Chapitre 8
Modèle d'univers confronté aux observations

Michel Mizony

* Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université Lyon 1

Introduction

Nous avons établi que pour un modèle d'univers homogène et isotrope, le tenseur impulsion-énergie écrit dans un système de coordonnées comobiles est constant, lorsqu'il n'y a pas de création continue de matière. Autrement dit, il n'y a pas de mystère de la constante cosmologique. Puis nous avons donné la forme de la métrique solution pour un univers de matière (sans création de matière) et de rayonnement (sans interaction avec la matière). Nous allons étudier plus précisément cette solution et là confronter aux observations. Cette confrontation aux observations actuelles montre que la plupart des problèmes posés par les modèles standards (inflationnaires ou non) sont très naturellement expliqués. Mais auparavant nous reviendrons sur quelques principes. Enfin nous poserons correctement des problèmes de masse cachée, ce qui nous permettra d'une part de résoudre le problème de la platitude des courbes de rotation des galaxies et d'autre part de bien mettre en évidence le concept de "rayon d'attraction" d'une condensation locale de matière.

I Rappels théoriques

Dans le cadre de la relativité générale, un modèle d'univers homogène et isotrope, est décrit par sa forme de Robertson-Walker, dans un système de coordonnées comobiles, si les temps atomiques et cosmologiques coïncident. Plus précisément la métrique lorentzienne cherchée définie sur une variété de dimension 4 ne peut être que de la forme suivante :

$$(1)\quad ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)(d\alpha^2 + f_\epsilon^2(\alpha)d\omega^2),$$

où $d\omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$ et où, pour $\epsilon = 1,\ 0,\ -1$ suivant la nature de la partie spatiale de l'univers, on a respectivement : $f_\epsilon\alpha = sin(\alpha),\ \alpha,\ sh(\alpha)$.

Rappelons aussi que, pour calculer R(t), il faut respecter deux faits :

a) Le tenseur impulsion-énergie ne peut être interprété localement en terme de densité et de pression que dans un repère comobile **et** localement inertiel. Dans un repère CO-mobile seulement, ce qui est le cas pour une métrique non statique écrite sous la forme de Robertson-Walker, ce tenseur impulsion-énergie ne peut être interprété qu'en terme de COdensité et de COpression.

b) Les équations d'Einstein ont des statuts très différents : nous avons

-L'équation des contraintes

$$(2) \quad \frac{8\pi G}{c^2}T_0^0 = 3(\frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2})$$

qui sera supposée vérifiée aujourd'hui au temps t_0.

-L'équation de conservation

$$(3) \quad 3R^2\dot{R}T_1^1 = \frac{d}{dt}(R^3T_0^0)$$

qui permet de définir la pression en fonction de la densité.

-Et l'équation d'évolution

$$(4) \quad \frac{8\pi G}{c^2}T_1^1 = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{c^2R}$$

qui seule est à résoudre. La solution générale de cette équation dépend de deux constantes d'intégration arbitraires, sachant que ces deux constantes doivent vérifier l'équation des contraintes (2) au temps t_0.

Tenant compte de ces deux faits a) et b), il suffit d'une hypothèse faible sur le tenseur impulsion énergie :

L'équation de base du tenseur impulsion-énergie :

Au sujet de l'interprétation du tenseur impulsion-énergie rappelons ce que dit S. Weinberg (cf. [1], page 127) :

"The contravariant tensor is $T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p+\rho)U^\mu U^\nu$, where U^μ is the local value of $\frac{dx^\mu}{dt}$ for a comoving fluid element. Note that p and ρ are always defined as the pressure and energy density measured by an observer in a locally inertial frame that happens to be moving with the fluid at the instant of measurement, and are therefore scalars."

Pourquoi l'aspect localement inertiel a-t-il été oublié dans l'élaboration des modèles standards ?

La densité d'énergie (ou de matière) est représentée localement par $T_0^0(t)$. Sachant que localement le tenseur impulsion-énergie ne peut s'interpréter que dans un système localement inertiel en terme de densité et de pression, rappelons deux conséquences importantes, indépendantes de toute équation d'état sur l'énergie de l'univers.

a) Soit ρ_0 la densité mesurée dans le repère comobile et inertiel au temps t_0 et ρ_1 celle mesurable dans le repère comobile et inertiel au temps t_1 ; alors **l'équation de base du tenseur impulsion-énergie** est

$$(5) \quad T_0^0(t_0) = \rho_0(t_0) = \frac{R^3(t_0)}{R^3(t_1)}\frac{\rho_1(t_0)}{\rho_1(t_1)}T_0^0(t_1),$$

indépendamment de toute équation d'état sur l'énergie de l'univers.
Cette équation traduit simplement le fait que dans un système de coordonnées Co-mobiles, le tenseur impulsion-énergie s'interprète en termes de Co-densité et de Co-pression.

b) L'équation des contraintes donne la courbure de l'univers et son signe en fonction des données d'observations : cette équation s'écrit au temps t_0 : $\frac{8\pi G}{3}\rho_0 = \frac{\epsilon c^2}{R^2(t_0)} + H_0^2$, Ce qui nous fixe, en fonction des quantités $\rho_0 = \rho_0(t_0)$ (densité aujourd'hui) et H_0 (constante de Hubble) observées, le signe de la courbure de la partie spatiale de la métrique d'univers $\epsilon = signe(\frac{8\pi G}{3}\rho_0 - H_0^2)$, et la **courbure de l'univers aujourd'hui**, dons sa plus ou moins grande platitude aujourd'hui si $\epsilon \neq 0$

$$(6) \qquad R^2(t_0) = \frac{\epsilon c^2}{\frac{8\pi G}{3}\rho_0 - H_0^2} \ ;$$

ce qui détermine complètement la partie spatiale de la métrique aujourd'hui :
$d\alpha^2 + R^2(t_0) f_\epsilon^2(\frac{\alpha}{R^2(t_0)})d\omega^2$.

Rappelons qu'il n'existe au point $(t_0, \alpha_0, \omega_0)$ qu'un seul système de coordonnées qui soit à la fois comobile et inertiel ; il s'obtient en écrivant la métrique (1) sous la forme suivante :
$ds^2 = c^2dt^2 - \frac{R^2(t)}{R^2(t_0)}(R^2(t_0)d(\alpha - \alpha_0)^2 + R^2(t_0)f_\epsilon^2(\alpha - \alpha_0))d\omega^2$;
ou, en posant $d\beta = d\alpha(t_0, \alpha_0, \omega_0) = R(t_0)d(\alpha - \alpha_0)$, la **métrique comobile et localement inertielle aujourdhui** s'écrit alors :

$$(7) \qquad ds^2 = c^2dt^2 - \frac{R^2(t)}{R^2(t_0)}(d\beta^2 + R^2(t_0)f_\epsilon^2(\frac{\beta}{R(t_0)})d\omega^2);$$

II Univers avec un rayonnement
n'interagissant pas avec la matière.

Il est admis que l'on peut représenter le contenu énergétique de l'univers par un "fluide" de matière comobile (les particules de ce fluide étant les amas de galaxies) baignant dans un rayonnement qui n'interagit pas avec cette matière comobile.
Soient donc ρ_r et ρ_m les densités respectives de rayonnement et de matière.
Les hypothèses d'évolution de ces densités $t \rightarrow \rho_r(t)$ et $t \rightarrow \rho_m(t)$ sont données par les équations :

$\rho_r(t)R^4(t) = \rho_r^* = constante$ pour le rayonnement (de corps noir) et

$\rho_m(t)R^3(t) = \rho_m^* = constante$ pour la matière (s'il n'y a pas de création de matière).

Comparons les densités $\rho_{r,0}(t)$ et $\rho_{m,0}(t)$ dans une normalisation de la métrique au temps t_0 et $\rho_{r,1}(t)$ et $\rho_{m,1}(t)$ dans celle au temps t_1 ; i.e. avec les formes de métrique (6) et (7) respectivement. On a donc :

$T_0^0(t_0) = \rho_{r,0}(t_0) + \rho_{m,0}(t_0)$;

$T_0^0(t_1) = \rho_{r,1}(t_1) + \rho_{m,1}(t_1) = \frac{R^3(t_1)}{R^3(t_0)}(\rho_{r,0}(t_1) + \rho_{m,0}(t_1)$, en utilisant (5) .

Donc $T_0^0(t) = \rho_{m,0}(t_0) + \frac{R(t_0)}{R(t)}\rho_{r,0}(t_0)$.

