Chapitre 6

Le problème du déchet astral

Michel Mizony

* Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université Lyon 1

Introduction :

Il est communément admis que toute étoile ou astre a une vie, qui après différentes phases (séquence principale, géante rouge, novae ou supernovae , etc...), devient un astre mort, un "déchet" froid ne pouvant plus trouver en son sein un regain de vitalité. Les astronomes et astrophysiciens disent même que tout soleil évoluera vers une situation très stable finale du type naine blanche ou étoile à neutrons ou encore "trou noir" suivant la masse de cette étoile. Nous avons donc des objets limites, qui dans la mesure où ils n'évoluent plus, peuvent être considérés sous le seul point de vue gravitationnel. Ces astres sont morts, sauf gravitationnellement. Quel est alors le champ gravitationnel attaché à un astre mort, dans le cadre de la relativité générale ? Si nous arrivons à bien traiter un tel problème, nous obtiendrons une situation limite pour les étoiles vivantes et donc un point de repère qui permettra de mieux poser le problème du champ émis par une étoile.

Dans la mesure où ces astres morts (ou moribonds) ont des densités très élevées, la correction relativiste à la théorie Newtonienne est de fait importante. Nous allons étudier le problème d'un astre mort, dans un univers vide, considéré du point de vue d'un observateur qui le voit sphérique et statique. Il nous faudra aussi une hypothèse traduisant la mort (thermique) de l'astre : il sera considéré à entropie constante (rien de neuf se produit à l'intérieur de l'astre). Les naines blanches et les étoiles à neutrons seraient de tels objets (cf. S. Weinberg [1] page 301).

Comme un astre ne peut en aucun cas évoluer vers un trou noir, dans le cadre de la relativité générale, il peut être intéressant de voir ce que pourrait être un astre mort quasi-trou-noir ; un deuxième intérêt étant celui de savoir s'il peut exister une masse limite pour les étoiles à neutrons et pourquoi il n'y a aucune raison gravitationnelle permettant de dire qu'une étoile trop massive doit aboutir à une fin aussi cataclysmique que mythique, celle

de "trou noir" promise par nos "experts" et toujours aussi vainement recherchée (dans un signe du cygne ?).
Enfin, dans la mesure où les astres morts sont des objets limites, quelques conséquences pour des astres thermodynamiquement vivants seront données.

1 Sur l'entropie : $kTd\sigma = pd(\frac{\ell}{n}; n) + d(\frac{\rho}{n})$, telle est la formule de l'entropie pour un fluide parfait monoparticulaire de pression p et de densité d'énergie ρ, où dans cette formule, k est la constante de Boltzmann qui permet essentiellement de considérer σ, l'entropie par particule, comme un nombre (sans dimension), T est la température de ce fluide, n la densité de particules et $\frac{\ell}{n}$ est le volume par particule. (cf. S. Weinberg [1] page 50). Cette équation peut s'écrire $kTd\sigma = Vd\rho + (\rho + p)dV$; ainsi, si ρ est constant et l'entropie par particule est constante alors $p = -\rho$.

Définition : On appellera astre mort, ou résidus astral, ou corps gravitationnel pur, un tel objet statique à entropie constante.
Cette définition est provisoire dans la mesure où nous avons supposé que le contenu de l'astre est celui d'un fluide parfait. Nous donnerons une définition à la fois plus générale et plus intrinsèque plus loin ; celle-ci est très suffisante dans un premier temps.
De fait au sein d'un tel astre il y a une pression (négative) opposée à la densité d'énergie ; C'est la pression gravitationnelle pure, qui pour l'étude des étoiles vivantes, devra être prise en compte (en diminution à la pression thermodynamique usuelle).

2 Solutions intérieure et extérieure :
Soit la métrique plate $\gamma_{\mu\nu}$ définie sur l'espace de Minkowski, écrite dans les coordonnées polaires usuelles :

$$(1)\ ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\omega^2$$

où $d\omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$. Et soit la métrique $g_{\mu\nu}$, à symétrie sphérique, dont la forme la plus générale est :

$$(2)\quad ds^2 = F^2(r,t)dt^2 + 2H(r,t)F(r,t)dtdr - (L^2(r,t) - H^2(r,t))dr^2 - C^2(r,t)d\omega^2.$$

Nous supposerons que l'astre mort est situé à l'origine des coordonnées et nous allons chercher les solutions de la forme :

$$(3)\quad ds^2 = F^2(r)dt^2 - L^2(r)dr^2 - C^2(r)d\omega^2.$$

C'est à dire, les solutions ne dépendant pas du temps pour tout observateur fixe de l'univers de Minkowski sous-jacent ; ces observateurs voyant l'astre sous sa forme sphérique.
Les équations d'Einstein dans ce cas se réduisent à :

$$(4)\quad (a)\ \ \rho = -\frac{1}{C^2C'}(\frac{C'^2C}{L^2})' + \frac{1}{C^2}$$

$$(4)\quad (b)\ \ p = -\frac{C'}{F^2L^2C^2}(F^2C)' + \frac{1}{C^2}$$

$$(4) \quad (c) \;\; p = \frac{1}{FLC}(\frac{C'F}{L})' - \frac{1}{FL}(\frac{F'}{L})'$$

Les équations (a), (b) et (c) étant liées entre elles par

$$(4) \quad (d) \;\; \frac{d}{dr}p = -(F'/F)(p-\rho).$$

En fait $\mu = \rho/8\pi G$ est interprété comme la densité d'énergie de l'astre et $-p/8\pi G$ comme la pression de celui-ci.
La jauge de Lorentz (appelée conditions de coordonnées harmoniques) $D_\mu(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}g^{\mu\nu}) = 0$ où D_μ est la dérivation covariante par rapport à la métrique plate $\gamma_{\mu\nu}$ choisie sur l'espace de Minkowski, s'écrit :

$$(4) \quad (e) \;\; \frac{d}{dr}(\frac{C^2F}{L}) = 2rFL;$$

Il est important de signaler que nous avons écrit la jauge (4) (e) de manière volontairement covariante (par rapport au modèle d'univers choisi). En effet dans le problème du champ gravitationnel créé par une boule, il y a des objets covariants (la métrique solution par exemple) et des objets invariants mais non covariants (la forme de la boule par exemple). Écrire une jauge de manière covariante évite des confusions entre ce qui doit être covariant et ce qui n'est qu'invariant.

Soit donc une boule (notre astre thermiquement mort) de masse m, de rayon r_o, de densité $\mu = \mu(r) = 8\pi G\rho(r)$ et de "pression" $p(r)$.
Notons ds_e^2 la métrique solution extérieure (définie pour $r \geq r_o$) et ds_i^2 la solution intérieure (définie pour $r \leq r_o$).
On a :
(5) $ds_e^2 = F_e^2(r)dt^2 - L_e^2(r)dr^2 - C_e^2(r)d\omega^2$, pour $r \geq r_o$ et
(6) $ds_i^2 = F_i^2(r)dt^2 - L_i^2(r)dr^2 - C_i^2(r)d\omega^2$, pour $r \leq r_0$.
Calculons maintenant la forme générale de ces deux métriques, en résolvant les équations (4) (a), (b), (c) et (d), puis les solutions vérifiant la jauge de Lorentz (4) (e) et enfin nous étudierons le recollement sur la sphère $r = r_o$ des solutions intérieure et extérieure.

Proposition 1 : Les solutions intérieure et extérieure sont :
(5)bis $ds_e^2 = (1 - \frac{2M}{C_e(r)})dt^2 - C'^2_e(r)/(1 - \frac{2M}{C_e(r)})dr^2 - C_e^2(r)d\omega^2$, pour $r \geq r_o$ où M est une constante d'intégration et $C_e(r)$ une fonction arbitraire, strictement croissante et telle que $C_e(r)/r$ tend vers 1 quand r tend vers l'infini (pour traduire l'approximation Minkowskienne à l'infini d'espace).
(6)bis $ds_i^2 = k^2(1 - \frac{\rho}{3}C_i^2)dt^2 - C'^2_i(r)/(1 - \frac{\rho}{3}C_i^2)dr^2 - C_i^2(r)d\omega^2$, pour $r \leq r_o$ où k est une constante d'intégration et $C_i(r)$ une fonction arbitraire, strictement croissante et telle que $C_i(0) = 0$.

Le résultat (5) bis est standard, et souvent la constante M est interprétée comme étant égale à la masse mG de la boule ; nous reviendrons sur cette interprétation plus loin.

Le résultat (6) bis est moins connu : il provient du fait que, l'entropie étant nulle à l'intérieur de l'astre froid, on a de manière immédiate, en utilisant (4) (d) :

Lemme : $p = \rho = constante$. (i.e. pression = - densité).
L'intégration des autres équations conduit au résultat (6) bis.
Il reste alors à utiliser la jauge harmonique (4) (e) pour trouver les fonctions périmètres de courbure $C_e(r)$ et $C_i(r)$. Pour cela, utilisons (5) bis et (6) bis pour écrire cette équation de jauge ; on obtient des équations non linéaires, mais en inversant ces équations, c'est à dire en considérant les équations que doivent vérifier les fonctions inverses $C_e \to r(C_e)$ et $C_i \to r(C_i)$ l'équation de jauge s'écrit sous la forme des équations linéaires :
pour la solution extérieure :

$$(7) \quad C_e(C_e - 2M)\frac{d^2r}{dC_e^2} + 2(C_e - M)\frac{dr}{dC_e} - 2r = 0$$

et pour la solution intérieure :

$$(8) \quad C_i^2(1 - \frac{\rho}{3}C_i^2)\frac{d^2r}{dC_i^2} + 2C_i(1 - \frac{2\rho}{3}C_i^2)\frac{dr}{dC_i} - 2r = 0.$$

Remarque : Le fait que les équations (7) et (8) soient linéaires est une conséquence de l'invariance par changement de systèmes d'unités.

