de s'affranchir de l'effet de la latitude dans l'expérience du pendule.

3- Il y a deux concepts qui posent problème ce sont la covariance et l'invariance ; il ne faut pas les confondre. Dans cette expérience, les conditions aux limites à l'infini sont covariantes par rapport à la métrique associée au modèle d'univers et invariantes par rapport à celle décrivant le système.

4- Autrement dit, il existe une famille privilégiée de repères, c'est celle des repères comobiles du modèle d'univers choisi.

5- Vous êtes vous déjà interrogé sur la formulation des noms des tests de la relativité générale ? Ils ont pour noms : DEVIATION des rayons lumineux, AVANCE du périhélie de Mercure, RETARD de l'écho radar. Et dans l'expérience de Foucault on regarde la déviation du plan du pendule (traduisant la rotation de la Terre), mais plus profondément la FIXITE de ce plan par rapport à la métrique d'univers. Ces formulations soulignent à l'évidence la nécessité de travailler avec deux métriques (celle de l'univers choisi et celle du système étudié). Et ce que l'on mesure (déviation, retard, avance, fixité) est un ECART que l'on attribue souvent à la différence de prédiction entre la théorie de Newton et celle d'Einstein (ce qui est vrai pour l'avance d'un périhélie) ; mais pour les autres (retard, déviation, fixité) ? Cet ECART est en fait la différence entre les prédictions associées à ces deux métriques.

6- Pour achever la compréhension complète de l'expérience du pendule de Foucault, il reste, à ma connaissance, à formaliser l'aspect quantitatif du principe de Mach dans le cadre de la relativité générale, compréhension qui passe par celle de ce qu'est la masse inertielle.

la notion de métrique à symétrie sphérique est-elle covariante ?

La définition "standard" de cette notion est la suivante :

"Définition" : Soit V une variété de dimension 4 ; on dit qu'une métrique sur V est à

symétrie sphérique si elle est invariante par l'action du groupe SO(3).
Cette définition, qui veut traduire l'isotropie de l'espace, présuppose une action du groupe SO(3) sur la variété V. Plus précisément, SO(3) étant un groupe d'isométries, elle suppose un découpage de V en temps-espace et l'existence d'une métrique sur la partie espace telle que SO(3) soit le groupe orthogonal de cette métrique.
C'est pour cela que S. Weinberg définit, au chap. 13, non pas la notion de métrique à symétrie sphérique, mais celle d'espace-temps à symétrie sphérique.

Définitions : i) Un espace-temps (V, γ) est à symétrie sphérique, s'il existe un groupe isomorphe au groupe SO(3) qui agit sur la variété V et telle que la métrique Lorentzienne γ soit invariante par l'action de ce groupe.

ii) Un espace-temps à symétrie sphérique étant donné, une métrique à symétrie sphérique est une métrique g, invariante par l'action de SO(3).

Ainsi, la définition d'une métrique à symétrie sphérique sous-entend la donnée préalable d'un groupe d'isométrie et donc d'une autre métrique. Cette distinction entre espace-temps à symétrie sphérique et métrique à symétrie sphérique relativement à un espace-temps, qui peut paraître oiseuse, est au contraire fondamentale, pour éviter des erreurs dans la mise en oeuvre de la relativité générale. La différence essentielle est la suivante : la notion d'espace-temps à symétrie sphérique est covariante, celle de métrique à symétrie sphérique ne l'est pas ! De même les notions de métrique statique, stationnaire, ne sont pas covariantes (mais celles d'espaces-temps ...).

Remarque 5 : Il est bien connu que pour espérer une unicité de solution en relativité générale il faut se donner une jauge (comme en électromagnétisme où la jauge de Lorentz est utilisée en complément des équations de Maxwell), cf. S. Weinberg [4] chap. 7.4 et 7.5 . Sur $\mathbb{R}^4$, la jauge usuellement utilisée, i.e. celle de "coordonnées harmoniques" conduit à une famille à un paramètre de métriques statiques solutions (cf. Asanov [9], Mizony [10]), dont la plus simple est :

