Chapitre 8 bis
Modèle d'univers
Les problèmes de masse manquante

Michel Mizony

* Institut Girard Desargues (CNRS UMR 5028), Université Lyon 1

Introduction

Dans la mesure où il existe une pression gravitationelle pure, les différents problèmes de masse manquante se pose de manière différente et en particulier cette pression (négative) met en évidence l'existence d'un bassin d'attraction associée à toute surdensité locale ; c'est ce que nous verrons dans une deuxième partie de ce chapitre après avoir examiné le problème de la platitude des courbes de rotations de galaxies spirales. Je voudrais cependant dire d'emblée que la méthode actuellement utilisée, dite des sphéroïdes applaties, pour calculer la masse d'une galaxie à partir de la connaissance observationnelle de sa courbe de rotation est une imposture (le mot est très mesuré dans la mesure où l'erreur mathématiques sous-jacente est considérée comme grave pour un étudiant de Deug !). Qui ose encore utiliser une intégrale d'une fonction non absolument convergente sans un minimum de précautions, en particulier lors d'un passage à la limite ? pour les spécialistes la version géométrique serait de dire peut-on utiliser le théorème de Gauss dans le plan ? L'ennui est que cette erreur mathématique conduit à la croyance en un halo massif englobant les galaxies, halo massif toujours vainement recherché par les astronomes.
sur le plan théorique, nous donnerons différentes formes locales d'une métrique d'univers, en particulier la forme locale post-newtonnienne, qui sera utile pour étudier la dynamique créé par une surdensité locale dans un univers non vide et mettre en évidence le concept de rayon d'attraction d'une telle surdensité.

Les problèmes de masse manquante

Les différents problèmes de masse manquante sont résumés au moyen du tableau classique (indicatif) suivant qui donne l'ordre de grandeur du paramètre de densité Ω en fonction de l'échelle des observations.
$\Omega_{vis} \leq 0.01$ associée à la matière visible,

$\Omega_{halo} \leq 0.1$ associée à la dynamique des galaxies,
$\Omega_{amas} \approx 0.2,\ 0.3$ associée à la dynamique des amas,
$\Omega_{lss} \approx 0.8 \pm 0.5$ associée aux grandes structures. (lss comme large scale structures).
Enfin beaucoup de cosmologistes voudraient (pour des raisons très diverses) que $\Omega = \Omega_{univers}$ soit exactement égal à 1 !
Il ne sera pas question de résoudre tout ces problèmes de masse manquante, mais de mieux les poser.
Nous avons déjà vu qu'à l'échelle de l'univers le problème de la détermination de $\Omega = \Omega_{univers}$ en fonction de H_0 et de l'âge t_0 de l'univers, se pose de manière très différente suivant les modèles, cf. la figure 8.2. Dans le modèle standard, noté OCDM dans la littérature (open cold dark matter), pour que l'univers soit plus âgé que les amas globulaires les plus vieux, il faut que non seulement H_0 soit plus petit que 60 km/s/Mpc, mais encore que Ω soit petit, de fait $\Omega \leq 0.1$.
Dans le modèle de De Sitter par contre l'âge de l'univers augmente avec Ω. En fait la seule contrainte que l'on ait pour que l'univers soit plus âgé que les objets les plus vieux qu'il contient, est une borne inférieure pour Ω en fonction de H_0 ; par exemple pour $H_0 = 75$, il faut $\Omega \geq 0.5$.
Pour ce qui concerne le nouveau modèle standard avec une constante cosmologique, noté ΛCDM, on a une situation intermédiaire. En clair le problème de masse manquante ne se pose pas à l'échelle de l'univers pour ce nouveau modèle standard ΛCDM, ni pour les modèles de type De Sitter. Il ne reste qu'une contrainte liée à la nécessité d'un âge suffisamment grand.
Cette mise au point étant faite, les problèmes de masse cachée se manifeste au niveau des différences entre Ω_{halo}, Ω_{vis}, Ω_{amas} et Ω_{lss} donc principalement au niveau des courbes de rotations des galaxies (pour expliquer leur platitude et comprendre $\Omega_{halo} - \Omega_{vis}$) et à celui de la dynamique des amas de galaxies (pour comprendre $\Omega_{amas} - \Omega_{halo}$).
Notre but sera a priori de mieux poser ces problèmes, d'une part en utilisant le modèle d'univers que nous venons de confronter aux observations et d'autre part en tenant compte de propriétés du champ gravitationnel créé par une sur-densité locale sphérique dans un univers non-vide. A ce propos il est intéressant de noter qu'il existe de nombreux tests de la relativité générale au niveau très local du système solaire et au niveau gigantesque de l'univers; mais en dehors du phénomène de lentilles gravitationnelles, il n'y a pas de tests au niveau intermédiaire des distances astronomiques. N'est-ce pas un peu surprenant ?