Proposition 2 : i) Il existe une solution intérieure (unique à une constante multiplicative près), restriction à $[0, C(r_o)]$ d'une bijection de $[0, \sqrt{\frac{3}{\rho}}[$ sur $[0, +\infty[$ qui n'est autre que :

$$(9) \quad r(C) = \lambda\frac{9}{4\rho C}(\frac{1 + \frac{\rho}{3}C^2}{\sqrt{\frac{\rho}{3}}C} Argth\sqrt{\frac{\rho}{3}}C \; - 1 \;).$$

Cette solution s'écrit sous forme de la série hypergéométrique :

$$r(C) = \lambda C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(n+1)}{(2n+3)(2n+1)}(\frac{\rho}{3}C^2)^n = \lambda C \;{}_2F_1(2, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{\rho}{3}C^2)).$$

ii) Il existe une solution extérieure (unique à une constante près), bijection de $[C(r_o), \; +\infty[$ sur $[r_o, +\infty[$ et telle que $\frac{C(r)}{r}$ tende vers 1 quand r tend vers l'infini :

$$(10) \quad r(C) = C - M - \frac{3A}{2M^2}\; (2 + \frac{(M - C)}{M}Log\frac{C}{C - 2M}) \;.$$

Preuve :
i) La recherche des solutions sous la forme d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n C^n$ nous conduit immédiatement à $r(C) = \lambda\; C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(n+1)}{(2n+3)(2n+1)}(\frac{\rho}{3}C^2)^n$ d'où le résultat annoncé en utilisant le développement en série de la fonction argth ; on peut écrire $\frac{r}{C}$ comme une fonction hypergéométrique de la variable $\frac{\rho}{3}C^2$ (cf. Erdelyi [2] 5.1.(4)), ce qui peut permettre une étude

d'astres à densité constante mais à entropie non constante .
ii) L'équation de Legendre (7) nous donne immédiatement (10), mais il y a des contraintes sur la constante A ; Notons plus précisément C_A la fonction réciproque de la fonction $C \to r(C)$, alors on doit avoir :
$A < A_o = \frac{2M^3}{3}(Log(1 - \frac{2M}{C_{A_o}(r_o)}) + \frac{2M(C_{A_o}(r_o)-M)}{C_{A_o}(r_o)(C_{A_o}(r_o)-2M)})^{-1}$, pour que r soit injective et, pour que r_o soit positif, il faut également que :
$A > A_1 = \frac{2M^3}{3}(Log(1 - \frac{2M}{C_{A_1}(r_o)}) + \frac{2M}{C_{A_1}(r_o)-M})^{-1}$.

La solution, dans un système de coordonnées harmoniques, proposée, par FOCK [3] ou WEINBERG [1] est $C(r) = r + M$, (i.e. $A = 0$). Dans sa démonstration Fock exige que la fonction réciproque r(C) soit bornée lorsque $C \to 2M$, ce qui ne s'impose pas et limite les solutions possibles (cf. Asanov [4]).

Il reste maintenant à déterminer complètement la solution en fonction des données initiales : le rayon r_o et la densité ρ de l'astre. Pour cela il faut une hypothèse de recollement entre les solutions intérieure et extérieure.

3 L'hypothèse de recollement et le problème des masses.

Hypothèse R (comme Recollement) : Au bord de la matière ($r = r_o$), la métrique est au moins continue et le périmètre de courbure $C = C(r)$ est au moins de classe $\mathcal{C}^1$.
Cette hypothèse, qui parait ad hoc, est basée néanmoins sur le fait que les fonctions C' et L sont de même nature géométrique : ces deux fonctions sont les dérivées de longueurs (périmètre et rayon) attachées aux cercles riemanniens concentriques à la boule. D'autre part, du fait de la jauge, on a C de classe $\mathcal{C}^1$ équivalent à F/L de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui signifie que le mouvement radial des ondes électromagnétiques est de classe $\mathcal{C}^2$ (si ces ondes n'interagissent pas avec la matière). Pour avoir un recollement de classe $\mathcal{C}^1$, c'est à dire satisfaisant aux conditions de recollement bien étudiées par A. Lichnérowicz [5], il faut un tenseur impulsion-énergie continu (en particulier $\rho(r_o) = p(r_o) = 0$), ce qui ne semble pas s'imposer a priori.
Il faut donc, d'après cette hypothèse raisonnable, que l'on ait :
$F_e(r_o) = F_i(r_o)$; $L_e(r_o) = L_i(r_o)$; $C_e(r_o) = C_i(r_o)$ et $C'_e(r_o) = C'_i(r_o)$, pour que les deux métriques (5) et (6) suivent l'hypothèse de recollement au bord de la boule.
Ce qui nous donne immédiatement d'après (5) bis et (6) bis :
$k^2 = \frac{1-\frac{2M}{C_e(r_o)}}{1-\frac{\rho}{3}C'^2_i(r_o)} = \frac{C'^2_e(r_o)}{C'^2_i(r_o)} = 1$. D'où on en déduit le premier résultat :

Proposition 3 : La constante d'intégration M de la solution extérieure est égale à :

$$(11) \quad 2M = \frac{\rho}{3}C^3(r_o)$$

Commentaires : Il est usuellement accepté que, pour retrouver l'approximation Newtonienne pour un champ faible, la constante M est identifiée à $M_1 = \frac{\rho}{6}r_o^3$; Or nous venons de montrer qu'avec l'hypothèse de jauge de Lorentz et une hypothèse faible de recollement, tel n'est pas le cas dans cette situation particulière que représente un astre thermodynamiquement mort. Il se pose donc un problème d'interprétation physique. Certes dans la mesure où pour un champ faible $C(r_o) \approx r_o$, cela n'a pas d'importance, car on retrouve l'interprétation usuelle ; mais pour un champ fort ? Nous allons montrer que, en toute généralité, nous retrouvons la même formule (11), mais sous forme intégrale.

Proposition 4 : Le calcul de M : Quelque soit la fonction densité $\rho(r)$ on a :
(12) $2M = \frac{1}{4\pi}\int_{boule} \rho(r)C_i^2(r)C_i'(r)drd\omega = \int_o^{r_o} \rho(r)C_i^2(r)C_i'(r)dr)$.
Preuve : partons de l'équation d'Einstein (4)(a) $\rho(r) = -\frac{1}{C^2C'}(\frac{C'^2C}{L^2})' + \frac{1}{C^2}$; elle peut s'écrire : $\rho(r)C^2C' = C' - (\frac{C'^2C}{L^2})'$; intégrons les deux membres sur le volume de la boule de rayon r_o, on a
$I = \int_o^{r_o} \rho(r)C_i^2(r)C_i'(r)dr = \int_o^{r_o} C_i' - (\frac{C_i'^2C_i}{L_i^2})'dr = C_i - \frac{C_i'^2C_i}{L_i^2}\mid_o^{r_o} = C_i(r_o)(1 - \frac{C_i'^2}{L_i^2}(r_o))$. D'après l'hypothèse de recollement cette intégrale s'exprime à l'aide de la solution extérieure et est égale à
$I = C_e(r_o)(1 - \frac{C_e'^2}{L_e^2}(r_o))$ et comme pour la solution extérieure on a
$\frac{C_e'^2}{L_e^2}(r_o) = 1 - \frac{2M}{C_e(r_o)}$, la preuve est achevée.
Par contre M_1 est défini de la même manière mais avec la mesure euclidienne sous-jacente : $2M_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{boule} \rho(r)r^2drd\omega$. Ainsi M_1 semble désigner la "masse" Newtonienne de matière de l'astre et M sa "masse" Einsteinienne ; la différence entre les deux pouvant s'interpréter comme une énergie "gravitationnelle pure" ou énergie relativiste due au champ associé à l'astre. Encore faut-il que cette énergie soit positive (i.e. $C(r_o) \geq r_o$).

En tout état de cause il est évident que grâce à cette proposition, la compréhension de cette fameuse constante M passe par la compréhension de la jauge adoptée pour compléter la relativité générale et par la compréhension de la nature du recollement des métriques.