Notons $A = \rho_{m,0}(t_0)$, $B = \rho_{r,0}(t_0)$ et $a = R(t_0)$; alors $T_0^0(t)$ est de la forme

$$(8) \qquad T_0^0(t) = A + \frac{aB}{R(t)}.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation d'Einstein (4) , ce qui donne, en posant
(9) $\lambda^2 = \frac{8\pi GA}{3}$:

$$(10) \quad R(t) = -\frac{aB}{2A} + \lambda_1 e^{\lambda t} + \lambda_2 e^{-\lambda t}.$$

Pour trouver cette formule il suffit d'intégrer l'équation (4) en l'écrivant sous la forme :

$$\frac{8\pi G}{c^2}\frac{d}{dt}(R^3 T_0^0)/(3R^2\dot{R}) = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{c^2 R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{c^2 R}.$$

Les constantes d'intégration λ_1 et λ_2 , devant vérifier l'équation des contraintes au temps t_0, sont liées par la relation

$$(11) \quad 4\lambda_1\lambda_2 = \frac{a^2 B^2}{4A^2} + \epsilon c^2 \lambda^{-2} \ .$$

L'équation de conservation (3) précise la pression :

$$(12) \quad T_i^i(t) = A + \frac{2aB}{3R(t)}.$$

Ces modèles, qui approximent asymptotiquement **les trois modèles** de De Sitter, i.e. $R(t) = c(\frac{e^{\lambda t}}{2\lambda} + \epsilon\frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda})$, obtenus en prenant $B = 0$ et $\Lambda = 3\lambda^2 = 8\pi GA$, ne sont valables qu'après le temps du découplage rayonnement-matière. Ils sont stables (cf. Coley et Tavakol [2]) par rapport à des conditions initiales. Il ne reste plus qu'à les confronter aux observations. Notons d'ores et déjà que l'invariance de chacun des trois modèles par le semi-groupe de causalité de de Sitter nous assure d'une part de l'isotropie parfaite du rayonnement de fond cosmologique et d'autre part de l'absence de problème d'horizon (ainsi point n'est besoin d'avoir recours à un modèle inflationnaire pour résoudre ces deux problèmes inexplicables par le modèle standard).

Pour effectuer des calculs, avant la confrontation aux observations, nous allons adopter de nouvelles notations, en particulier en utilisant le paramètre de densité critique Ω, défini usuellement comme suit :
Soit $\rho_c = \frac{3H_o^2}{8\pi G}$, la densité critique ; cette densité critique est reliée au signe ϵ de la partie espace ; ϵ est égal au signe de $\rho_{m,0}(t_0) + \rho_{r,0}(t_0) - \rho_c = A + B - \rho_c$.
Le paramètre Ω est défini par :
$\Omega = \frac{\rho_{m,o}}{\rho_c} = \frac{A}{\rho_c}$, et on a :

$$(9\ bis) \quad \lambda^2 = \frac{8\pi GA}{3} = H_0^2\ \Omega\ .$$

Par ailleurs il est pratique de poser $x = \frac{\lambda_1}{a}e^{\lambda t}$ et $D = \frac{1}{4}\left(\frac{B^2}{4A^2} + 1 + \frac{B}{A}\right) - \frac{1}{4\Omega}$; alors on a : $\frac{R(t)}{R(t_0)} = x + \frac{D}{x} - \frac{B}{2A}$.

La formule de base.

Notons maintenant

$$(13) \qquad \nu = \frac{1}{1+z} = \frac{R(t)}{R(t_0)} = x + \frac{D}{x} - \frac{B}{2A} \ .$$

En effet le redshift z subi par un rayonnement lumineux émis au temps t et observé aujourd'hui vérifie la formule $\frac{1}{1+z} = \frac{R(t)}{R(t_0)}$. Soit un signal lumineux émis au temps t_e et reçu au temps t_r ; notons respectivement z_e et z_r, ν_e et ν_r, etc. les redshifts, "taux d'amortissement" de fréquences, etc. associés par cette formule (13) aux temps t_e et t_r. Alors on a dans tous les cas (i.e. indépendamment du signe de la courbure) le résultat fondamental suivant :

$$(14) \quad e^{H_0\sqrt{\Omega}(t_r - t_e)} = \frac{\nu_r + \frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{1}{\Omega} - 1 - \frac{B}{A} + \nu_r(\nu_r + \frac{B}{A})}}{\nu_e + \frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{1}{\Omega} - 1 - \frac{B}{A} + \nu_e(\nu_e + \frac{B}{A})}}.$$

Pour la preuve de cette formule, il suffit de résoudre l'équation $x + \frac{D}{x} - \frac{B}{2A} = \frac{1}{1+z}$, pour $z = z_e$ puis pour $z = z_r$, sachant que $e^{H_0\sqrt{\Omega}(t_r - t_e)}$ n'est rien d'autre que le quotient des solutions en x obtenues.

Pour trouver des formules particulières et permettre une confrontation aux observations il suffit de poser, dès que cette formule (14) a un sens :
pour le temps t_0 aujourd'hui, $\nu_0 = 1$,
pour le temps t_1 du big-bang $\nu_1 = 0$,
pour le temps t_d du découplage $\nu_d \approx 10^{-3}$, etc.

Âge de l'univers.

Ce modèle admet un big-bang si et seulement si le polynôme $x^2 - \frac{B}{2A}x + D$ admet un zéro strictement positif, c'est à dire si $\frac{H_0^2}{\lambda^2} - 1 - \frac{B}{A} \geq 0$ puisque $B > 0$; Comme le signe de la courbure spatiale est $\epsilon = signe(\frac{8\pi G}{3}(A+B) - H_0^2)$, il y a un big-bang ssi $\epsilon = 0$ ou -1.

Dans ces deux cas on trouve facilement l'âge de l'univers :
Soit t_1 le temps du big-bang, en utilisant la formule (14), on obtient l'âge de l'univers :
Pour $\epsilon = -1$,

$$(15) \qquad t_0 - t_1 = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega}} Log(\frac{1 + \frac{B}{2A} + \frac{1}{\sqrt{\Omega}}}{\frac{B}{2A} + \sqrt{\frac{1}{\Omega} - 1 - \frac{B}{A}}}).$$

Pour $\epsilon = 0$, i.e. $\frac{H_0^2}{\lambda^2} = 1 + \frac{B}{A} = \frac{1}{\Omega}$, on a :

$$(16) \qquad t_0 - t_1 = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega}} Log(\frac{1+\Omega}{1-\Omega}).$$

Pour $\epsilon = +1$, prenons le temps t_2 réalisant le minimum de la fonction R(t) ; ce temps t_2 correspond à la fin de la période de contraction et au début de la phase d'expansion du modèle d'univers, alors on a :

$D = (\frac{\lambda_1}{a}e^{\lambda t_2})^2$, et donc

$$(17) \qquad t_0 - t_2 = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega}} Log(\frac{1 + \frac{B}{2A} + \frac{1}{\sqrt{\Omega}}}{\sqrt{4D}}).$$

Remarques : i) On aurait pu imposer $t_1 = 0$ ou $t_2 = 0$, c'est à dire un choix d'origine des temps, en prenant une valeur de λ_1 appropriée car si on note $R(\lambda_1)(t)$ la solution associée à λ_1, on a $R(\lambda_1)(t) = R(\lambda_1 e^{\lambda t_3})(t - t_3)$, mais cela ne simplifie pas les calculs, bien au contraire ; de fait seules des différences portant sur la variable temporelle t ont un sens.

ii) Les formules (15) à (17) montrent que ces modèles dépendent de la donnée de trois des quatre variables H_0, Ω, A et B, reliées entre elles par la formule (9bis). Mais pour la confrontation aux observations, on supposera toujours que la densité de rayonnement aujourd'hui est $B = 4,4\ 10^{-34} g/cm^3$, valeur universellement admise. Parfois cependant on utilisera $B = 0$ pour simplifier les calculs, dans la mesure où B/A étant petit, les conséquences numériques seront négligeables.