I - 1. Courbes de rotation des galaxies

Les courbes de rotations de galaxies, telles qu'elles sont observées, présentent une partie "anormalement" plate, disons à partir de 10 à 15 kpc du centre d'une galaxie spirale usuelle dont on étudie les vitesses de rotations des bras spiraux. Ce fait pose une question assez cruciale, et la seule explication donnée pour le moment, est d'admettre l'existence d'un halo sphérique massif de matière englobant une telle galaxie.

Ce problème constitue une énigme fondamentale ouvrant la voie à une recherche active de "masse cachée" dans l'univers.

Nous nous proposons de montrer que :

i) Dans un cadre newtonien, le phénomène de platitude des courbes s'explique très simplement **sans recours à un éventuel halo massif** tout en faisant apparaître qu'il y a en fait moins de "masse cachée".
ii) Le traitement einsteinien de ces courbes change la manière d'aborder ce problème de masse cachée provenant des courbes de rotations des galaxies. Ceci peut paraître surprenant, dans la mesure où le champ gravitationnel créé par une galaxie est extrêmement faible, mais à une telle échelle la correction einsteinienne à la gravitation newtonienne usuelle s'avère être non négligeable. C'est ce que nous allons voir.

Rappelons la problématique observationelle : la vitesse de rotation des bras spiraux d'une galaxie spirale se fait en mesurant la différence de décalage spectrale (en général vers le rouge), entre des étoiles situées de part et d'autre de la galaxie observée et à une même distance du centre. Ce différentiel de décalage est traduit en terme de vitesse de rotation (compte tenu évidemment de l'angle d'inclinaison par rapport à la ligne d'observation depuis le système solaire).

I - 2. Courbes de rotation des galaxies traitement newtonien pour une galaxie spirale sans halo

Pour le traitement newtonien, voici le point sous la forme d'un preprint rédigé en 1997. Il y est exposé la nouvelle méthode efficace que j'ai mise au point et Dominique Méra qui étudiait essentiellement la Voie Lactée, a testé cette méthode et l'a appliquée à notre galaxie.

Rotation curves for spiral galaxies and maximal disk

Dominique Méra,[1] Michel Mizony,[2] Jean-Bernard Baillon,[2]

[1]Centre de Recherches Astronomiques de Lyon (UMR 142 of CNRS) ENS de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France
[2]Institut Girard Desargues (URA 746) Université lyon 1, bd du 11 novembre 1918, 69 Villeurbanne, France

Résumé

We use a new original method to calculate the surface density of a galaxy from its rotation curve assuming that all the mass is in the galactic plane. We show that this method gives accurate masses for the disk. Moreover, given a rotation curve for $r < R_g$ only (R_g is the galaxy radius), we find that the surface density is nearly uniquely determined except near the edge of the disk. We also demonstrate that the common assumption that a flat rotation curve leads to a density profile $\Sigma(R) \propto 1/R$ is *false* for a finite disk. We derive for the Milky Way a mass of $1.4 \times 10^{11} M_\odot$. The exponential profile is well reproduced with a scale length between 3.6 and 5 kpc. The local surface density is found to be $125 \pm 10 M_\odot.pc^{-2}$, compatible with other independant determinations.