$$ds^2 = \frac{r-M}{r+M}dt^2 - \frac{r+M}{r-M}dr^2 - (r+M)^2 d\omega^2$$

. Ces métriques, dont la métrique de Schwarzschild n'est qu'une approximation, valable seulement pour les champs faibles (i.e. lorsque $M \ll r_0$), doivent être employées pour des champs forts, en particulier pour l'étude des étoiles à neutrons et des quasi trous noirs ($M < r_0 < 5M$). Nous utiliserons ces métriques dans le chapitre 6 pour résoudre le problème du champ émis par un astre.
La résolution des équations d'Einstein pour une boule de rayon $r_0(t) = r_0$ constant conduit à un grand nombre de métriques solutions non statiques pour un observateur fixe dans $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire dans la carte canonique. On pourrait décider de se limiter aux seules solutions statiques, malheureusement au vu du théorème de Birkhoff, il existe toujours un observateur pour lequel la boule parait statique, ce caractère dépend donc de l'observateur.
Ceci soulève le problème, que nous allons aborder maintenant, d'une définition éventuelle du caractère statique.

Pour cela, notons $\gamma_{\mu\nu}$ la métrique de Minkowski écrite dans les coordonnées polaires et $g_{\mu\nu}$ une métrique représentant le champ émis par une boule de masse constante m.
La boule occupe, pour $\gamma_{\mu\nu}$, une sphère de rayon $t \to r_0(t)$ et pour $g_{\mu\nu}$ une sphère de rayon $t \to \delta_0(t)$ et de "rayon" de courbure $t \to \rho_0(t)$, sur un intervalle de temps $I = [t_1, t_2]$.
Pour qu'une solution $g_{\mu\nu}$, définie par un quadruplet
$(C(r,t),\ F(r,t),\ L(r,t),\ H(r,t))$ vérifiant les équations (8) et (9) , soit bien définie à l'extérieur de la boule, nous supposerons que, sur l'intervalle de temps fixé I, $\rho_0(t) = C(r_0(t),t) > 2M$; ce qui implique que l'on a : $\dot\rho_0(t) = \dot C(r_0(t),t) + C'(r_0(t),t)\dot r_0(t)$.

Compte tenu de ce qui précède, voici un certain nombre de propositions non équivalentes, de ce que pourrait être la définition d'une boule statique :
a) $r_0(t) = r_0$ est constant. Cette définition est indépendante de la métrique solution cherchée.
b) $\rho_0(t) = \rho_0$ est constant. Cette définition dépend de la métrique solution extérieure cherchée !
c) $\delta_0(t) = \delta_0$ est constant. Cette définition dépend de la métrique solution intérieure à la boule !
d), e), f) deux des trois fonctions $\delta_0(t),\ r_0(t),\ \rho_0(t)$ sont constantes.
g) les trois fonctions sont constantes.
h) il existe une solution telle que la distance riemannienne de la boule à tout observateur fixe soit constante ; i.e. $\frac{d}{dt}(\delta(r,t) - \delta_0(t)) = 0$ pour $r > r_0$; ce qui se traduit par $\dot r_0(t) = 0$ et $\dot L' = 0$.
i) il existe une solution telle que la vitesse propre de la surface soit nulle ; i.e. $\frac{d\delta}{du} = 0$.
j) il existe une solution telle que le temps de parcours d'un photon, émis radialement à la surface de la boule et reçu par un observateur fixe, soit constant.
k) $\dot r_0(t) = 0$ et il existe une solution telle que les orbites circulaires des corps d'épreuves soient stables. Dans le cas où $H = 0$, on a $FL = C'$, autrement dit
$F^2 = \frac{1-\frac{2M}{C}+\sqrt{(1-\frac{2M}{C})^2+4(\dot C)^2}}{2}$.
l)
.
.
.
z) la carte (t, r, θ, ψ) est une carte de Birkhoff.

Commentaires : Il y a des liens entre ces définitions, mais elles ne sont pas équivalentes et elles posent toutes des problèmes. Ainsi, certaines sont directement liées au choix d'un observateur : par exemple l'observateur fixe par rapport à l'espace de Minkowski sous-jacent, ou l'observateur sur la boule, ou encore celui attaché à un photon émis radialement par la boule. Signalons que pour ce dernier type d'observateur, les équations de la relativité générale s'intègrent et conduisent à des solutions du type solitons pour une boule pulsante, d'après le travail de N. Stavroulakis [11].
L'exemple donné dans la remarque 3 ii) vérifie la définition très forte g) ainsi que la définition k) !