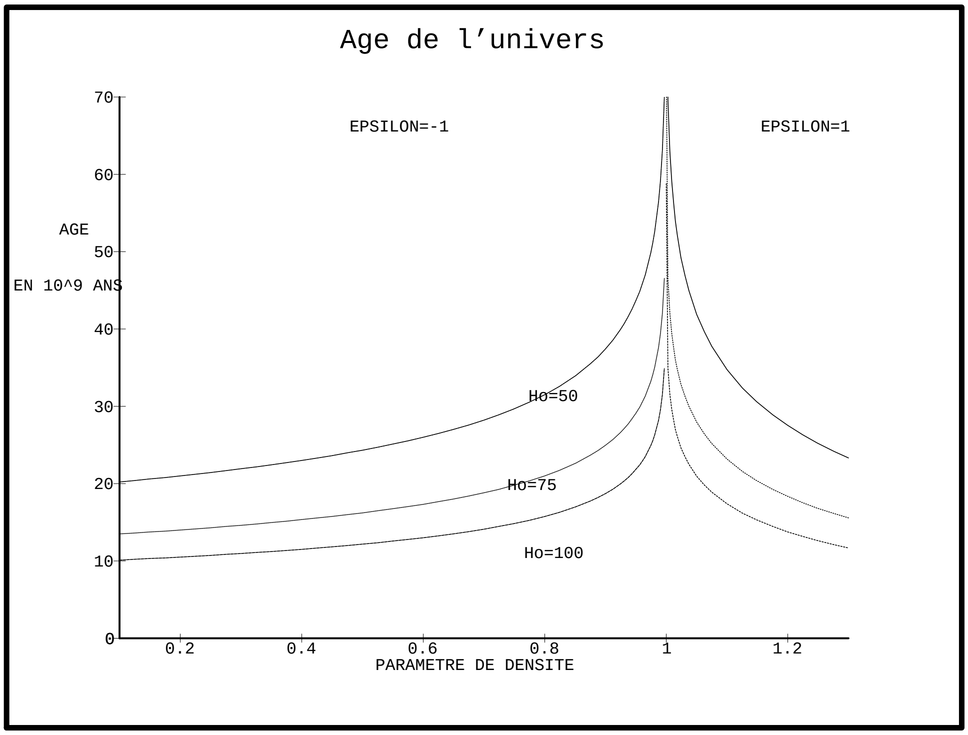


Figure 8.1 :Les pics correspondent à $\epsilon = 0$, les trois courbes correspondent aux trois valeurs de H_0 : 50, 75 et 100km/s/Mpc. Les courbes commencent à gauche avec $\epsilon = -1$ et se terminent à droite avec $\epsilon = 1$.

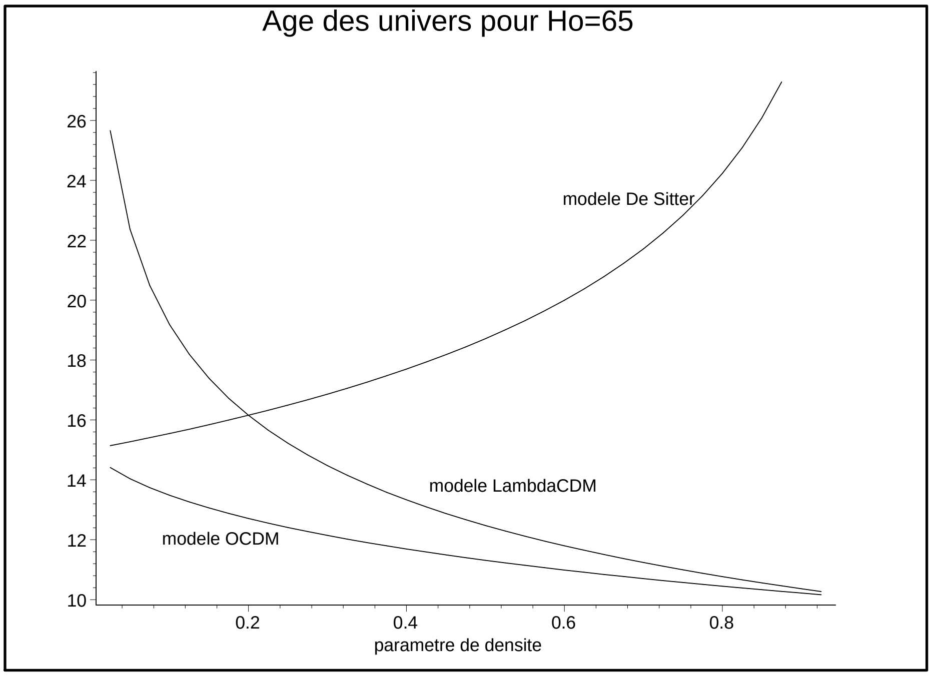


Figure 8.2 : La comparaison entre les modèles standard (OCDM et ΛCDM) et le modèle de De Sitter montre un comportement de l'âge de l'univers très différent ; en particulier $H_0 = 65$ est compatible avec un âge de 15 à ... 50 milliards d'années !

Sur le paramètre de décélération.

Le paramètre de décélération q est défini par : $q(t) = -\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)H^2(t)}$; il est donc du signe de $\ddot{R}(t)$. Il est d'usage de noter q_0 la valeur aujourd'hui de ce paramètre de décélération. Notons q_0^c la valeur critique qui correspond à un modèle pour lequel la partie espace est plate ($\epsilon = 0$). Dans le modèle standard, $q_0^c = \frac{1}{2}$ et suivant que q_0 est plus petit ou plus grand que q_0^c , la partie espace est hyperbolique ou sphérique. En fait ce paramètre q_0 est difficilement confrontable aux observations, cependant des études, en particulier sur les quasars, laissent à penser que q_0 est de l'ordre de -1 (cf. Souriau [3]). Nous allons voir que cette valeur est tout à fait compatible avec le modèle ici développé, en étudiant la fonction de décélération q(t). Par les équations d'Einstein on a :

$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = \frac{4\pi G}{3}(3T_1^1 - T_0^0) = \frac{4\pi G}{3}(2A + B\frac{R(t_0)}{R(t)})$. Donc

$$(18) \qquad q(t) = -\frac{4\pi G}{3H^2}(2A + B\frac{R(t_0)}{R(t)})$$

est toujours négatif (dans la mesure où les densités d'énergie sont positives). Et en particulier aujourd'hui :

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}}{RH_0^2} = -\frac{8\pi G}{3H_0^2}(A + \frac{B}{2}) = -\Omega(1 + \frac{B}{2A}).$$

Comme pour $\epsilon = 0$, on a $\frac{8\pi G}{3H_0^2} = \frac{1}{A+B}$, la valeur critique du paramètre de décélération est $q_0^c = -\frac{A+\frac{B}{2}}{A+B}$. Dans la mesure où la densité du rayonnement est très petite par rapport à la densité de matière,

$q_0^c \approx -1.$

La platitude de l'univers aujourd'hui.

En utilisant la formule (6), on obtient le rayon de courbure de l'univers aujourd'hui, donc sa plus ou moins grande platitude :

$$R_0 = \sqrt{\frac{\epsilon c^2}{\frac{8\pi G}{3}(A+B) - H_0^2}} .$$

Par exemple pour $H_0 = 75 km/s/Mpc$ et $\Omega = 0.6$ on a $R_0 \approx 5000 Mpc$. En fait, R_0 est un rayon de COURBURE et non pas un rayon ; cet objet mathématiquement abstrait est délicat à interpréter et donc difficilement confrontable à des observations. De manière surprenante il n'est jamais pris en considération dans le modèle standard.

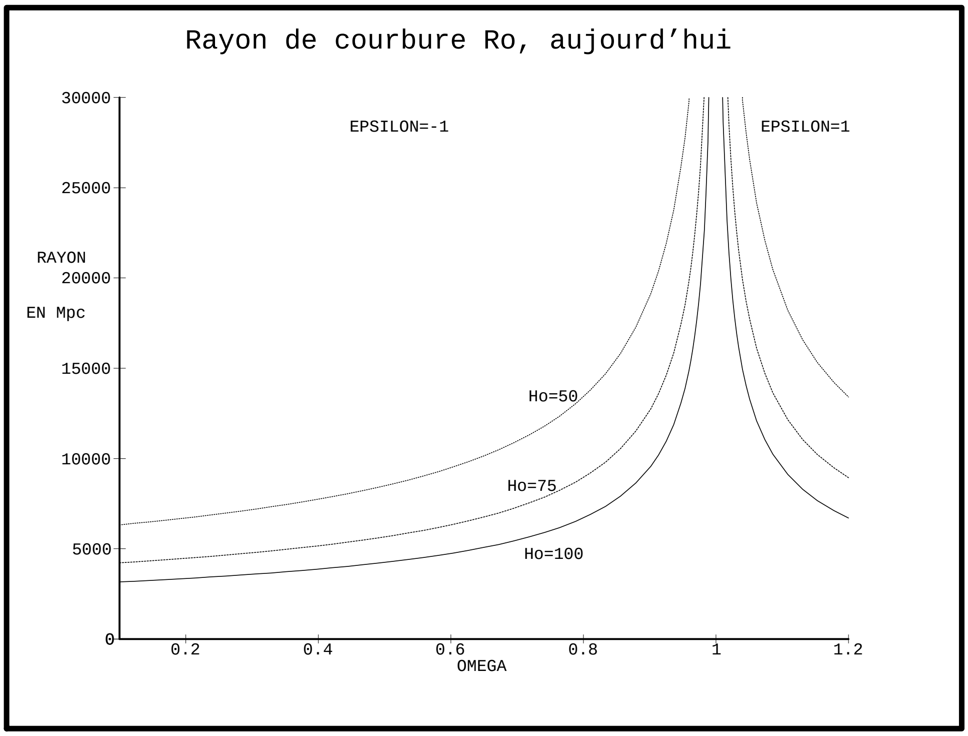


Figure 8.3 : Les pics correspondent à $\epsilon = 0$, les trois courbes correspondent aux trois valeurs de H_0 : 50, 75 et 100km/s/Mpc. Les courbes commencent à gauche avec $\epsilon = -1$ et se terminent à droite avec $\epsilon = 1$.