Un peu plus sur les masses : Dans la littérature, il est souvent question d'une autre masse M_2, définie par l'intégrale sur la boule de la densité ρ, mais avec la mesure associée à la métrique :
$2M_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{boule} \rho(r)\sqrt{-g(x)}dx$, où g est le déterminant de la métrique. On a donc : $2M_2 = \frac{1}{4\pi}\int_{boule} \rho(r)F(r)L(r)C^2(r)drd\omega$.
Dans le cas de notre astre mort, $M = M_2$, car $FL = C'$ à l'intérieur de la boule. Peut-on comparer ces trois masses M, M_1 *et* M_2 ?
Considérons un astre possédant une énergie thermodynamique, c'est à dire un astre "chaud" ou à entropie croissante. Cela se traduit par $\rho - p \geq 0$ partout à l'intérieur de la boule. Les deux équations d'Einstein (4) (a) et (b) conduisent à $(\rho - p)C^2C' = -(\frac{C'^2C}{L^2})' + \frac{C'^2}{F^2L^2}(F^2C)'$ $= -F^2C(\frac{C'^2}{F^2L^2})'$.
Autrement dit, entropie croissante est équivalent à $(\frac{C'^2}{F^2L^2})'$ négatif. Or avec l'hypothèse R de recollement on a, au bord de la boule, $C'(r_o) = F(r_o)L(r_o)$, donc on a : $FL \leq C'$ à l'intérieur de la boule et par intégration on obtient : $M_2 \leq M$.
En résumé, sous la simple hypothèse de recollement, nous avons montré :

Proposition 5 : Entropie croissante $\Rightarrow$ ($FL \leq C' \Leftrightarrow M_2 \leq M$), l'égalité entre les "masses" n'ayant lieu que pour les astres thermodynamiquement morts.

On peut alors oser une interprétation : l'énergie gravitationnelle d'un astre se transforme en partie en énergie thermodynamique (en augmentant l'entropie) ; ainsi, à masse Newtonienne M_1 égale, les astres morts sont ceux émettant le champ gravitationnel le plus fort ($M_2 = M$).

4 Achèvement du modèle.

Revenons au problème de notre astre mort.
Il nous reste maintenant à calculer les constantes d'intégration A et λ, pour achever la description complète de la métrique. Elles sont solutions du système des deux équations $C_e(r_o) = C_i(r_o)$ et $C'_e(r_o) = C'_i(r_o)$; autrement dit, en notant $C_o = C_e(r_o) = C_i(r_o)$, du système

$$r(C_o) = C_o - M - \frac{3A}{2M^2}(2 + \frac{M-C_o}{M} Log\frac{C_o}{C_o-2M}) =$$

$$r(C_o) = \lambda\frac{9}{4\rho C_o}\ (\frac{1+\frac{\rho}{3}C_o^2}{\sqrt{\frac{\rho}{3}}C_o} Argth\sqrt{\frac{\rho}{3}}C_o\ - 1\ ) ;$$

$$1 + \frac{3A}{2M^3}\ (Log\frac{C_o}{C_o-2M} - 2M\frac{C_o-M}{C_o(C_o-2M)}\ ) =$$

$$\frac{3\lambda}{2\frac{\rho}{3}C_o^2}\ (\ \frac{1}{1-\frac{\rho}{3}C_o^2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{3}}C_o}\ Argth(\sqrt{\frac{\rho}{3}}C_o)\ ).$$

Notons alors $x = \sqrt{\frac{2M}{C_o}} = \sqrt{\frac{\rho}{3}}C_o$; et posons $B = \frac{3A}{2M^3}$, (les variables x, λ *et* B sont sans dimension). Le système se résout simplement et on a :

$$\lambda(x) = \frac{2x^6}{3}\ (\ x^2 - 6 - \frac{Argthx}{x}(x^4 + 3x^2 - 6) - \frac{6-4x^2}{x^2}Log(1-x^2)$$
$$+ \frac{6(1-x^2)}{x^3}Argthx\ Log(1-x^2)\ )^{-1}$$

et $B(x) = \frac{-3\lambda(x)}{x^8}\ (3 - 2x^2 - \frac{3(1-x^2)}{x}\ Argthx\ ).$

Comme les données du problème sont d'une part r_o et d'autre part ρ (plus exactement la densité constante de la matière $\mu = 8\pi G\rho$, le plus simple est d'étudier $\sqrt{\frac{\rho}{3}}r_o$ en fonction de x , car on a d'après (9) :

(12) $h(x) := \sqrt{\frac{\rho}{3}}r_o = \frac{3\lambda(x)}{4}(\ Argthx + \frac{1}{x^2}(\ Argthx - x)).$

Une étude rapide de cette fonction $h(x)$ sur le domaine d'existence de x, le segment $[0, 1[$, montre plusieurs points intéressants :

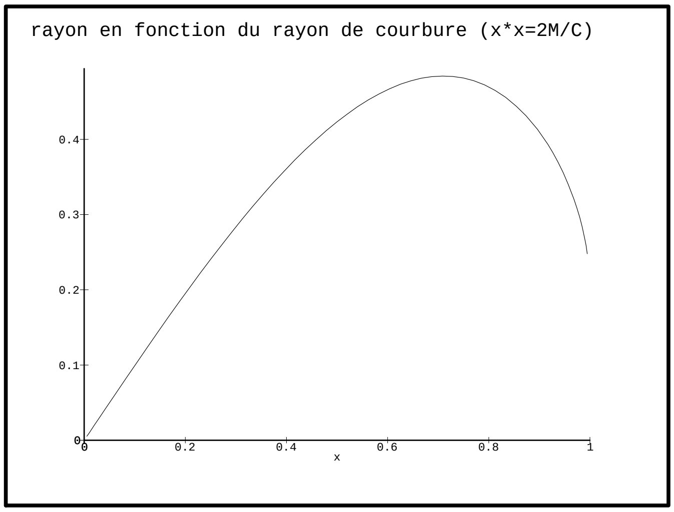

Fig 1 : Tracé sommaire de la fonction $h(x) = \sqrt{\frac{\rho}{3}} r_o$.
i) Pour qu'il existe une solution, la fonction $h(x)$ présentant un maximum de environ $h_m \approx 0,4842$ au point $x_m \approx 0,71018$ environ, il faut que l'on ait :
(13) $\sqrt{\frac{\rho}{3}} r_o \leq 0,4842$.
ii) Lorsque x est petit, ce qui correspond à un champ faible, $\lambda(x) \approx 1$, $B(x) \approx 0$, on retrouve la solution de Fock.
iii) Comme $B(x)$ est toujours négatif, on a $C_o \geq r_o + M$ et lorsque $x \leq x_m$, on a plus précisément $C_o \geq r_o + M \geq 0,934 C_o$.
iv) Pour $h(x) \geq\approx 0,22$, c'est à dire pour $0,228 < x < 1$, il y a deux solutions.
Il se pose alors tout un problème d'interprétation : comprendre les valeurs "critiques" x_m et h_m ; comme, lorsque x tend vers 1, on approche de la solution limite impossible (trou noir) car C_o tend vers $2M$, et comme à densité constante le maximum du rayon est obtenu pour la valeur "critique" x_m, il est très tentant de dire que la plage $x > x_m$ est impossible physiquement. Il reste alors à étayer cette affirmation.
Notons que le paramètre x a l'interprétation suivante : considérons un corps d'épreuve en chute libre, lâché à vitesse nulle très loin de la boule, se dirigeant radialement vers la boule, et considérons la vitesse de ce corps d'épreuve au moment de l'impact sur la boule, vitesse mesurée par l'observateur fixe à la surface de la boule ; un calcul simple montre que cette vitesse v est définie par
$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - F^2(r_o)} = x$.
Supposons qu'un astre mort de densité ρ_o et de rayon r_o au temps t_o, subisse un effondrement le menant à un nouvel état d'astre mort qui au temps t_1 est de densité $\rho_1 > \rho_o$ et de rayon $r_1 < r_o$; supposons de plus que cet effondrement se fait sans perte (ou éjection) de matière, i.e. $6m = \rho_o r_o^3 = \rho_1 r_1^3$. Ceci pourrait idéaliser par exemple, l'effondrement d'une boule de fer devenant une étoile à neutrons.
Comme $h(x_o) = \sqrt{\frac{\rho}{3}} r_o = \sqrt{\frac{2m}{r_o}} < \sqrt{\frac{2m}{r_1}} = h(x_1)$, on a donc : $r_o > r_1$ entraîne $h(x_o) < h(x_1)$,

autrement dit, $|x_m - x_1| < |x_m - x_o|$. Ainsi un effondrement conduit à une configuration plus proche de celle correspondante à la valeur critique x_m. En particulier si x_o était plus grand que x_m, par effondrement gravitationnel on s'éloigne de la configuration limite du "trou noir".

Comparons maintenant les "masses" gravitationnelles $M(t_o)$ et $M(t_1)$; comme $M(t) = m(\frac{x}{h(x)})^3$, et comme $\frac{x}{h(x)}$ est une fonction strictement croissante sur]0,1[, par effondrement gravitationnel le champ devient plus important si $x_o < x_m$, et ... diminue si $x_o > x_m$ ce qui correspond à une évaporation de l'énergie..

Ainsi, si l'on admet qu'un effondrement conduit à un champ plus fort, la plage $x > x_m$ est impossible.
Remarquons enfin que si nous regardons les variations des conditions initiales r_o et C_o , à ρ constant, on a $\frac{dr_o}{dC_o} = \frac{dh}{dx}$ qui s'annule pour $x = x_m$.
Ceci signifie que si un astre mort accumule de la matière de même densité, alors si cet astre est près de la valeur critique, son périmètre (riemannien) croit infiniment plus vite que son rayon.