1 Introduction

The last data concerning microlensing towards the bulge of the Galaxy imply a non negligible amount of hidden mass in the galactic disk (Gould 1994, Zhao et al. 1994, Paczyński et al. 1994). But the observed surface density follows an exponential law (see for instance Binney and Tremaine 1987, chapter 1), which leads to a nearly Keplerian rotation curve. On the other hand the observed rotation curve implies a surface density $\Sigma(R)$ which behaves like $1/R$. This problem is one of the reasons for introducing a galactic halo. Moreover, a maximal disk (i.e. a dik disk which does reproduce the observed rotation curve, with no adjunction of a surrounding dark, massive halo) would cause a bar instability. Such a bar has recently been observed [Udalsky et al. 1994], an other argument in favor of a large amount of dark matter in the disk.

In this paper, we develop a new method to calculate the disk surface density $\Sigma(R)$ needed to reproduce the observed rotation curve of our Galaxy under the hypothesis of a maximal disk. Recall that the method using Bessel functions (cf. Binney and Tremaine 1987) is inapplicable because it needs the radial derivative of the observed rotational velocity, which is not known accurately enough. In the following section, we explain our method, and we verify its reliability in section 3 with simple models. Section 4 reports the results of the simulation for our own Galaxy. Section 5 summarizes our results and conclusions.

2 The method

Our method is based on a numerical resolution of the Poisson equation. For a maximal disk, given the surface density $\Sigma(R)$, the force acting on a given point of the disk reads :

$$\vec{F} = \int \frac{\Sigma(R)}{R^3} \vec{R} d\vec{R}. \tag{1}$$

Such an integral is mathematically divergent, but there are in fact symmetric compensations near the singular point, so that the integral is well defined. Recall that all numerical methods to calculate integrals introduce various discretisations of the integration volume. We will evaluate this integral, and use the discretized equation to derive $\Sigma(R)$ from $\vec{F}$.

We model a spiral galaxy by a central mass m_o, and a disk of radius R_g which consists of n massive bodies of mass m_i and position $\vec{x_i}$ distributed within an axial symmetry. For each point its distance to the center is denoted d_i, its velocity v_i and its distance to other stars $d_{ij} = \|\vec{x_j} - \vec{x_i}\|$.

Using this discretization to calculate the integral (1), the force $\vec{F_i}$ acting at the point $\vec{x_i}$ reads :

$$\vec{F_i} = \sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j}{d_{ij}^3} \vec{d_{ij}}.$$

Now if we suppose that these forces give rise to the rotation curve with Newtonian gravitation, we have

$$\vec{F_i} = m_i \frac{v_i^2}{d_i} \frac{\vec{x}_i}{d_i}.$$

The two former equations yields :

$$\frac{v_i^2}{d_i} \frac{\vec{x}_i}{d_i} = \sum_{j \neq i} G \frac{m_j}{d_{ij}^3} \vec{d_{ij}}. \tag{2}$$

Because of the symmetry of the problem, the first equation for the center ($i = 0$) reduces to $\vec{0} = \vec{0}$, and the other equations can be projected on the radial axis. Introducing the angle θ_{ij} between the vectors $\vec{x_i}$ and $\vec{x_j}$, then $d_{ij}^2 = d_i^2 + d_j^2 - 2d_i d_j \cos(\theta_{ij})$ and the set of n linear equations (2) reduces to :

$$\sum_{j \neq i} m_j F_{ij} = v_i^2 / d_i, \tag{3}$$

where $F_{ij} = G(d_i - d_j \cos(\theta_{ij}))/d_{ij}^3$.

In order to solve such a linear system of n equations with $n + 1$ unknows m_i, we have to fix an arbitrary parameter. For each value of this parameter, there is *in general* a unique solution to the whole system. The total mass of the galaxy seems to be the natural parameter. Using dimensionless quantities, we use the normalised parameter $\omega = \frac{1}{M_g}$, where $M_g = \sum_i m_i$ is the mass of the galaxy.