Le temps du découplage rayonnement-matière.

Pour trouver le moment t_d du découplage matière-rayonnement, il suffit d'utiliser l'équation (14) avec $\nu_r = 1$ et $\nu_e = \frac{R(t_d)}{R(t_0)} = \frac{T_0}{T_d} \approx \frac{2,735}{4000}$, où T désigne la température de corps noir du rayonnement de fond cosmologique (T_0 aujourd'hui, T_d au temps du découplage estimé à environ $4000°K$). Mais cette équation présuppose, comme hypothèse supplémentaire, que le rayonnement obéit à la loi de rayonnement de corps noir et donc que la densité de rayonnement aujourd'hui vaut $B = \rho_{r,0}(t_0) = 4,4\ 10^{-34} g/cm^3$ (la loi de corps noir semble de plus en plus confirmée par les observations).

En fait la formule (14) nous permet d'évaluer le temps $t_o - t_d$ en fonction par exemple des données H_0, A et B, ou encore des données B, Ω et H_0. Soit t_1 le moment du big-bang (pour $\epsilon \leq 0$), le modèle standard prévoit un temps $t_d - t_1$ de l'ordre de 10^{13} secondes ; nous allons voir que ces modèles d'univers approximant les modèles de De Sitter, font une prévision d'un temps $t_d - t_1$ 50 fois plus élevé, de l'ordre de 10 à 30 millions d'années. Mais cela nécessite l'étude de l'univers de rayonnement précédant le moment du découplage rayonnement-matière.

Le temps primordial et les fluctuations du rayonnement cosmologique

a- A partir de H_o et Ω donnés, construisons la métrique d'univers isotrope, univers de matière (de densité A aujourd'hui) et de rayonnement (de densité $B = 4.4 * 10^{-34} g/cm^3$ aujourd'hui).

Soit z le redshift, exprimons en fonction de z l'âge $t(z)$ (en utilisant toujours, la formule (14)), et en utilisant d'autres formules évidentes, le rayon de courbure $R(z)$, la valeur du paramètre de Hubble $H(z)$, les densités de matière $\rho_{mat}(z)$ et de rayonnement $\rho_{ray}(z)$.

b- En prenant le redshift $z = z_d = 1500$ correspondant au moment du découplage rayonnement-matière, calculons H_d, t_d, R_d, $\rho_{mat,d}$ et $\rho_{ray,d}$, dans des notations évidentes.

c- Avant ce moment t_d, la métrique traduit un univers de rayonnement ; nous allons la calculer en faisant un **recollement des métriques au moment** t_d.

Il est immédiat d'intégrer les équations d'Einstein pour un modèle de rayonnement pur, en utilisant bien sûr l'interprétation du tenseur impulsion-énergie dans un repère localement inertiel. La fonction $R(t)$ de la métrique est de la forme $R(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$. En imposant d'une part un recollement au moment t_d de classe $\mathcal{C}^\infty$, d'autre part que le moment du big-bang soit le temps $t_1 = 0$, on obtient les valeurs des constantes α et β (γ étant nul). Considérons alors l'évolution, en remontant vers le temps 0 du big-bang, des différentes quantités rayon de courbure, densité, température, temps ; la première de ces quantités qui atteint la valeur de Planck est la densité (ou-et la température). **Le temps correspondant n'est pas le temps de Planck, c'est le temps que nous noterons $t_{début}$ qui numériquement s'avère être de l'ordre de $10^{-13} s$..**

d- Prenons en compte l'incertitude de Planck sur ce temps $t_{début}$, et utilisons un calcul de propagations des fluctuations liées à cette incertitude par la méthode perturbative des métriques. Une fluctuation de densité au temps $t_{début}$ définie par $(\rho(t_{début}) - (\rho(t_{début} + t_{Planck}))/\rho(t_{début})$ est de l'ordre de 10^{-29}. D'après la méthode perturbative, une telle fluctuation est appelée soit à disparaître, soit à évoluer. **Au moment t_d du découplage les fluctuations de densités restantes (calculées numériquement) sont alors de**

l'ordre de 10^{-6} **!.**
Résultats numériques :
Tableau des âges :

H_o	Ω	$\hat{A}ge\ de\ l'univers$	$\hat{A}ge\ du\ découplage$	$\hat{A}ge\ au\ début$
$75km/s/Mpc$	0.6	$t_o = 17.3\ 10^9 ans$	$t_d = 13.7\ 10^6 ans$	$t_{début} = 0.32\ 10^{-13} s.$
$85km/s/Mpc$	0.7	$t_o = 16.6\ 10^9 ans$	$t_d = 13.9\ 10^6 ans$	$t_{début} = 0.35\ 10^{-13} s.$
$55km/s/Mpc$	0.3	$t_o = 19.9\ 10^9 ans$	$t_d = 14.2\ 10^6 ans$	$t_{début} = 0.25\ 10^{-13} s.$

Tableau des fluctuations de densité (et de température) :

H_o	Ω_o	$Fluctuation\ en\ t_{début}$	$Fluctuation\ en\ t_d$
$75km/s/Mpc$	0.6	$1.7\ 10^{-29}$	$3.2\ 10^{-6}$
$85km/s/Mpc$	0.7	$1.5\ 10^{-29}$	$2.4\ 10^{-6}$
$55km/s/Mpc$	0.3	$2.2\ 10^{-29}$	$6.9\ 10^{-6}$

Remarque : Dans le modèle standard, la pression de radiation empêche le développement des perturbations avant la période d'équilibre matière- radiation (à environ $z = 10^4$). Ce n'est pas le cas pour les modèles du type De Sitter, du fait de l'existence d'une pression purement gravitationnelle qui est négative.
A partir des fluctuations de Planck au début de l'univers, on retrouve les observations faites sur les fluctuations de température du rayonnement de fond cosmologique ; ces fluctuations sont peu sensibles à la valeur de la constante de Hubble, mais sont de l'ordre de 10^{-5} si Ω est petit et de l'ordre de 10^{-6} si Ω est proche de l'unité. Cependant la méthode perturbative utilisée est une méthode approchée et peut-être un peu simpliste dans la mesure où nous avons une métrique ne traduisant que la structure de rayonnement de l'univers avant le moment du découplage, sans tenir compte des propriétés particulières qui peuvent caractériser de manière plus réaliste l'évolution du contenu primordial de l'univers.
Rappelons que pour les modèles d'univers basés sur l'interprétation en termes de co-densité et de co-pression du tenseur impulsion-énergie, modèles que nous utilisons ici, il n'y a pas de problème d'horizon et donc le rayonnement de fond cosmologique est isotrope (à ces fluctuations près).
On peut étudier également l'évolution de la dimension des fluctuations primordiales ; au moment du découplage, le rayon d'une fluctuation est de l'ordre du mégaparsec, autrement dit du même ordre de grandeur que le rayon de courbure de l'univers. Il serait sans doute intéressant d'appliquer à nouveau une méthode perturbative après le moment du découplage pour étudier le devenir de ces fluctuations jusqu'aujourd'hui, ce qui nous donnerait l'échelle d'homogénéité de l'univers aujourd'hui. Il est évident que si certaines perturbations se propagent de manière comobile, elles auraient aujourd'hui une dimension de l'ordre du rayon de courbure, donc de l'ordre de $5000Mpc$.
Conclusion : Ces premiers résultats qui collent particulièrement bien aux observations actuelles, ouvrent une voie prometteuse pour "expliquer" les fluctuations du rayonnement

fossile.

Distance temporelle et redshift.

Calculons la distance (temporelle) d'un objet observé aujourd'hui, objet dont on connaît le redshift. On a $1+z=\frac{1}{\nu}=\frac{R(t_0)}{R(t_e}$, où t_e désigne le moment de l' émission par l'objet d'un signal photonique reçu aujourd'hui.