Étude des rayons critiques pour certains astres "morts" : boule de fer , naine blanche, étoile à neutrons, nuage gazeux froid.
La valeur du paramètre $x \approx 0,71$, nous donne le maximum du rayon et de la masse que peut atteindre une boule de densité ρ fixée.
Notations : soit μ la densité (en g/cm^3), $\rho = 8\pi G/c^2\mu \approx 1,86610^{-27}\mu$ (en cm^{-2}) ; soit $x \approx 0,71$, le rayon critique est $r_m \approx 0,4842\sqrt{\frac{3}{\rho}}$ (en cm) et le périmètre critique est $C_m \approx 0,71\sqrt{\frac{3}{\rho}}$ (en cm). La masse relativiste critique M est égale à $M \approx 0,25C_m$ (en cm).

Matériau	*densité*	*rayon* r_m	*périmètre* C_m	*Masse* M
Boule de fer	$7,8g/cm^3$	$6,9\ 10^7km$	10^8km	$2,5\ 10^7km$
Naine blanche	$10^6g/cm^3$	$1,9\ 10^5km$	$2,8\ 10^5km$	$6,9\ 10^4km$
Etoile à neutrons	$10^{15}g/cm^3$	$6km$	$9km$	$2,2km$
Nuage gazeux	$65\ 10^{-24}g/cm^3$	$0.78Mpc$	$1.14Mpc$	$6\ 10^{18}M_\odot$

Il va de soi que ce sont des chiffres limites, d'après la relativité générale ; il est évidemment possible que d'autres forces et considérations physiques puissent fournir des dimensions limites plus faibles. Cependant il est à signaler que pour une étoile à neutrons, nous trouvons le même ordre de grandeur de masse critique que celui utilisé dans la littérature obtenu à partir de considérations d'équilibre interne (cf. Mavrides [6]).

5 Approximations pour un champ faible :

Un champ faible sera créé par un déchet astral petit, c'est à dire pour lequel le paramètre $x = \sqrt{\frac{2M}{C_o}} = \sqrt{\frac{\rho}{3}}C_o$ est petit devant l'unité. Pour étudier un tel champ faisons les développement limités qui s'imposent en $x = 0$:
$\lambda(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{10} + etc$;

$B(x) = \frac{1}{x^4}\,(-\frac{6}{5} + \frac{24}{35}x^2 + etc)$;
$\frac{h(x)}{x} = \frac{r_o(x)}{C_o(x)} = 1 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{70}x^4 + etc.$ Ces développements permettent alors d'obtenir les approximations suivantes pour un champ faible :
$C_o \approx r_o + \frac{6M}{5} + \frac{6M^2}{35r_o} > r_o + M$, ou, en fonction des données initiales ρ et r_o,
$C_o \approx r_o + \frac{\rho}{5}r_o^3$.
Regardons maintenant le champ extérieur émis par la boule, on a l'approximation suivante pour le périmètre de courbure :
(14) $C(r) \approx r + M + \frac{M}{5}\frac{C_o^2}{r^2}(1 + \frac{3M^2}{5r^2}\ ) + etc$, pour $r \geq r_o$,
pour le coefficient $g_{oo} = F^2$ de la métrique :
(15) $F^2(r) \approx 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}(1 + \frac{C_o^2}{5r^2}) - \frac{2M^3}{r^3}(1 + \frac{2C_o^2}{5r^2}) + etc,$
et pour le coefficient $g_{11} = L^2$ de la métrique :
(16) $L^2(r) \approx 1 + \frac{2M}{r}(1 - \frac{2C_o^2}{5r^2}) + \frac{2M^2}{r^2}(1 + \frac{3C_o^2}{5r^2}) + etc$;
On retrouve l'approximation post-Newtonienne $g_{oo} \approx 1 - \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}$,
$g_{11} \approx 1 + \frac{2M}{r}$, comme pour la métrique de Fock ($C(r) = r + M$). (Cf. S. Weinberg [1] ou C.M. Will [7]). Cependant il est à noter que la solution extérieure dépend de C_o et donc non seulement de la masse gravitationnelle M mais encore du rayon et de la fonction d'état de la matière à l'intérieur de la boule.

6 Effondrement gravitationnel et émission d'énergie gravitationnelle.

Supposons qu'un astre mort de densité ρ_o et de rayon r_o au temps t_o, subisse un effondrement le menant à un nouvel état d'astre mort qui au temps t_1 est de densité $\rho_1 > \rho_o$ et de rayon $r_1 < r_o$; Ceci pourrait idéaliser par exemple, l'effondrement d'une boule de fer devenant une étoile à neutrons.
Nous allons montrer que si il y a éjection de matière pendant cet effondrement, alors il peut y avoir émission d'énergie gravitationnelle pure, ce qui peut s'interpréter comme une émission d'ondes gravitationnelles, bien que la boule soit supposée s'effondrer sans rotation. Ceci va à l'encontre d'une idée trop répandue.
Notations : Soit m_o et m_1 les masses Newtonniennes aux temps respectifs t_o et t_1 ; Soit M_o et M_1 les masses Einsteiniennes aux temps respectifs t_o et t_1 ; Soit C_o et C_1 les périmètres de courbure aux temps respectifs t_o et t_1 ;
Notons encore par α le rapport des densités défini par $\rho_o = \alpha\rho_1$, et par β le rapport des rayons défini par $r_o = \beta r_1$.
Soit encore $x_o = \sqrt{\frac{\rho_o}{3}}C_o$ et $x_1 = \sqrt{\frac{\rho_1}{3}}C_1$ les paramètres d'intensité de champ aux temps respectifs t_o et t_1, et $h(x_o) = \sqrt{\frac{\rho_o}{3}}r_o$, $h(x_1) = \sqrt{\frac{\rho_1}{3}}r_1$ leur image respective par la fonction h.
Avec ces notations on a les équivalences suivantes :
$m_1 \leq m_o \Leftrightarrow \alpha\beta^3 \geq 1$; $x_1 \geq x_o \Leftrightarrow \alpha\beta^2 \leq 1$; $r_1 \leq r_o \Leftrightarrow \beta \geq 1$; $\rho_1 \geq \rho_o \Leftrightarrow \alpha \leq 1$;
Notons encore $\mathcal{M}_o = M_o - m_o$ et $\mathcal{M}_1 = M_1 - m_1$ les énergies gravitationnelles pures; calculons en fonction des données du problème le bilan d'énergie gravitationnelle pure $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_o$.

On obtient, par un calcul facile, l'expression exacte suivante :
$\mathcal{M} = m_o(1 - \frac{1}{\alpha\beta^3} - \frac{x_o^3}{h^3(x_o)} + \sqrt{\alpha}(\frac{h^{-1}(\frac{h(x_o)}{\sqrt{\alpha}\beta)}}{h(x_o)})^3)$.
Il ne reste qu'à étudier le signe de $\mathcal{M}$ pour savoir si il y a perte d'énergie gravitationnelle pure lors de l'effondrement (et donc émission d'ondes gravitationnelles) ou non.
Pour cela examinons deux situations limites :
Premier cas : effondrement sans éjection de matière. Alors $m_o = m_1$, donc $\alpha\beta^3 = 1$ et $\mathcal{M} = m_o(-\frac{x_o^3}{h^3(x_o)} + \sqrt{\alpha}(\frac{h^{-1}(\frac{h(x_o)}{\sqrt{\alpha}\beta)}}{h(x_o)})^3)$, ce qui s'écrit encore :
$\mathcal{M} = \frac{m_o}{h(x_o)^3}(\frac{1}{\beta\sqrt{\beta}}(h^{-1}(\sqrt{\beta}h(x_o))^3 - x_o^3\ )$ qui est du signe de
$(\frac{1}{\sqrt{\beta}}(h^{-1}(\sqrt{\beta})h(x_o)) - x_o\ )$. Or la fonction h vérifie, sur l'intervalle $[0, x_m]$, la propriété $\lambda h(x) \geq h(\lambda x)$; ainsi, lorsque $x_o < x_1 \leq x_m$, $\mathcal{M}$ est positif, il y a augmentation d'énergie gravitationnelle pure.
Deuxième cas : effondrement tel que $x_o = x_1$. Ce phénomène peut se produire par exemple lorsque $x_o = x_m$. On a alors $\alpha\beta^2 = 1$ donc $m_1 = \frac{1}{\beta}m_o$. Il a éjection de matière pendant l'effondrement et $\mathcal{M}$ est égal à :
$\mathcal{M} = m_o(1 - \frac{1}{\beta})(1 - \frac{x_o^3}{h^3(x_o)})$ qui est strictement négatif car $\beta > 1$ et $h(x) < x$. Il y a diminution d'énergie gravitationnelle pure, sans doute émise sous forme d'ondes gravitationnelles.
Le cas général d'un effondrement est situé entre ces deux cas limites ; en particulier pour des champs faibles (i.e. $x_o \leq x_1 \ll 1$), il y a émission d'énergie gravitationnelle ($\mathcal{M}_1 < \mathcal{M}_o$) lorsque $\alpha^2\beta^5 > 1$.
Ainsi la relativité générale prévoit la possibilité d'émission d'énergie gravitationnelle, lors de l'effondrement d'une boule sans rotation.
(Il reste, bien sûr, à comprendre le problème du mécanisme physique de l'effondrement et de l'émission éventuelle d'ondes gravitationnelles).