Denoting $\mu_i = m_i / M_g$, we thus have to solve the following $n + 1$ equations with $n + 1$ variables μ_i for each ω :

$$\sum_{j \neq i} \mu_j F_{ij} = \omega \, v_i^2 / d_i, \tag{4}$$

for $i = 1, ..., n$

$$\sum_i \mu_i = 1; \tag{5}$$

with the constraint :

$$\mu_i \geq 0, \tag{6}$$

The constraint (6) is very interesting because it restricts the range of possible values for the parameter ω and yields the following striking result : there exist a maximal ω_{max} and a minimal ω_{min} possible values for ω such that all masses are positive. Moreover the difference between ω_{max} and ω_{min} is so small (about 10^{-2} or less) that this method provides a *natural evaluation of the mass of a galaxy.* The mathematical proof is given in the appendix.

We stress that for a spherically symmetric distribution of matter, the Gauss theorem implies that only forces due to the matter *inside* the sphere have to be taken into account. This property is no longer valid for a two dimensional distribution (Binney and Tremaine 1987, hereafter BT), and the integration domain of (1) must include not only the matter inside, but also *outside* the sphere. Not doing this yields erroneous results.

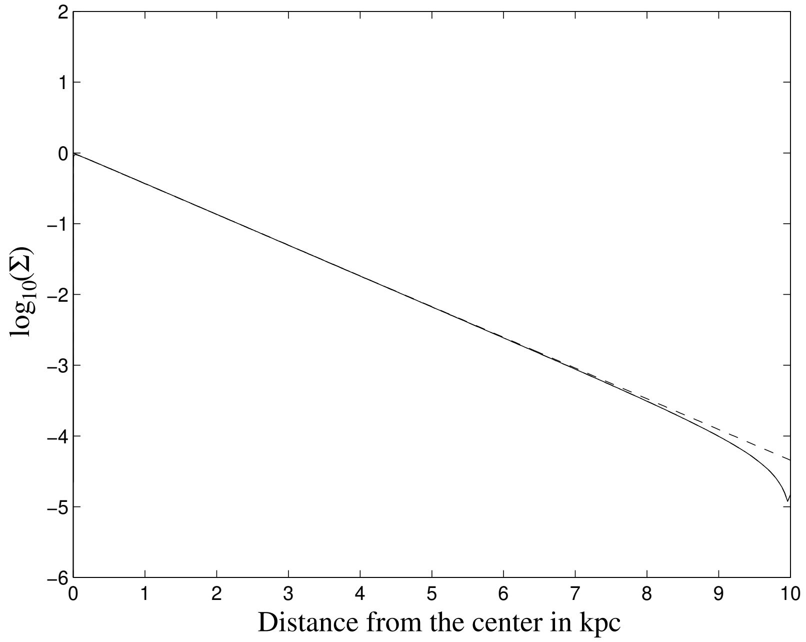


FIG. 1 – Surface density for the rotation curve of an exponential disk (solid curve), compared to the exact profile (dashed curve).

3 Test of the method

In order to test the accuracy of our method, we first apply it to the following three well-known types of velocity curves : an exponential disk, a constant rotation curve (Mestel's disk), and a Keplerian rotation curve.

We used a numerical discretisation of 250 000 points. The points are displayed along 500 rings (500 points on each ring). The ring radii r_i are proportional to i^2, i.e. if the first one has a radius r_1, the second one a radius $r_2 = 4r_1$, $r_3 = 9r_1$ for the third ring and so on. The constraint (6) determines ω_{min} and ω_{max}.

3.1 Exponential disk

For the exponential disk of scale length R_d, the rotation curve is given in [BT], p. 78 :

$$v_c^2(r) = 4\pi G\Sigma_0 R_d y^2 \left[I_0(y)K_0(y) - I_1(y)K_1(y)\right] \tag{7}$$

where $y = \frac{r}{2R_d}$ and I_0, I_1, K_0, K_1 are modified Bessel functions (see the appendix 1.C.7 of BT).

The surface density we obtain with our method is plotted in figure (1), along with the exact, exponential profile associated with the rotation curve (7). In fact, two results are shown on the plot, for the two extreme possibilities $\omega = \omega_{min}$ and $\omega = \omega_{max}$. The differences between the curves are indistinguishable.