La formule de base (14) s'écrit :

$$(19) \qquad t_0 - t_e = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega}} Log(\frac{1+\frac{B}{2A}+\sqrt{\frac{1}{\Omega}}}{\nu+\frac{B}{2A}+\sqrt{\frac{1}{\Omega}-1-\frac{B}{A}+\nu(\nu+\frac{B}{A})}}).$$

Cette formule exacte s'applique en particulier pour les grands redshift ($z \geq 1$), par exemple pour les quasars, si leur décalage spectral est d'origine essentiellement cosmologique. A ce propos, rappelons que le redshift mesuré, noté z_o, provient de trois causes différentes : le décalage spectral d'origine purement gravitationnel, noté z_g, associé à l'attraction de l'objet astral, le décalage spectral aléatoire, causé par le déplacement (aléatoire) de cet objet par rapport au système de coordonnées comobiles, noté z_a, et le redshift d'origine cosmologique, provenant de l'expansion de l'univers et noté z_c ; Ces différents redshifts étant reliés par la formule : $1+z_o=(1+z_g)(1+z_a)(1+z_c)$. Comme z_g et z_a sont très petits, nous les négligerons pour les grands z_c.

Comparons les distances temporelles avec celles obtenues dans le cadre du modèle standard.

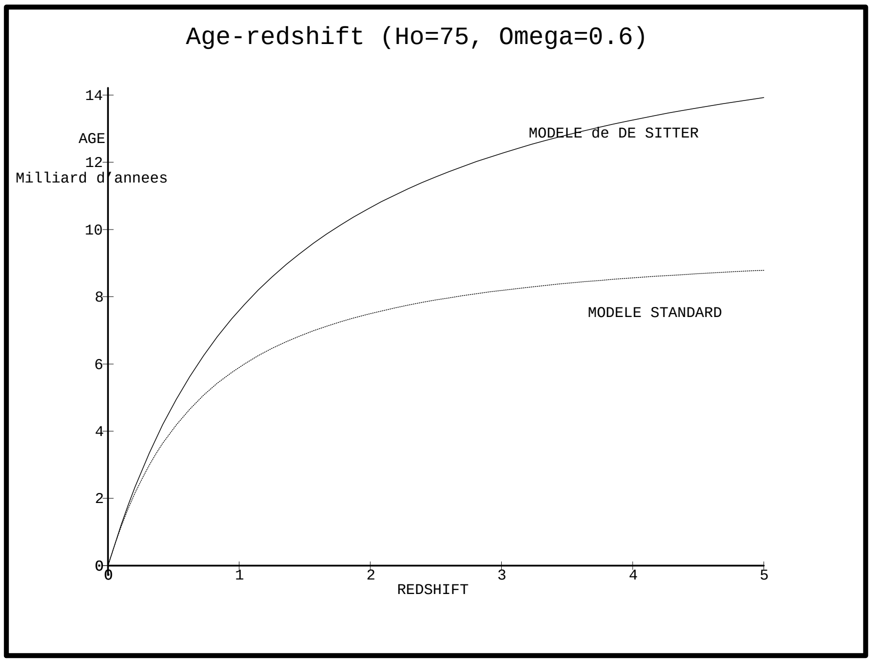


Figure 8.4 : dès un redshift de l'ordre de 1, les prévisions de distances faites par les deux modèles sont très différentes.

Sur la confrontation aux observations.

Nous avons fait le choix de prendre $H_0 = 75$ et $\Omega = 0.6$ dans la figure précédente. Ce choix est évidemment un peu arbitraire. En effet, la densité de matière comobile est très mal connue ; la matière visible, actuellement repérée, conduit à une valeur de $A = \rho_{m,0}(t_0)$ comprise entre $10^{-31} g/cm^3$ et $10^{-29} g/cm^3$.

De même une incertitude plane sur le paramètre de Hubble H_0 ; sa valeur mesurée varie du simple au double suivant les écoles, de 50km/s/Mpc à 100km/s/Mpc ; la "moyenne" de ces mesures en 1993 est d'environ 75km/s/Mpc.
Quand au paramètre de décélération q_0, il n'est actuellement pas susceptible d'une mesure observationelle précise ; aussi est-il l'objet d'actes de foi.

Cependant, pour l'âge de l'univers, il semblerait souhaitable qu'il soit plus grand que l'âge des plus anciens objets observés (des amas globulaires auraient un âge de l'ordre de $15\ 10^9$ années) ; et il devrait aussi laisser un temps suffisamment grand pour expliquer la formation des galaxies, après le découplage matière-rayonnement.

Aussi avons-nous pris pour les illustrations, la valeur moyenne de $75 km/s/Mpc$ pour le paramètre de Hubble et un paramètre de densité Ω de 0.6, ce qui donne un âge de l'univers de

$$17,3\ 10^9 \quad ans.$$

Avec ces mêmes valeurs des paramètres de Hubble et de densité le modèle standard (sans constante cosmologique) prédit un âge pour l'univers de seulement $9,5\ 10^9 \quad ans$!

Distance luminosité et distance angulaire.

Nous allons comparer les prévisions faites par le modèle standard et le modèle de De Sitter.

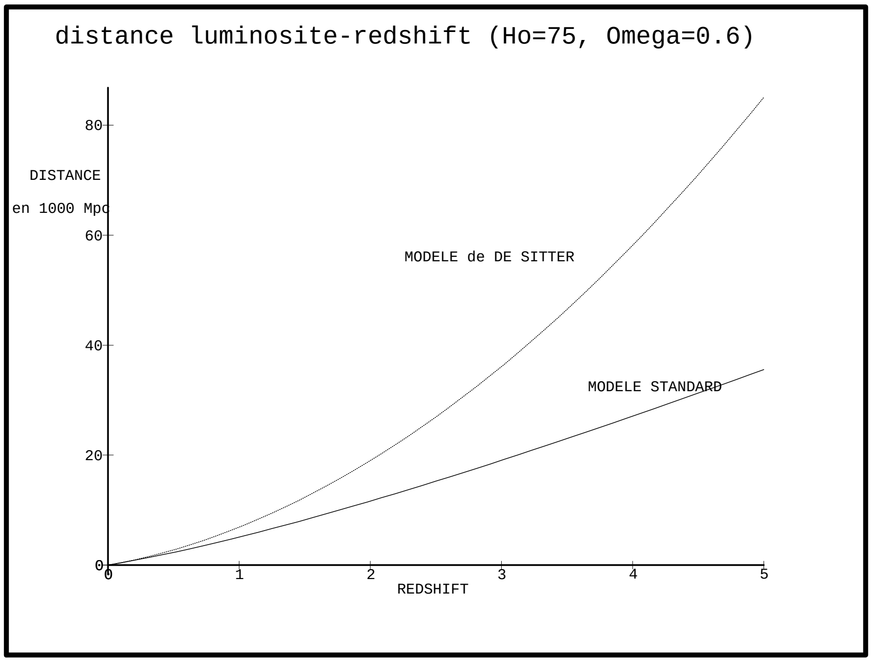


Figure 8.5 : Pour un redshift de 5, les modèles donnent une prévision de distance variant du

simple au double. Cela a de l'importance pour l'étude d'objets éloignés comme les quasars.

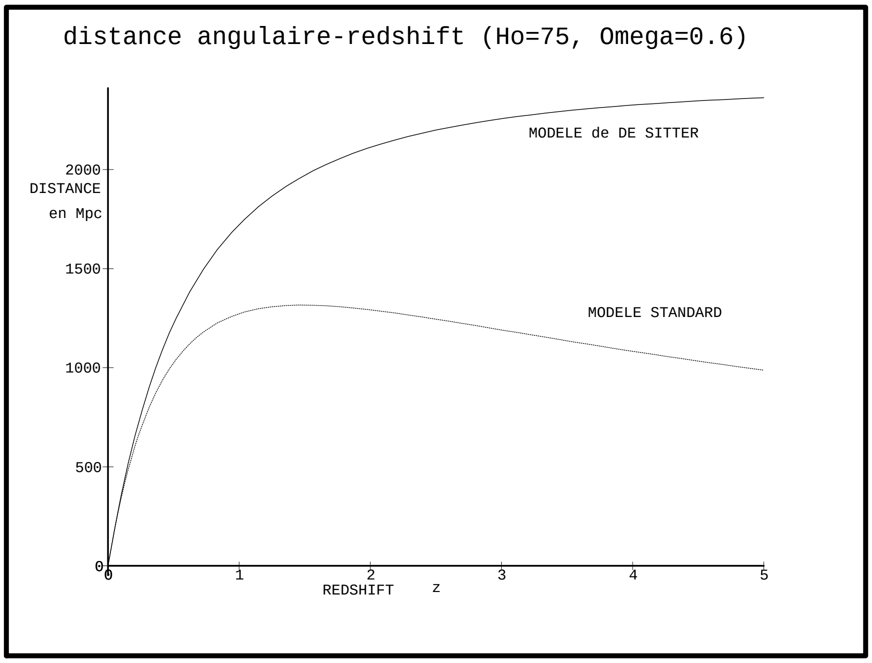


Figure 8.6 : Mise en évidence de la divergence des valeurs de la distance angulaire données par les modèles. Remarquer la décroissance prévue par le modèle standard.