7 Traitement du problème de l'astre mort en mécanique classique.

Dans la mesure où nous venons de parler d'approximation post-Newtonienne, il peut-être intéressant de reformuler de manière classique (i.e. du point de vue de la mécanique classique) le champ gravitationnel obtenu ; c'est un passage obligé pour la confrontation aux observations.
Il est important de dire que nous allons donner un traitement mathématique, strictement équivalent du point de vue équationnel, à la relativité générale ; cette dernière pouvant être relue comme une géométrisation d'un champ classique.
Pour ce faire, le plus simple est de traduire ce champ dans une formulation Lagrangienne (ou Hamiltonienne pour ceux qui le souhaitent). A une métrique de la forme $ds^2 = F^2(r)dt^2 - L^2(r)dr^2 - C^2(r)d\omega^2$ (où $d\omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$), il est classique d'associer le Lagrangien
(17) $\mathcal{L}^2 = F^2(r) - L^2(r)\dot{r}^2 - C^2(r)(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\dot{\phi}^2)$.
En effet les équations d'Euler-Lagrange nous donnent les trajectoires qui coïncident avec les géodésiques de la métrique (Ce phénomène est très général). Le formalisme post-newtonien consiste essentiellement à développer un tel champ (central) en fonction de $\frac{1}{r}$, ce qui permet une confrontation aux observations pour les champs "faibles" (i.e. $\frac{M}{r} \ll 1$).

Prenons donc, à la place du potentiel Newtonien standard $\frac{-2M}{r}$, le potentiel (18) $\mathcal{U} = \frac{-2M}{C(r)}$, alors en utilisant le Lagrangien $\mathcal{L}$, on a le champ d'accélération créé par la boule (c'est un champ central), défini par :
(19) $\mathcal{G} = -\frac{FF'}{L^2} = \frac{-M}{C^2}(1 - \frac{2M}{C})\frac{1}{C'}$. En utilisant les développements précédents, on obtient les approximations suivantes pour les champs faibles :
(18) bis $\mathcal{U} \simeq -\frac{2M}{r}(1 - \frac{M}{r}(1 + \frac{C_o^2}{5r^2}) + \frac{M^2}{r^2}(1 + \frac{2C_o^2}{5r^2}) + etc)$,
(19) bis $\mathcal{G} \simeq -\frac{M}{r^2}(1 - \frac{4M}{r} + \frac{M^2}{r^2}(9 + \frac{4C_o^2}{5r^2}) + etc)$.
La question qui se pose maintenant est de savoir si, dans le système solaire par exemple ou dans un système double bien étudié, il y a des observations qui puissent asseoir la relativité générale telle qu'elle est traitée ici, c'est à dire avec les hypothèses supplémentaires minimales (la jauge harmonique et l'hypothèse de recollement) qui assurent l'unicité de solution à un problème posé. En effet, dans la mesure où C_o figure explicitement dans ces développements, existe-t-il une observation qui montre l'importance de cette condition aux limites. Dans le cadre du formalisme post-newtonien (cf. S. Weinberg [1] ou C. Will [7]), formalisme qui sert à tester les différentes théories de la gravitation, les observations permettant de calculer les constantes γ et β, c'est leur dénomination dans ce formalisme, ne permettrons pas la mise en évidence de la correction attachée à C_o. En effet la jauge harmonique entraîne ipso-facto le fait que $\gamma = \beta = 1$, cf. [1] chap. 9,4. Par contre, la vitesse d'impact d'une particule d'épreuve tombant radialement sur la boule ou la période de rotation d'un satellite est sensible à C_o ; nous verrons cet aspect un peu plus loin.

8 Autres objets limites .

Réécrivons les équations (4) en ne supposant plus que le fluide est parfait ; c'est à dire oublions une hypothèse thermodynamique simplificatrice ; ces équations d'Einstein s'écrivent :
(4 bis) (a) $\rho = -\frac{1}{C^2C'}(\frac{C'^2C}{L^2})' + \frac{1}{C^2}$
(b) $p_1 = -\frac{C'}{F^2L^2C^2}(F^2C)' + \frac{1}{C^2}$
(c) $p_2 = \frac{1}{FLC}(\frac{C'F}{L})' - \frac{1}{FL}(\frac{F'}{L})'$
(d) $\frac{d}{dr}(\frac{C^2F}{L}) = 2rFL$;
Les équations (a), (b) et (c) étant liées entre elles par
(e) $\frac{d}{dr}p'_1 = -(F'/F)(p_1 - \rho) + 2(C'/C)(p_2 - p_1)$.
La différence essentielle provient du fait que $p_1 \neq p_2$; en effet pourquoi, dans le cadre d'une structure riemannienne, y aurait-il identité entre "pression radiale" et "pression tangentielle" ? Il est vrai qu'au moment de la naissance de la relativité générale au début du siècle, c'était dans le cadre de la thermodynamique qu'un grand nombre de faits pouvait le mieux être appréhendés, et qui disait thermodynamique, disait fluide parfait ; je propose donc de se laisser guider par la R.G. et la brutalité des structures non-euclidiennes qu'elle sous-entend, le passage se fait en fait en douceur. Autant il est nécessaire d'oublier provisoirement la thermodynamique pour laisser se développer la logique de la R.G., autant pour se familiariser avec ses concepts, il ne faudra pas oublier l'interprétation des résultats obtenus dans le cadre de ce domaine bien étudié (et bien établi) qu'est la thermodynamique.

Nous avons donc un système de trois équations à six inconnues $(F, L, C'\rho, p_1$ et $p_2)$ à résoudre. Il faut des hypothèses supplémentaires sur les propriétés internes de la boule de matière.
Remarque : Sous l'hypothèse fluide parfait à pression constante (i.e. $p_1 = p_2 = constante$), le système (4 bis) nous donne $\rho = p_1 = p_2$ ou $F' = 0$. Ceci signifie en particulier que si la "pression" est nulle ($p_1 = p_2 = 0$) alors il n'y a pas de matière ! Il signifie aussi que si $p_1 = p_2 =$ *constante* $\neq \rho$ alors le repère comobile à la matière est synchrone ($F' = 0$) à l'intérieur de la matière. Aussi plutôt que de prendre comme hypothèse supplémentaire une hypothèse thermodynamique (du type "fluide parfait" comme cela est souvent proposé) il est souhaitable de prendre des hypothèses simplificatrices (et donc discutables) qui ne supposent pas, a priori, $p_1 = p_2$ ("pression radiale" = "pression tangentielle"). Nous allons en présenter une première, qui fonctionne dans la mesure où elle permet de trouver des solutions exactes, et qui souligne l'immense variété de solutions possibles dans le cadre de la relativité générale. La deuxième hypothèse qui est une définition intrinsèque d'un astre mort, permettra d'aborder le problème plus général d'un astre chaud.

Première hypothèse : la densité est constante, ainsi que la "pression radiale".
Résolvons d'abord le système (4 bis) en supposant que T^o_o , la "densité" d'énergie est constante.
L'équation (4 bis) (a) s'écrit : $(C'^2C/L^2)' = (1 - \rho C^2)C'$ qui s'intègre en donnant $L^2 = C'^2/(1 - \frac{\rho}{3}C^2)$
L'équation (4 bis) (b) devient $2(1 - \frac{\rho}{3}C^2)\frac{F'}{F} = (\frac{\rho}{3} - p_1(C))CC'$.
Les équations (4 bis) (c) ou (e), qui sont équivalentes par les identités de Bianchi, permettent de calculer la "pression" tangentielle :
$2p_2(C) = 2p_1(C) + \frac{C}{C'}p_1'(C) + \frac{F'C}{FC'}(p_1(C) - \rho)$.
L'équation d'orthogonalité (4 bis) (d) se réduit à une équation en C :
$-C^2(1 - \frac{\rho}{3}C^2)\frac{C''}{C'^2} - \frac{C^3}{6}(3p_1 + 5\rho) + 2C = 2rC'$,
dont l'équation réciproque, obtenue en posant r = f(C), est l'équation linéaire suivante :
(4 bis) (d)' $2C^2(1 - \frac{\rho}{3}C^2)f'' - (\frac{5\rho+3p_1}{3}C^2 - 4)Cf' - 4f = 0$.
Il suffit donc de se donner une fonction $C \to p_1(C)$, de "pression" radiale pour trouver des solutions.

Cas particulier : la "pression" est constante : Alors

$$F^2 = k^2(1 - \frac{\rho}{3}C^2)^{\frac{-\rho+3p_1}{2\rho}},$$

où k est une constante déterminée par l'hypothèse de recollement qui veut que $F(r_o)L(r_o) = C'(r_o)$ et donc on a : $k^2 = (1 - \frac{\rho}{3}C_o^2)^{\frac{3\rho-3p_1}{2\rho}}$.
Par ailleurs, l'équation (d)' se réduit à l'équation hypergéométrique de la variable $z = \rho C^2/3$, pour la fonction
$g(z) = \frac{3}{\rho}zf(\sqrt{\frac{3}{\rho}z})$:
(4 bis) (d)" $4z(1-z)\frac{d^2g}{dz^2} - (\frac{3p_1-\rho}{\rho}z + 2)\frac{dg}{dz} + \frac{3p_1-\rho}{\rho}g = 0$, dont les solutions telles que $f(0) = 0$, pour traduire le fait que $C(0) = 0$, autrement dit le fait que la métrique est bien définie à

l'intérieur de la boule, (i.e. $g(z)/z$ s'annule en 0) sont :
(20) $g(z) = \lambda z^{3/2}\ {}_2F_1(1/2, 5/4 + \frac{3p_1}{4\rho}; 5/2; z)$, (cf. formule 2.09.(17), Erdelyi [2]), où λ est une constante arbitraire, et ${}_2F_1$ désigne la fonction hypergéométrique. Ainsi la fonction $r = f(C)$ est égale à
(21) $r(C) = f(C) = \lambda C\ {}_2F_1(1/2, 5/4 + \frac{3p_1}{4\rho}; 5/2; \rho C^2/3)$;
Ce résultat généralise le cas où l'astre est mort, i.e. $p_1 = \rho = constante$.