The surface density obtained with our method is in remarkable agreement with the exact profile, except near the edge of the galaxy. Since our method is applicable to a *finite disk* only, the density is lower than the true result near the edge of the disk. A finite exponential yields a larger rotation curve than an infinite one near the edge, so a lower density is required to reproduce the rotation curve (7). The inner part of the galaxy is not affected by this effect because of the exponential decrease of the density.

Another constraint arises from the total mass of the galaxy. As shown in the appendix this constraint is correctly fullfilled by the present method. The mass of an exponential galaxy of central surface density $1M_\odot.pc^{-2}$ is $6.2832 \times 10^6 M_\odot$: the mass we derive from the allowed values of ω is $6.279 \times 10^6 M_\odot$, a 0.07% agreement! The error in the method arises from the numerical resolution of integral (1).

Such an error is much smaller than the observational uncertainty in the measurement of the rotation curve. An estimate of this uncertainty can be done on this example. If the precision of the observation is about 10%, then the mass reconstructed from a randomly perturbated rotation curve vary from 5.2 to $7 \times 10^6 M_\odot$. The error on the mass is hence approximately twice that on the velocity.

3.2 Point mass

The finite size effect has no influence at all on this example. It is then a good test of the reliability of the method. A point mass corresponds to a surface density equal to zero everywhere except at the centre. The rotation curve has the so-called Keplerian shape $v^2(r) = GM/r$.

For this model, our numerical method reproduces the analytical result within the computer precision. The total mass is recovered exactly, and the density in the rest of the disk is less than 10^{-14} the central density, as expected for a Keplerian profile.

These two examples assess the validity and the accuracy of the method developped in §2. The total mass of the galaxy seems to be the best determined parameter.

3.3 Mestel's disk

The rotation curve of a Mestel's disk is $v^2(r) = constant = v_0^2$. The integration is straightforward and yields $2\pi G r \Sigma(r) = v_0^2$.

Applying our numerical method to a *finite* portion of the rotation curve leads to the density profile plotted in figure (2), where it is compared to the corresponding $1/r$ density.

In fact, as for the exponential disk discussed previously, the Mestel's disk is an infinite disk. Hence, despite the coincidence of the rotation curves for $r \leq R_g$, where R_g is the radius of the galaxy, the two models exhibits some differences. Moreover, we can see on figure (2) that the density of a *realistic* (i.e. finite) disk with a flat rotation curve is for a large part an exponential of the form $\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d}$ (the plot is logarithmic in the $y-$axis). The scale length R_d derived for this model is approximately $0.3\, R_g$. The density

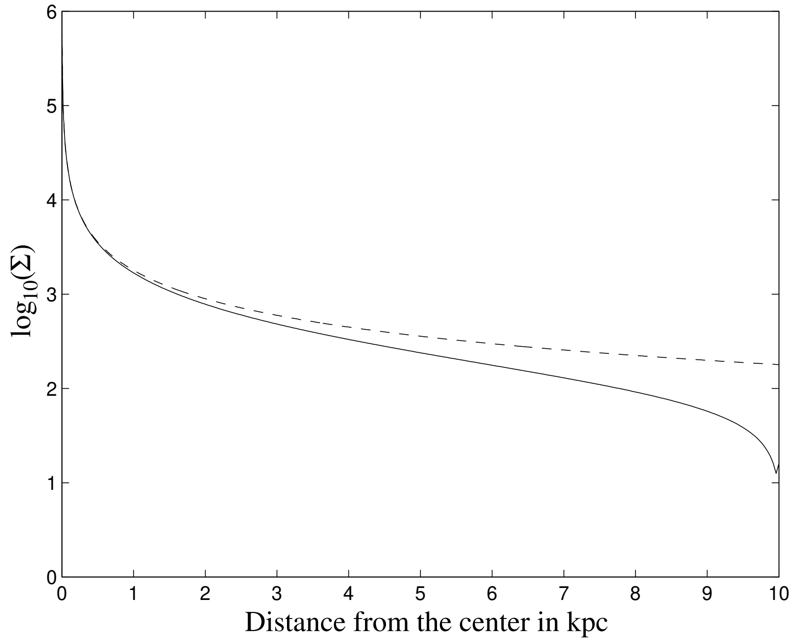


FIG. 2 – Surface density for a constant rotation curve, assuming a finite disk. The dashed curve is the density of an infinite Mestel disk.

is increasing more rapidly (than the exponential) towards the galactic center, like in a real spiral galaxy with a bulge.