Premières conclusions : Sur la base d'une interprétation locale du tenseur impulsion énergie, on peut construire des modèles d'univers expliquant les observations actuelles et ayant un âge aussi grand que l'on veut.

Rappelons brièvement les avantages de ces modèles de De Sitter, par rapport au modèle standard.

- Un âge de l'univers plus grand que celui des plus vieux objets qu'il contient, et ce quelque soit la valeur du paramètre de Hubble.
- L'isotropie du rayonnement de fond cosmologique, autrement dit pas de problème d'horizon cosmologique.
- Les fluctuations du rayonnement de fond proviennent des fluctuations primordiales, et ce sans recourir à une période inflationnaire.
- Une distance angulaire toujours croissante avec le redshift.
- Le non-mystère de la constante cosmologique qui traduit simplement la densité de matière comobile.
- Une formule théorique, la formule (14) applicable facilement à tous les redshift.
- La stabilité des modèles par rapport aux conditions initiales.
- L'existence d'une pression purement gravitationnelle (nous montrerons plus loin l'importance de cette pression qui permet de définir le concept de rayon d'attraction d'une sur-densité locale).

C'étaient les conclusions écrites en 1993 dans un polycopié (preprint de l'université Lyon1).

Où en sommes-nous en 2001 ?

- De nombreuses mesures sur la valeur du paramètre de Hubble réduisent la fourchette : 50km/s/Mpc $\leq H_o \leq$ 80km/s/Mpc ; et la "moyenne" de ces mesures est en 2001 de 65km/s/Mpc ou 70km/s/Mpc suivant les auteurs ; il existe énormément d'études à ce propos voici une référence récente, celle de Hendry, Rauzy et autres. Pour en savoir plus sur les différentes méthodes utilisées par les astronomes pour évaluer H_0, nous renvoyons à Fukugita (2000), à Freedmann (1999) ou encore à un compte rendu d'un colloque qui s'est tenu à l'université de Strasbourg en 1997 : (cf. la page "how far can you go ?" du site de l'université de Strasbourg http ://astro.u-strasbg.fr/howfar97.html). En voici une synthèse en un tableau : La "moyenne" de ces valeurs obtenues par des méthodes "clas-

Nature du test	Ho	Remarques
diamètre des galaxies	52 +- 6 +- 8	incertitudes +- incertitudes locales
relation de Tully-Fisher	55 +- 5	sans les corrections liées à "Hipparcos"
relation de Tully-Fisher	49 +- 6	avec les corrections lées à "Hipparcos"
distance de Virgo	55 +- 9	méthodes
distance de Virgo	56 +- 7	indépendantes
supernovae	58 + 7 -8	utilisation des céphéides
sosies d'Andromède	53 +-8	avec la relation de Tully-Fisher

siques" en 1997, est Ho=54 + - 9. (cette "moyenne" n'a aucun sens mathématique). Il existe de nouvelles méthodes peu précises pour le moment comme celle basée sur l'effet "lentille gravitationnelle" ou sur l'effet "Sunyaev-Zel'dovich". Et puis il y a le problème des biais possibles pour chacunes des méthodes et le problème des incertitudes sur les indicateurs primaires de distances (céphéides). Toujours est-il qu'en quelques années, la précision sur la valeur de Ho s'est considérablement accrue.

- Les observations sur les fluctuations du rayonnement cosmologique confirment la valeur de 10^{-5} de celles-ci. Mais les explications de ces fluctuations restent basées sur les modèles à scénario inflationnaire !

- Le plus important fut les observations faites sur les supernovae à partir de 1997 (cf. Perlmutter, Riess), qui amenèrent une crise dans le milieu des cosmologistes : ces observations montrent que l'expansion de l'univers est en accélération.

Conséquence un retour en force de la constante cosmologique dans le "modèle standard" actuel, pour tenir compte de ces observations, cette constante exprimant une énergie du vide (?) et vérifiant, pour tenir compte de l'inflation (?), la relation $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$. Cette relation est évidemment ad hoc, et ne permet pas de comprendre la constante cosmologique. Soyons plus précis, Ω_Λ est constant au cours du temps alors que Ω_m est décroissante, car traduisant une densité de matière, donc ce modèle tend vers celui de De Sitter, dont on a vu au chapitre précédent qu'il admettait trois formes de Robertson-Walker ; ainsi pourquoi aujourd'hui aurait-t-on $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$, i.e. un univers dont la partie espace est plate ? cette platitude ne repose sur aucun principe physique ; elle ne repose que sur la soit-disant

necessité d'une période inflationnaire au début de l'univers ; l'erreur ici provient du fait qu'une période inflationnaire n'est traduite qu'à l'aide d'un modèle avec une partie espace plate.
Note à propos des interprétations des résultats des expériences "Cobe", "Maxima" et "Boomerang" concernant le rayonnement de fond cosmologique. De nombreuses analyses des paramètres cosmologiques à partir de ces observations, aboutissent au même type de résultat : $\Omega_\Lambda + \Omega_m \approx 1$. Mais ces études se font toujours dans le cadre de modèles inflationnaires (et la partie espace est supposée plate, autrement dit $\Omega = 1$). Rien d'étonnant alors de retrouver à l'issue d'études statistiques sur les données brutes, le résultat ci-dessus. Tout se passe comme si (en caricaturant à peine) on faisait le raisonnement suivant : prenons une hypothèse (en l'occurence le cadre inflationnaire), et à partir de cette hypothèse prise comme axiome, montrons le théorème "cette hypothèse est vraie" !
- Cette crise amène les milieux cosmologistes à faire des tas de publications du type "à celui qui justifiera au mieux" la nécessité de réintroduire la constante cosmologique, attribuant la signification de cette constante à une mystérieuse énergie du vide (ou de matière exotique), mais ne revenant pas sur la problématique interprétation du tenseur impulsion-énergie dans des coordonnées comobiles qui ne sont pas localement inertielles. Les géométries non-euclidiennes sont effectivement abstraites et comme dit S. Weinberg : "Indeed, this accuracy is so demanding that it is necessary to specify whether one is dealing with standard, isotropic, or harmonic coordinates ; needless to say, the U.S. Naval Observatory does not usually draw such fine distinctions !".
Dans ce nouveau cadre standard ($\Omega_\Lambda + \Omega_m \approx 1$), les observations des astronomes mènent aux valeurs suivantes : $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ et $\Omega_m \approx 0.3$. Ce nouveau cadre est noté ΛCDM dans la littérature, l'ancien étant noté $OCDM$ (comme open cold dark matter).
Par ailleurs l'univers doit être plus âgé que notre Voie Lactée ; en ce domaine il y a eu bon nombre d'observations. Un accord s'établit sur l'âge des vieux amas globulaires, de 11 à 14 milliards d'années d'après Freedman, de 12 à 15 milliards d'années d'après Fukugita. Une étoile vient d'être datée par radio-éléments, elle aurait de 10 à 15 milliards d'années. Ainsi notre Voie Lactée serait âgée d'au moins 12 à 16 milliards d'années, ce qui donne une contrainte forte.
Une autre forte contrainte vient des observations faites sur les vieilles galaxies très éloignées (au redshift de 1.5 environ), celles-ci montrent qu'elles contiennent des étoiles de 3 à 4 milliards d'années (cf. astro-ph/0201056).
J'espère que dans un proche avenir, lorsqu' il sera enfin pris en compte que $\Omega_\Lambda = \Omega_m$ (i.e. cette fois m exprimera une Codensité et non plus une densité), alors les milieux cosmologistes sortiront une littérature abondante du type "à celui qui justifiera au mieux" qu'il n'y a plus de mystère concernant la constante cosmologique. Et on nous annoncera qu'à une incertitude sur les mesures près, on aura :

$$0.3 \leq \Omega_\Lambda = \Omega_m \leq 0.7.$$

Nous pourront alors lire dans les articles spécialisés et de vulgarisation :

* L'univers est âgé (de 17 à 25, milliards d'années), en tout cas plus âgé que les plus vieux objects astronomiques observés.

* Il est montré l'existence d'une pression gravitationelle pure (négative) et le concept de rayon d'attraction du système solaire, d'une galaxie ou d'un amas de galaxie est maintenant confronté aux observations. (Et on aura même droit à l'explication des énomes zones de vides constatées aujourd'hui par les astronomes).

* Une explication simple est fournie de l'isotropie du rayonnement de fond cosmologique et de l'origine de ses petites fluctuations (en lien avec l'aspect déjà quantique de la gravitation ?).