Remarque : a) Lorsque $p_1 \neq \rho$, on n'a pas $FL = C'$, ainsi l'astre n'est pas mort au sens de la proposition 5.
b) Si p_1 est un polynôme en C^2 , pouvant exprimer par exemple l'augmentation de pression du bord vers le centre de la boule, alors l'équation (4 bis) (b) est une simple quadrature.
c) Plus généralement si ρ n'est pas constant mais est un polynôme en C (qui peut exprimer l'augmentation de densité du bord vers le centre de la boule) alors (4 bis) (a) se réduit à une simple quadrature, puis (4 bis) (b) aussi ; F et L étant des fonctions de C (et de C'), l'équation d'orthogonalité (4 bis) (d) ne dépend plus que de C et de ses dérivées ; Ce schéma de résolution permet alors de faire des simulations numériques.

En particulier si $p_1 = \frac{2*\rho}{3}$, dans ce cas on a une boule chaude composée d'un fluide ultrarelativiste (cf. le paragraphe 10 plus loin), faisons la même étude qu'au paragraphe 4. Avec l'hypothèse de recollement on obtient la fonction h(x) suivante :

$$h(x) = \frac{5\,x^5 F1}{10\,(x^2 + (1-x^2)\ln(1-x^2))\,F1 - 7\,(2x^2\,(1-x^2) + (2 - 3x^2 + x^4)\ln(1-x^2))\,F2},$$

où $F1 = {}_2F_1(1/2, 7/4; 5/2; x^2)$ et $F2 = {}_2F_1(3/2, 11/4; 7/2; x^2)$, dont le graphe est similaire à celui obtenu pour un astre froid :

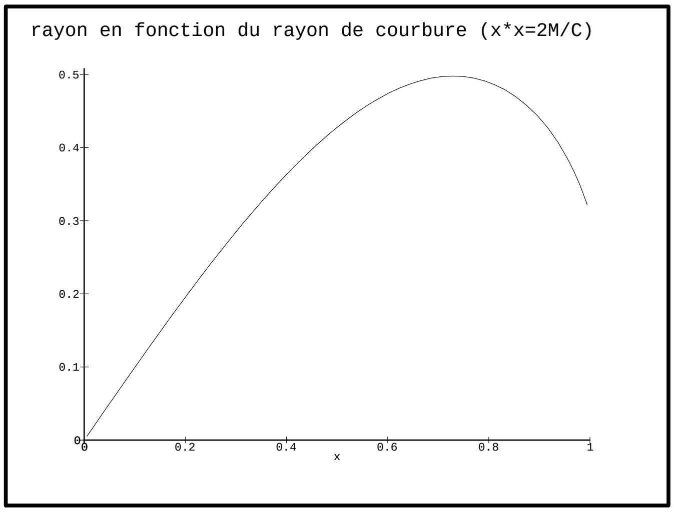

Fig 2 : Tracé sommaire de la fonction $h(x) = \sqrt{\frac{\rho}{3}} r_o$ pour un astre chaud. Le maximum obtenu pour $x_m \approx 0.73$ est $y_m \approx 0.498$; la valeur limite en x=1 est ≈ 0.32.

9 Deuxième hypothèse. L'astre est thermodynamiquement mort :
D'après les propositions 4 et 5, même si le contenu de l'astre ne se traduit pas par un fluide parfait, un astre mort vérifie $FL = C'$, propriété qui traduit que $M_2 = M$.
Posons $\rho = \rho(C)$, $p_1 = p_1(C)$ et $p_2 = p_2(C)$.

Proposition 6 : sous l'hypothèse $FL = C'$ on a : $p_1 = \rho$.
En effet, du fait que $FL = C'$, les deuxièmes membres des équations (4 bis) (a) et (b) sont identiques.
L'équation (c) se réduit alors à $p_2 = \rho + \frac{C}{2}\frac{d\rho}{dC}$. Ceci signifie en particulier que le contenu d'un astre mort ne vérifie l'hypothèse d'un fluide parfait que si sa densité est constante !

Théorème 7 : les quatre assertions suivantes sont équivalentes :
i) $FL = C'$;
ii) $p_1(C) = \rho(C)$;
iii) $p_1(C) \leq \rho(C)$ et $M_2 = M$;
iv) $p_1(C) \leq \rho(C)$ et $F(0) = 1$.
Ce théorème qui résume les propositions précédentes permet alors de définir un astre sphérique thermodynamiquement mort.

Définition : Dans le cadre de la relativité générale, on appellera astre mort, ou résidus astral, ou corps gravitationnel pur, une boule de matière vérifiant une des quatre assertions du théorème précédent.

Revenons maintenant sur les concepts de "masse" ou plutôt d'énergie que nous avons mis en évidence, il y en a quatre :
$M_1(= \frac{1}{8\pi}\int_{boule}\ \rho(r)r^2 dr d\omega\ )$ désigne l'énergie de matière, ou énergie Newtonienne,
$M_2(= \frac{1}{8\pi}\int_{boule}\ \rho(r)FLC^2 dr d\omega\ )$ désigne l'énergie de matière plus l'énergie gravitationnelle pure,
$M(= \frac{1}{8\pi}\int_{boule}\ \rho(r)C^2C' dr d\omega\ )$ désigne l'énergie de matière plus l'énergie gravitationnelle pure plus l'énergie thermodynamique,
enfin nous avons l'énergie M_o, où M_o désigne la constante d'intégration de la solution extérieure à la boule de rayon r_o et de densité $\rho(r)$, nous l'appellerons l'énergie Einsteinienne.

Nous avons vu que, sous l'hypothèse de recollement et avec la jauge harmonique, on a les relations suivantes : $M_o = M \geq M_2$ (et nous avons vu que pour un astre mort à densité constante, $M_2 > M_1$, nous montrerons plus loin la généralité de ce dernier résultat).
Il est évident que si l'on change l'hypothèse de recollement et (ou) la jauge on n'aura plus les mêmes relations entre ces quatre concepts d'énergie. Il est temps, et il est sans doute possible maintenant, de tester ces hypothèses. En tout cas le recours à la solution extérieure de Schwarzschild empêche de bien poser ce problème (puisque M_o est identifié à M_1 par simple analogie, analogie qui sert d'hypothèse implicite).

Nous venons d'examiner deux hypothèses, en particulier celle définissant un astre thermodynamiquement mort. D'autres choix d'hypothèses sont possibles comme, par exemple,

l'hypothèse très géométrique $L' = 0$, qui signifie que la distance radiale Riemannienne est proportionnelle à la distance radiale Newtonienne dans la boule de matière. Ou encore $F' = 0$ qui signifie que le référentiel est synchrone à l'intérieur de la boule (i.e. le temps propre est le même pour tout point à l'intérieur de la boule). Ou encore l'indice de réfraction est constant dans la matière : $F'/F = L'/L$ (i.e. une onde électromagnétique se déplace radialement à une vitesse constante dans la matière, lorsqu'elle n'interagit pas avec celle-ci).
Ces hypothèses ont pour but de traduire une certaine homogénéité de la matière dans la boule sphérique. Ce sont d'autres cas limites, que celui de l'astre thermodynamiquement mort, qui permettent de mettre des bornes ou de fixer des repères. Bien que ce soient des hypothèses intéressantes, nous ne les étudierons pas ici.