The rotation curve of a real spiral galaxy is not exactly constant, especially near the center. However, the characteristic behavior of the surface density of a galaxy is expected to be qualitativelly the same as for the ideal case.

4 Results

Since the accuracy of the present method has been assessed in the previous section by comparison with toy-models of galaxies, we can apply it with confidence to the case of a real galaxy, the Milky Way.

Fich and Tremaine (1991) review observational data on our Galaxy rotation curve. Since the measures are not well determined, in particular in the external part of the solar circle, we will discuss two kinds of rotation curves, both compatible with the observations. Fich, Blitz and Stark (1989) argue that the rotation curve is compatible with a flat profile, for which they give an analytical fit. On the other hand, Vallée (1994) take into account the apparent rise of the rotation curve at the limit of the observations.

The surface densities we obtain are plotted on figures (3) and (4), along with an exponential profile of scale lengths 3.6 and 5 kpc respectivelly. A large part of the curve is close to the exponential, especially for the case of the flat rotation curve of Fich et al. Only the central and external parts deviate substantially from the exponential law. The local

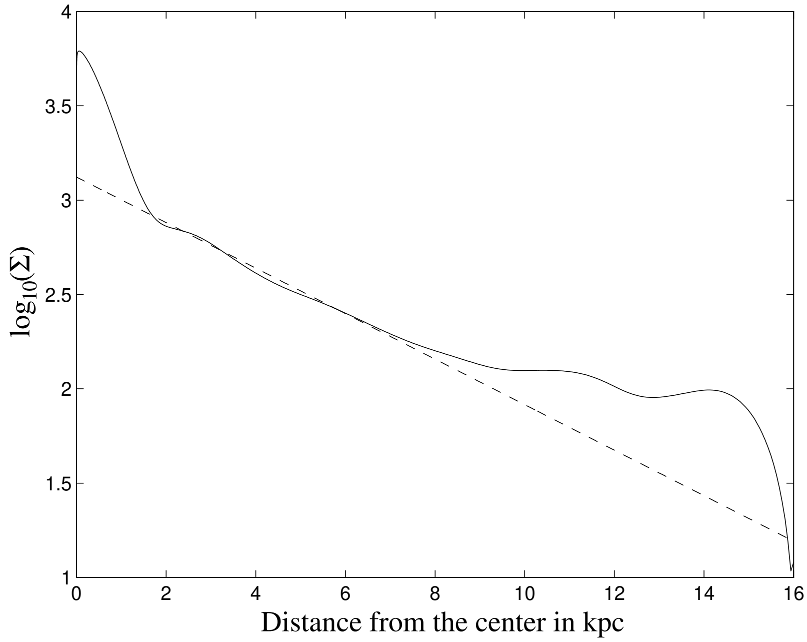


FIG. 3 – The surface density of the Milky Way, derived with our method. The straight dashed line is an eye fit by an exponential of scale length 3.6 kpc, and local density $135 M_{\odot}.pc^{-2}$.