* ...

* Sur le plan théorique, on nous dira que le "facteur d'échelle" $R(t)$ est simple (on ne dira cependant pas que c'est le "rayon périmétrique" de l'univers).
On oubliera de parler des modèles inflationnaires qui tomberont dans l'oubli (sinon pour nous dire que l'univers est et a toujours été dans une phase inflationnaire, je vois déjà les titres accrocheurs pour parler des modèles accélérés que sont ceux de De Sitter). Quand à la stabilité des modèles vis à vis des conditions initiales, cela restera l'affaire des spécialistes. Un grand pas aura alors été franchi concernant la modélisation de l'univers, dans le respect de la théorie d'Einstein.

Formulaire récapitulatif pour ces modèles d'univers

A partir de H_o et Ω_o donnés et de la densité de rayonnement (de densité $B = 4.4\,10^{-34} g/cm^3$ aujourd'hui), on construit la métrique d'univers isotrope, univers de matière (de densité A aujourd'hui).
Soit z le redshift d'un objet observé, nous exprimons en fonction de z le moment $date(z)$ après le début de l'univers de l'émission du signal reçu aujourd'hui avec un redshift de z, les distances temporelle $d_t(z)$, luminosité $d_l(z)$ et angulaire $d_a(z)$ de cet objet ; le rayon de courbure $R(z)$, la valeur du paramètre de Hubble $H(z)$, les densités de matière $\rho_{mat}(z)$ et de rayonnement $\rho_{ray}(z)$, du paramètre de deccélération $q(z)$, le paramètre de densité $\Omega(z)$, etc.

$$A = \frac{3}{8\pi G} H_o^2 \Omega_o \quad et \quad \rho_{mat}(z) = (1+z)^3 A$$

$$B = 4.4\ 10^{-34} g/cm^3 \quad et \quad \rho_{ray}(z) = (1+z)^4 B$$

Posons $a = \sqrt{{\Omega_o}^{-1} - 1 - \frac{B}{A}}$

$$date(z) = \frac{1}{H_o\sqrt{\Omega_o}} \ln\left(\frac{\frac{1}{1+z} + \frac{B}{2\,A} + \sqrt{a^2 + (\frac{1}{1+z} + \frac{B}{A})\frac{1}{1+z}}}{\frac{B}{2\,A} + a}\right)$$

$$d_t(z) = \frac{1}{H_o\Omega_o}\frac{1}{1-\frac{B^2}{4A^2a^2}}\ ((1+z+\frac{B}{2Aa^2}) - (1+\frac{B}{2Aa^2})\ \sqrt{1+(1-\Omega_o)z(2+z) - \Omega_o\frac{B}{A}z(1+z)})$$

$$d_l(z) = (1+z)^2\ d_a(z) = (1+z)\ d_t(z)$$

$$H(z) = H_o\sqrt{\Omega_o}\sqrt{1 + \frac{B}{A}(1+z) + a^2(1+z)^2}$$

$$\Omega(z) = \Omega_o \frac{H_o^2}{H(z)^2}$$

$$R_o = \frac{c}{H_o\sqrt{\Omega_o}\ a} \quad et \quad R(z) = \frac{R_o}{1+z}$$

$$q_o = -\Omega_o(1+\frac{B}{2A}) \quad et \quad q(z) = -\Omega(z)(1+\frac{B(1+z)}{2A})$$

Pour obtenir le comportement futur il suffit de remplacer $1+z$ par $\frac{1}{1+z}$, (i.e. faire varier z de 0 à -1).

On peut encore écrire la métrique d'univers au moyen de la variable z du redshift :

$$(1+z)^2\ \frac{H_o^2\Omega_o}{c^2}\ ds^2 = \frac{dz^2}{(1+z)^2(a^2+\frac{1}{1+z}(\frac{1}{1+z}+\frac{B}{A}))} - \frac{1}{a^2}(d\alpha^2 + sh(\alpha)^2 d\omega^2)$$

Enfin notons l'invariant cosmologique mis en évidence :

$$\Omega(z)H(z)^2 = \Omega_o H_o^2 = constante.$$

Modèle sans rayonnement de fond cosmologique.

Pour obtenir les modèles d'univers sans rayonnement, il suffit de poser $B = 0$, dans toutes les formules de l'étude précédente, notamment en utilisant la formule (14), dès que celle ci a un sens, qui s'écrit :

$$e^{H_0\sqrt{\Omega}(t_r-t_e)} = \frac{\nu_r + \sqrt{\frac{1}{\Omega}-1+\nu_r^2}}{\nu_e + \sqrt{\frac{1}{\Omega}-1+\nu_e^2}}.$$

où ν_e est le taux d'amortissement de fréquences du signal lumineux émis au temps t_e, signal reçu avec le taux ν_r au temps t_r.

Du fait que B/A est très petit dans le modèle avec radiation, les courbes, dans le modèle sans radiation seront quasiment les mêmes (sauf évidemment celle concernant le découplage rayonnement-matière), à la différence près de la présence d'une asymptote verticale, pour $\epsilon = 0$, remplaçant un pic fini dans la figure 8.1.

Cas particulier : Si la partie espace est plate ($\epsilon = 0$), alors l'équation des contraintes aujourd'hui s'écrit

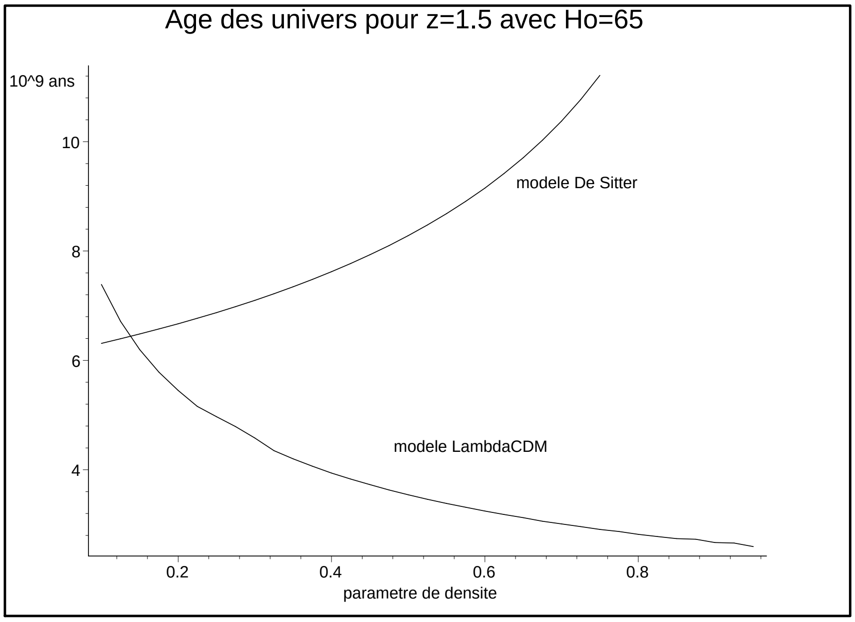
$$(20) \quad H_0^2 = \lambda^2 = \frac{8\pi G A}{3}\ ,$$

formule qui relie la valeur de la constante de Hubble à la densité de matière comobile. Il n'y a aucune raison, me semble-t-il, pour qu'une telle relation existe. Cependant ce cas très particulier correspond au **modèle d'univers de Hoyle**, mais avec une interprétation nouvelle, car il est sans création de matière, éternel avec un "big-bang" rejeté à l'infini passé.

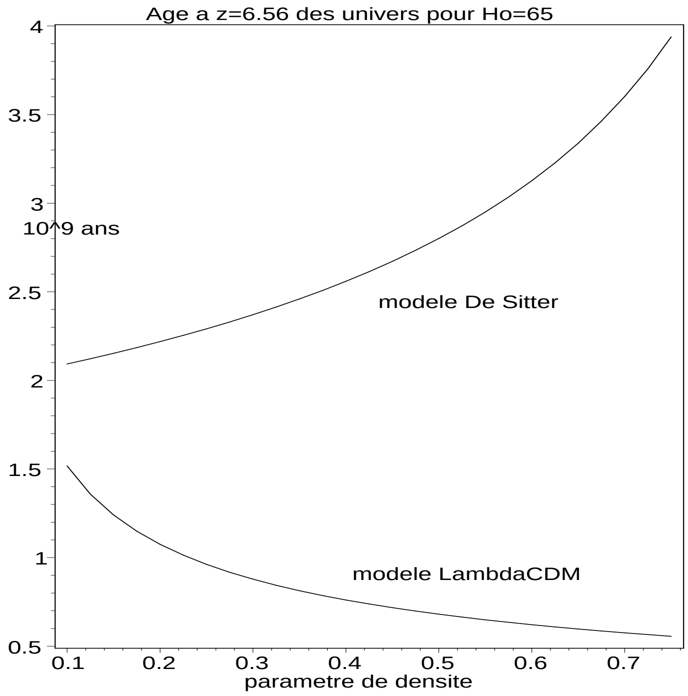
N'imposons plus la relation (20), alors le modèle de Hoyle se situe dans une famille de modèles, famille paramétrée par le carré de la courbure de la partie espace aujourd'hui : $R^2(t_0) = \frac{\epsilon c^2}{\frac{8\pi G}{3}A - H_0^2}$, où $\epsilon = signe(\frac{8\pi G}{3}A - H_0^2)$.