Il est possible maintenant de poser le problème du champ émis par une boule statique, de la manière la plus générale qui soit, en tenant compte des résultats précédemment acquis.
10 Le champ émis par une boule ; situation générale.
Dans la mesure où le champ émis par un astre mort dépend d'une part de la donnée de la fonction densité $C \to \rho(C)$ et d'autre part du fait que $FL = C'$, cf. le théorème précédent ; pour un astre chaud, prenons comme données :
soit $C \to \rho(C)$ ou à la place de la fonction "densité d'énergie" $\rho(C)$, la fonction quantité d'énergie $C \to \mathcal{M}(C) = \frac{1}{2}\int_0^C \rho(u)u^2du$, (qui vérifie $\mathcal{M}(C_o) = M$), et à la place d'une "fonction d'état", définissant la pression thermodynamique en fonction de la pression, prenons la fonction pression radiale $C \to p_1(C)$, ou la fonction $C \to k(C) = \frac{FL}{C'}$; Cette fonction k, définie de manière très géométrique, possède un lien étroit avec ce que l'on pourrait appeler la "pression thermodynamique" p_T, pression que l'on ne peut définir qu'en posant :
(22) $p_T = \rho - p_1$. (si $p_T = 0$, i.e. $k(C) = 1$, on a un astre mort).
En effet, avec ces notations, il est immédiat de vérifier que les équations d'Einstein s'intègrent en donnant :
$L^2 = \frac{C'^2}{1-\frac{2\mathcal{M}(C)}{C}}$, $F^2 = k^2(C)(1 - \frac{2\mathcal{M}(C)}{C})$;
La pression p_T est égale à : $p_T = \frac{dk}{dC}\frac{2}{kC}(1 - \frac{2\mathcal{M}(C)}{C})$, et la jauge permettant de calculer la fonction périmètre de courbure s'écrit, toujours en posant $r = f(C)$, sous la forme de l'équation linéaire suivante :
$\frac{d}{dC}(C^2(1 - \frac{2\mathcal{M}(C)}{C})k(C)\frac{df}{dC}) = 2k(C)f$.
Il est immédiat de remarquer que $k(C_o) = 1$, $k(0) = F(0)$, $k'(0) = 0$ et que si l'entropie est croissante (i.e. p_T est positive) alors k est une fonction croissante.
La jauge peut également s'écrire sous la forme développée suivante :
(23) $C(C - 2\mathcal{M}(C))f'' + (2(C - \mathcal{M}(C)) - \frac{\rho+p_1}{2}C^3)f' = 2f$.
Dans ce cadre, en vue d'une confrontation aux observations il est intéressant d'essayer d'estimer $C(r)$ pour un champ faible et plus précisément d'estimer $C(r) - r$.
Pour cela, utilisons d'une part les inégalités de masses ($M_1 < M_2 \leq M$) et d'autre part l'hypothèse de recollement.

Proposition 8 : Sous l'hypothèse d'une part que la pression p_T est comprise entre

0 (astre mort) et $\rho/3$ (astre composé d'un fluide ultrarelativiste), et d'autre part que le champ émis par la boule est faible, on obtient l'encadrement suivant :
(24) $r + M + \frac{2}{21}\frac{\rho_o r_o^5}{15 r^2} \leq C(r) \leq r + M + \frac{1}{r^2}(\frac{\rho_o r_o^5}{30} + (\frac{\rho_o r_o^5}{6} - M r_o^2))$, où ρ_o désigne la densité au centre de la boule.

Preuve : utilisons l'équation de jauge (23) . Elle s'écrit dans les deux cas limites, traduisant que $\frac{5\rho}{6} \leq \frac{\rho+p_1}{2} \leq \rho$ (en particulier que $M_2 \leq M$) :
pour $p_T = 0$: $C(C - 2\mathcal{M}(C))f'' + (2(C - \mathcal{M}(C)) - \rho C^3)f' = 2f$, et
pour $p_T = \frac{\rho}{3}$: $C(C - 2\mathcal{M}(C))f'' + (2(C - \mathcal{M}(C)) - \frac{5\rho}{6}C^3)f' = 2f$.
Remarquons maintenant que sous la condition $\rho C^2 \leq 1$ qui est une condition restrictive très faible, en particulier vérifiée si la fonction de densité est décroissante et le champ est faible ($\frac{M}{C_o} \ll 1$), les fonctions $2(C-\mathcal{M}(C))-\rho C^3, 2(C-\mathcal{M}(C))-\frac{5\rho}{6}C^3$ et $2(C-\mathcal{M}(C))-\frac{\rho+p_1}{2}C^3$ sont positives. Ainsi on a :
$(2(C - \mathcal{M}(C)) - \frac{5\rho}{6}C^3)f' \leq 2f - C(C - 2\mathcal{M}(C))f'' \leq (2(C - \mathcal{M}(C)) - \rho C^3)f'$.
Et si f_1 et f_2 sont les solutions des équations limites ci-dessus, alors la solution f de (23) est encadrée par ces solutions f_1 et f_2.
Considérons dans un premier temps une distribution de densité de matière définie par le polynôme décroissant et positif sur $[0, C_o]$: $\rho(C) = \rho_o - aC + bC^2$, où a est positif et b est réel (tel que $\rho(C_o)$ soit positif). Cherchons les solutions f_1 et f_2 sous la forme d'une série en C et un développement au premier ordre en ρ_o, a et b. On obtient :
$f_1(C) = \lambda_1(C + \frac{7\rho_o}{60}C^3 - \frac{13}{12x18}aC^4 + \frac{31}{28x30}bC^5 + ...)$ et
$f_2(C) = \lambda_2(C + \frac{2\rho_o}{15}C^3 - \frac{5}{4x18}aC^4 + \frac{6}{28x5}bC^5 + ...)$.
Comme $2\mathcal{M}(C) = \frac{\rho_o}{3}C^3 - \frac{1}{4}aC^4 + \frac{1}{5}bC^5$, on a encore :
$f_1(C) = \lambda_1(C + \frac{7}{10}\mathcal{M}(C) + \frac{59}{80x27}aC^4 + \frac{113}{4200}bC^5 + ...)$ et
$f_2(C) = \lambda_2(C + \frac{4}{5}\mathcal{M}(C) + \frac{11}{40x9}aC^4 - \frac{13}{70x5}bC^5 + ...)$.
On obtient dans un premier temps l'inégalité :
(25) $f_1(C) \leq f(C) \leq f_2(C)$,
lorsque $\rho(C)$ est un polynôme décroissant du deuxième degré.
Pour effectuer des encadrements on utilisera le fait que le champ est faible en supposant que $\rho_o C_o^2$ est petit devant l'unité et que la densité $\rho(C)$ est positive et majorée par $\rho_o = \rho(0)$; plus précisément on a les inégalités suivantes :
(26) $-\frac{\rho_o}{C} + a \leq bC \leq a$ et $\frac{2\rho_o}{15}C^3 - 2\mathcal{M}(C) \leq \frac{aC^4}{20} \leq \frac{\rho_o}{3}C^3 - 2\mathcal{M}(C)$.
Pour les estimations ultérieures, ces inégalités ne seront utilisées qu'au point C_o. Si $\rho(C)$ est une fonction décroissante et positive, telle que $\rho(C)C_o^2 < 1$, il est facile de vérifier qu'il existe un polynôme $\rho^*(C) = \rho(0) - aC + bC^2$, tel que l'on ait d'une part $\rho^*(C_o) \geq 0$ et d'autre part
$2M = 2\mathcal{M}(C_o) = \int_0^{C_o} \rho(u)u^2du = \int_0^{C_o} \rho^*(u)u^2du)$. Ainsi, pour un champ faible, on a toujours : $f_1(C) \leq f(C) \leq f_2(C)$.

Utilisons maintenant l'hypothèse de recollement ; on doit avoir :
$f(C_o) = C_o - M - \frac{3A}{2M^2}(2 + \frac{(M-C_o)}{M}Log\frac{C_o}{C_o-2M})$ et
$\frac{df}{dC}(C_o) = 1 - \frac{3A}{2M^2}\frac{d}{dC}(2 + \frac{(M-C)}{M}Log\frac{C}{C-2M})(C_o)$. Calculons alors les constantes A_1 et A_2, en première approximation par rapport à $\frac{M}{C_o}$, associées aux fonctions $f_1(C)$ et $f_2(C)$. On a

à résoudre deux fois un système de deux équations à deux inconnues (A_1 et λ_1 puis A_2 et λ_2). Ceci nous conduit à la double inégalité :
(27) $A_2 \approx -\frac{MC_o^2}{5} - \frac{37aC_o^6}{60x24} - \frac{2bC_o^7}{25x21} \leq A \leq A_1 \approx -\frac{2M}{15}C_o^2 - \frac{11aC_o^6}{8x70} - \frac{4bC_o^7}{25x63}$, et en tenant compte des inégalités (26) ,
$-\frac{\rho_o C_o^5}{30} + (MC_o^2 - \frac{\rho_o C_o^5}{6}) \leq A_2 \leq A \leq A_1 \leq -\frac{2}{21}\frac{\rho_o C_o^5}{15}$, et donc on a :
$\frac{2}{21}\frac{\rho_o C_o^3}{15} \leq -\frac{A}{C_o^2} \leq \frac{\rho_o C_o^3}{15} + (\frac{\rho_o C_o^3}{6} - M)$.
Notons que cet encadrement est très bon pour un astre mort à densité constante car la borne supérieure est atteinte ($-\frac{A}{C_o^2} \simeq \frac{M}{5} = \frac{\rho_o C_o^3}{30}$).
Reportant alors cette double inégalité dans la solution extérieure : $r = C - M + \frac{A}{C^2} + ...$, nous obtenons , par inversion de la fonction $C \to r = f(C)$, la proposition.