Il ressort de ces définitions, que l'on est loin de pouvoir définir simplement le concept de boule statique dans un univers vide et statique. Signalons cependant qu'en prenant une définition très forte qui consiste à supposer simultanément que les trois fonctions sont constantes (g), que la métrique est statique (z) et que la métrique vérifie la condition de jauge harmonique, l'unicité de solution dépend non seulement de m, δ_0 *et* ρ_0, mais aussi de r_0, c'est-à-dire du rayon riemannien de la sphère occupée par la boule dans l'univers sous-jacent (cf. chapitre 6).
Qu'est-ce une boule statique ? En bref le problème n'est pas résolu, et encore moins celui d'une boule en effondrement gravitationnel.

Conclusion : Peut-t-on vraiment conclure devant l'immensité des problèmes qui restent à résoudre en vue de mettre en oeuvre la relativité générale, sinon en rappelant deux points d'ancrage à partir desquels ont pourra classifier les difficultés soulevées.

1) Quand on veut résoudre un système différentiel, il est important de préciser préalablement dans quel ensemble on cherche les solutions, ce qui implique en particulier de savoir sur **quel espace** sont définies les solutions cherchées.

2) Il est nécessaire de bien spécifier un choix d'observateur en relativité générale ; de ce choix dépendra la pertinence de l'espace dans lequel on va résoudre les équations de la relativité générale. Mais il restera encore à choisir une jauge, qui permettra une confrontation aux observations. En fait, cette remarque n'est qu'une manière de signaler qu'il y a des notions qui ne sont pas covariantes (si l'on oublie le rôle de l'observateur implicitement choisi) : la notion de boule sphérique par exemple n'est pas covariante) ; la notion de trajectoire ou géodésique circulaire non plus ; il en est de même de la notion de boule statique ou non.
Si nous avons illustré la nécessité de se donner un univers muni de sa métrique pour espérer résoudre un problème de relativité générale, encore faut-il se donner un observateur privilégié pour pouvoir définir de manière intrinsèque des concepts non covariants. Ainsi résoudre un problème de relativité générale exige non seulement de se donner une variété lorentzienne (i.e. une métrique (1,3) définie sur une variété de dimension 4) mais encore un observateur privilégié (i.e. un jeu de cartes particulières d'un atlas), avant une quelconque confrontation aux observations.
Alors quel est le champ gravitationnel émis par une boule ? Une question préalable est de savoir comment bien poser le problème. J'espère que le présent chapitre est un pas dans cette direction.

Bibliographie :

[1] J.V. NARLIKAR : The Schwarzschild solution : some conceptual difficulties, Found. Phys. 18 (1988) n° 6 pp.659 - 668.
[2] N. STAVROULAKIS : Mathématique et trous noirs ; Gazette des mathématiciens, n° 31 pp119 -132 (1986).
[3] S. WEINBERG : Gravitation and cosmology ; John Wiley, New-York (1972).
[4] V. FOCK : The theory of space, time and gravitation ; Pergamon Press, London (1959).
[5] LANDAU et LIFCHITZ : Théorie des champs ; Ed. Mir, Moscou (1970).

[6] L. S. ABRAMS : Black holes : the legacy of Hilbert's error ; Can. J. Phys. Vol 67 pp. 919-926 (1989).
[7] H. GOENNER : Einstein tensor and generalization of Birkhoff's theorem ; Comm. in math. phys. Vol 16 n° 1, pp34-47 (1970).
[8] M. RICARD et T.X. THUAN : L'infini dans la paume de la main ; Fayard, Paris, (2000).
[9] R.A. ASANOV : The Schwarzschild metric and the de Donder condition ; G.R.G. Vol. 21 n° 2 p.149 (1989).
[10] M. MIZONY : Autour du théorème de Birkhoff ; preprint Lafp Université Lyon1 n° 4 (1990).
[11] N. STAVROULAKIS : Solitons et propagations d'actions suivant la relativité générale ; Ann. Fond. L. de Broglie, Vol. 13 n° 1, pp.7-42, (1988).