Cette famille de modèles possède le groupe de De Sitter comme groupe d'invariants, comme le modèle de Hoyle. Elle permet une plus grande adaptation aux observations, en particulier on n'a pas la contrainte (20) qui s'interprète comme le fait que la densité de matière est exactement la densité critique.

Comparaisons entre le nouveau standard ΛCDM et les modèles de De Sitter. Après la crise de 1998-2000, avec les observations des supernovae, et la réintroduction de la constante cosmologique, voici quelques figures permettant de comparer ce nouveau "paradigme" standard ΛCDM et la fammille des modèles de De Sitter.
Nous utiliserons à ces fins, la valeur $H_o = 65$ ou la tranche $60 \leq H_o \leq 75$. Pour la densité comobile Ω_Λ, nous utiliserons la tranche $0.4 \leq \Omega_\Lambda \leq 0.8$, cela suivant les valeurs d'une part associées à l'étude des supernovae, d'autre part à celle des radio galaxies (cf. par exemple Guerra et autres, astro-ph/0006454 qui justifie pleinement la famille des modèles de De Sitter).
Regardons l'âge de l'univers pour ces modèles ΛCDM et de De Sitter correspondant à un redshift $z = 1.5$; en effet plusieurs études ont montrés qu'à ce redshift des galaxies (très éloignées donc) abritent des étoiles ayant au moins 3 milliards d'années sans doute même 4 (cf. astro-ph/0201056). Les modèles doivent donc prévoir un âge de l'univers d'au moins 4 milliards d'années, ce qui est contraignant pour les modèles ΛCDM. La figure ci-après montre que pour Ho de l'ordre de 65km/s/Mpc, il y a peu de matière ($\Omega_o \leq 0.4$) ; par contre dans le cadre de De Sitter, les galaxies vues à $z = 1.5$, ont eu du temps pour se former.



l'âge pour un redshift de z=6.56.
Calculons maintenant l'âge d'un objet, une galaxie qui vient d'être observée à un redshift de 6.56 (cf. Hu et autres) ; calculons son âge pour $H_0 = 65$ en fonction de Ω.
Sur la figure ci-contre il apparaît que le modèle ΛCDM prévoit une formation de cette galaxie à une époque tellement jeune de l'univers que l'on est conduit à se poser des questions sur ce nouveau modèle standard.



Note : pour le tracé des courbes, la formule simple à utiliser est classique. Soit Ω_o le paramètre de densité de matière dans les cadres ΛCDM et $OCDM$, Ω_Λ le paramètre de densité associé à la constante cosmologique, Ω_k le paramètre de densité de courbure défini par $\Omega_k = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_o$, alors l'âge d'un objet observé à un redshift de z est : $t = H_0^{-1} \int_0^{1/(1+z)} \frac{x\ dx}{\sqrt{\Omega_k x^2 + \Omega_o x + \Omega_\Lambda x^4}}$.
Si on note Ω_m le paramètre de densité de la matière observée aujourd'hui alors on obtient chacun des modèles suivants en posant :
- pour $OCDM$, $\Omega_o = \Omega_m$ et $\Omega_\Lambda = 0$;
- pour ΛCDM, $\Omega_o = \Omega_m$ et $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$;
- pour De Sitter, $\Omega_\Lambda = \Omega_m$ et $\Omega_o = 0$.

Nous avons négligé dans ces formules le paramètre de densité de radiation Ω_{rad}, mais cela ne modifie pas fondamentalement les résultats (sauf pour les redshifts z plus grand que 1000). Et puis beaucoup d'astrophysiciens construisent des modèles avec un fluide de "matière exotique" de paramètre de densité Ω_{exo} en plus ; pour en tenir compte dans ces formules on introduit le coefficient w défini comme le rapport de l'énergie de matière sur l'énergie de pression de ce fluide, et on note $\Omega_{exo} = \Omega_w$. Cette notation est pratique également pour la matière usuelle et pour la radiation. Par exemple dans le cadre standard, $\Omega_{rad} = \Omega_{1/3}$, $\Omega_m = \Omega_0$ et dans le cadre de De Sitter, $\Omega_{rad} = \Omega_{-2/3}$, $\Omega_m = \Omega_{-1}$. Ainsi si on note par Ω_{w_i} pour i variant de 1 à n, chacun des paramètres de densité des n composantes d'un fluide cosmique, en posant $\Omega_k = 1 - \Sigma_1^n \Omega_{w_i}$, alors l'âge d'un objet observé à un redshift de z est (dans le modèle correspondant) : $t = H_0^{-1} \int_0^{1/(1+z)} \frac{x\ dx}{\sqrt{\Omega_k x^2 + \Sigma_1^n \Omega_{w_i} x^{1-3w_i}}}$.
Au vu des observations il est évident que ce n'est pas la valeur du paramètre de Hubble H_o qui va départager les modèles, mais bien celui du paramètre de densité de matière comobile Ω_m très mal connu : on a seulement l'estimation grossière $0.1 \leq \Omega_m \leq 0.9$. En tout cas

quelque soit la valeur de ce paramètre, le modèle de De Sitter sera valide, ce qui n'est pas le cas des modèles ΛCDM et $OCDM$.

Encore des pas sur ce trajet de la confrontation aux observations
Si la confrontation aux observations d'une part, les propriétés théoriques des modèles développés d'autre part, expliquent les grands problèmes que le modèle standard ne peut prendre en compte, il en reste cependant plusieurs à étudier.
Parmi les principaux restants, il faut signaler celui de l'abondance des éléments primordiaux (deutérium, hélium, etc.) ; il faut signaler également celui de la répartition des quasars en lien avec celui des lentilles gravitationnelles. De fait ces problèmes se posent de manière entièrement renouvelée au vu des propriétés des modèles de De Sitter, en particulier si l'on considère celles des distances comme fonctions du redshift. Il existe une vaste littérature sur les problèmes que posent les modèles d'univers ; voir par exemple G.F.R. Ellis [6] qui les aborde avec son regard de relativiste et J. C. Pecker [7] ou G. Burbidge [8] avec leur sensibilité d'astronome.
Nous allons maintenant aborder le plus gros problème restant, qui n'est autre que celui appelé "problème de la masse manquante", problème étroitement lié à celui de l'évaluation du paramètre Ω_m.

Bibliographie :
[1] S. Weinberg : Gravitation and cosmology ; John Wiley, New-York(1972).
[2] A. Coley et R. Tavakol : "Fragility in Cosmology" ; G.R.G. vol 24 n^o8, (1992).
[3] J.M. Souriau : "Un modèle d'univers confronté aux observations" in Dynamics and processes, Lecture notes in Mathematics, n^o1031, Springer-Verlag, Berlin (1981).
[4] S. Perlmutter et autres : Measurements of Omega and Lambda from 42 Redschift-High Supernovae ; Astrophysical Journal, Vol 516 n°2, (1998).
[5] A.G. Riess et autres : Observational evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant ; AJ, Vol 116, p.1009, (1998).
[6] G.F.R. Ellis : Relativistic cosmology : its nature, aims and problems ; dans "General relativity and gravitation" (G.R. 10) ; Reidel (1984).
[7] J.C. Pecker : Difficulties of standard cosmologies ; dans "New ideas in astronomy" (1987).
[8] G. Burbidge : "The scale of the universe" in "Physical cosmology" Ed. Frontières Paris (1991).
M.A. Hendry, S. Rauzy, S.P. Goodwin et J. Gribbin : A robust method for measuring the Hubble parameter ; MNRAS Vol.324(3), p. 717, (2001).
M. Fukugita : The global cosmological parameters ; astro-ph/0005069, (2000).
W.L. Freedman : The Hubble constant and the expansion age of the universe ; astro-ph/9909076, (1999).
E. Guerra, R. Daly, L. Wan : Global cosmological parameters determined using classical double radio galaxies ; astro-ph/0006454, (2000).
E.M. Hu et autres : A redshift z=6.56 galaxy behind the cluster Abbel 370 ;
astro-ph/0203091, (2002).