Corollaire 9 : Comparaisons des énergies M_1, M_2 et M : Sous l'hypothèse d'une part que la pression p_T est comprise entre 0 (astre mort) et $\rho/3$ (astre composé d'un fluide ultrarelativiste), et d'autre part que le champ émis par la boule est faible, on obtient l'encadrement suivant :
$M_1 \leq M_2 \leq M$ et même plus précisément, on a les inégalités suivantes :
(28) $(1 + \frac{5\rho_o C_o^2}{36})M_1 \leq M_2 \leq M \leq (1 + \frac{2M}{C_o} + \frac{2\rho_o C_o^2}{3})M_1$.
Pour montrer ce résultat, nous avons à comparer les trois masses M_1, M_2 et M, c'est-à-dire les trois fonctions r^2, FLC^2 et C^2C'. Comme $FL = kC'$, examinons cette fonction k ; on a d'une part : $p_T = \frac{dk}{dC}\frac{2}{kC}(1 - \frac{2\mathcal{M}(C)}{C})$ et d'autre part $p_T \leq \frac{\rho}{3}$; et du fait que k croit de $k(0) = F(0)$ à 1, on a donc $0 \leq k' \leq \frac{\rho C k}{6}(1 - \frac{2\mathcal{M}(C)}{C})^{-1}$. Or il est immédiat de vérifier que l'on a :
$sup(\frac{2\mathcal{M}(C)}{C}) = sup(\rho C^2) \leq \rho_o C_o^2$; alors par intégration de k' on obtient la majoration $1 - k(0) \leq \frac{1}{6(1-\rho_o C_o^2)}\int_0^{C_o} \rho C dC (\simeq \frac{1}{6}\int_0^{C_o} \rho C dC$ si le champ est faible). En intégrant on a alors en première approximation
(29) i) $1 \geq k(0) \geq 1 - \frac{M}{2C_o} - \frac{aC_o^3}{16x9} + \frac{bC_o^4}{20x6}$.
Par ailleurs les valeurs de λ_1 et λ_2 s'obtiennent immédiatement à partir de celles de A_1 et A_2. On a :
ii) $\lambda_1 \approx 1 - \frac{11\rho_o C_o^2}{36} + \frac{551aC_o^3}{16x7x27} - \frac{11bC_o^4}{72}$;
iii) $\lambda_2 \approx 1 - \frac{2M}{C_o} - \frac{9aC_o^3}{8x20} - \frac{bC_o^4}{30}$;
On peut alors comparer les fonctions r^2, FLC^2 et C^2C'.
$k(0)\lambda_1^{-3}r^2 \leq k(0)C^2C' \leq FLC^2 \leq C^2C' \leq \lambda_2^{-3}r^2$;
Or $k(0)\lambda_1^{-3} \approx 1 + \frac{5\rho_o C_o^2}{6} - \frac{55aC_o^3}{16x7} + \frac{5bC_o^4}{12}$; en se servant du fait que
$\frac{M}{C_o} > 0$, i.e. $\frac{bC_o^2}{5} > \frac{aC_o}{4} - \frac{\rho_o}{3}$, on a la minoration :
$k(0)\lambda_1^{-3} \geq 1 + \frac{5\rho_o C_o^2}{6} + \frac{5aC_o^3}{8x21} \geq 1 + \frac{5\rho_o C_o^2}{36}$. De même on a :
$\lambda_2^{-3} \leq 1 + \frac{2M}{C_o} + \frac{2\rho_o C_o^2}{3}$, d'où le résultat.

11 Période de rotation d'un satellite.
Soit un astre de masse (Einsteinienne) M et de rayon r_o, autour duquel tourne un satellite qui suit une orbite circulaire de rayon r. Pour un observateur éloigné, plus précisément dans le temps propre d'un observateur à l'infini, la période de rotation du satellite est :

(30) $T = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{CC'}{FF'}} = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{C^3(r)}{M}}$, où c est la vitesse de la lumière.
La période Newtonienne est $T_N = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{r^3}{M}}$. Si l'on prend la solution de Schwarzschild comme champ extérieur créé par la boule, la période de rotation T est égale à la période Newtonienne T_N, mais ce n'est pas le cas pour une solution associée à une jauge. Cette formule (30) souligne ainsi l'importance de la jauge.
Calculons maintenant l'écart $\Delta(r) = T(r) - T_N(r)$ entre la période relativiste, calculée avec la jauge harmonique, et la période Newtonienne, pour un astre de même masse et de même rayon que notre soleil. Dans la mesure où la fonction périmètre de courbure $r \to C(r)$, dépend de propriétés internes à l'astre considéré, nous allons donc considérer plusieurs situations.
Si le soleil est froid et à densité constante, on obtient en première approximation : $T = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{r^3}{M}}(1 + \frac{M}{r}(1 + \frac{C_o^2}{5r^2}))$,
si le soleil est composé d'un gaz ultra-relativiste à densité constante, on obtient en première approximation : $T = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{r^3}{M}}(1 + \frac{M}{r}(1 + \frac{2C_o^2}{15r^2}))$,
mais compte tenu du paragraphe précédent on a pour le soleil :
$T = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{r^3}{M}}(1 + \frac{M}{r}(1 - \frac{A}{Mr^2}))$, A vérifiant les inégalités (27). Ces inégalités permettent d'estimer l'écart entre la période Newtonienne et la période Einsteinienne :
(31) $\Delta(r) = T(r) - T_N(r) \approx \frac{3\pi}{c}\sqrt{Mr}(1 + \alpha\frac{r_o^2}{5r^2})$, où $\frac{1}{9} < \alpha \leq 1$
et un écart relatif de :
(32) $\frac{\Delta(r)}{T(r)} \approx \frac{3}{2}\frac{M}{r}(1 + \alpha\frac{r_o^2}{5r^2} - \frac{3}{2}\frac{M}{r})$; cet écart relatif n'est pas négligeable, surtout pour un satellite proche du soleil.
L'écart $\Delta(r)$ entre la loi de Kepler et la relativité générale est même important. En effet pour le satellite mercure il est d'environ 0,28 seconde par siècle, si son orbite était parfaitement circulaire. Pour un satellite artificiel qui tournerait sur une orbite de rayon double du rayon solaire, l'écart serait d'environ 5 10^{-2} secondes par période. Mais est-il mesurable, compte-tenu des difficultés et des imprécisions des observations ? Ce serait intéressant car cela permettrait de tester la validité de la jauge harmonique (et de l'hypothèse de recollement). Par contre pour une étoile à neutrons d'une masse solaire, cet écart est du même ordre de grandeur que la période Newtonienne, ce qui signifie que pour l'observation d'un système double comprenant une étoile à neutrons on ne peut pas se passer d'une jauge pour pouvoir interpréter les résultats observés !

Conclusion : A partir d'une première définition d'un astre mort, l'entropie est constante, nous avons mis en évidence quatre concepts de masses ou plutôt d'énergies associés à un astre, et des relations entre ces énergies. Ainsi nous avons pu donner une définition intrinsèque d'un astre mort (cf. par. 9). Mais pour cela, nous avons du abandonner l'hypothèse, par trop simplificatrice, que le contenu d'un astre suivait l'hypothèse d'un fluide parfait. Par ailleurs nous avons pu décrire complètement la solution extérieure, en ayant recours à une jauge, la jauge harmonique, et à une hypothèse de recollement entre les solutions intérieure et extérieure à la boule, ceci pour assurer une unicité de solution. On ne peut éviter le recours à une jauge, car de celle-ci dépend l'unicité de solution et de cette unicité la non-ambiguïté de l'évolution d'une particule d'épreuve dans le champ gravita-

tionnel créé par l'astre considéré : vitesse d'impact d'une particule en chute libre vers la boule, période de rotation d'un satellite, ou encore décalage de temps mis par la lumière entre une planète et la terre (cf. Weinberg [1] chap 8.7 p.203-204).
Si nous avons fait le choix de la jauge harmonique, qui est le choix de V. Fock qui en donne de multiples justifications, c'est surtout à cause du problème de la confrontation aux observations, qui pour un champ faible passe par le formalisme post-Newtonien. Or la jauge harmonique est compatible avec ce formalisme (cf. [1]). Mais la jauge harmonique n'assure l'unicité de solution qu'avec le recours à une condition supplémentaire qui fixe une constante d'intégration arbitraire (A dans le texte) ; l'hypothèse de recollement prise fournit cette condition supplémentaire. On peut même dire que cette hypothèse (continuité de la jauge au bord de la boule) donne un statut théorique clair au formalisme post-Newtonien qui devient alors le développement de la solution harmonique pour un champ faible.
Enfin le champ gravitationnel créé par un astre chaud est évalué de manière si précise qu'il peut donner lieu à diverses confrontations aux observations, y compris dans le système solaire.

Bibliographie.

[1] S. WEINBERG : Gravitation and cosmology ; John Wiley, New-York (1972).
[2] A. ERDELYI : Higher transcendental functions ; Vol 1, McGraw Hill Book Company, New-York (1953).
[3] V. FOCK : The theory of space, time and gravitation ; Pergamon Press, London (1959).
[4] R.A. ASANOV : The Schwarzschild metric and the de Donder condition ; G.R.G. Vol. 21 $n°2$ p.149 (1989).
[5] A. LICHNEROWICZ : Théories relativistes de la gravitation et de l'électro-magnétisme. Masson (1955).
[6] S. MAVRIDES : Problèmes Physiques : Equations d'état ; dans "Fluides et champ gravitationnel en relativité générale" Colloques internationaux du C.N.R.S. n^o 170, page 147, Paris (1969).
[7] C. WILL : Theory and experiments in gravitational physics ; Cambridge university press, London (1981).
[8] E.GOURGOULHON : Equilibre et effondrement gravitationnel des étoiles en relativité générale et en symétrie sphérique ; Ann.Phys. Fr. Vol 18 $n°1$ pp1-87 (1993).