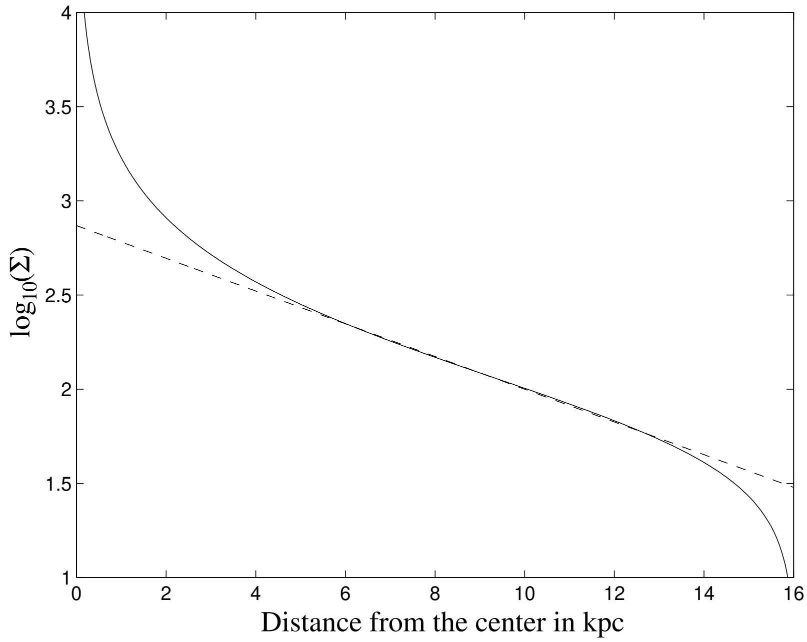


FIG. 4 – Same as figure (3), but for the flat rotation curve from Fich et al. Also plotted (dashed line) is an exponential profile of scale length 5 kpc and solar density $135 M_{\odot}.pc^{-2}$

surface density (i.e. at $R = R_{\odot} = 8.5$ kpc) is about $130 M_{\odot}.pc^{-2}$, nearly three times the visible density $\approx 50 M_{\odot}.pc^{-2}$.

The flat rotation curve of Fich et al. leads to a density profile much closer to the exponential, but with a larger scale length. Actually, the uncertainties in measuring the tangential velocity are very large at a galactocentric distance $R > 10\ kpc$. The real situation may be intermediate between these extremes, and the scale length R_d of the disc is likely to be in the range $3.6 \leq R_d \leq 5$ kpc, in agreement with observations (Kent, Dame and Fazio 1991).

The local amount of dark matter has been tentatively estimated by Bahcall, Flynn and Gould (1992) and Kuijken and Gilmore (1991) , from dynamical constraints. The former find a total density of $70 M_{\odot}.pc^{-2}$ whereas the latter argue for no dark matter in the disc, with a measured density of $50 M_{\odot}.pc^{-2}$. The discrepancy between these two results shows that such a determination is subject to assumptions in the model used for the analysis, and then must be taken with some flexibility. The surface density we obtain, with a *maximal disk* is incompatible with the results of Gilmore (1991). However, Bahcall, Flynn and Gould (1992) derived 1-sigma limits $50 \leq \Sigma(R_{\odot}) \leq 115 M_{\odot}.pc^{-2}$, so that the value we derive, a bit higher than the upper limit, can not be excluded with a high confidence level.

This strongly argues for the presence of a dark halo, which does contribute to the Galaxy rotation curve. Using the estimates of [Alcock et al. 1995] and [Méra et al. 1995] for the halo mass, i.e. about 10-20% of the standard halo model, we computed the related disk density profile. Figure (5) shows the corresponding surface density profile. The local density is $115 M_{\odot}.pc^{-2}$.

We point out the fact that the contribution of a standard halo (i.e. a spherical halo of density $\rho(r) \propto 1/r^2$, where r is the distance to the galactic center) *does not* influence the shape of the derived surface density, as can be seen of figures (4) and (5). The rotation curve is nearly flat, and substracting the halo contribution gives also a flat rotation curve for the disk. Since the equations (4) are linear, the influence of the halo is only on the normalisation and the total mass of the disk. In particular, the disk scale length is not changed by the presence of a $1/r^2$ halo.

5 Conclusions

We have developed a new method to calculate the surface density of a maximal disk from the measured rotation curve. The accuracy of this method has been assessed on several examples of rotation curves for which the density-profile is known exactly. We show that a flat rotation curve *does not* correspond to a $1/R$ surface density, but rather to an exponential profile plus a central bulbe.

We thus applied the method to the observed rotation curve of our own Galaxy. We find that the surface density is compatible with an exponential disk with a scale length between 3.6 and 5 kpc, and a central bulge. The total mass of our Galaxy is found to be $1.4 \pm 0.4 \times 10^{11} M_{\odot}$. Since the scale length must be compatible with the observations, the Galaxy can not extend much farther than 16 kpc (the scale length is roughly proportional

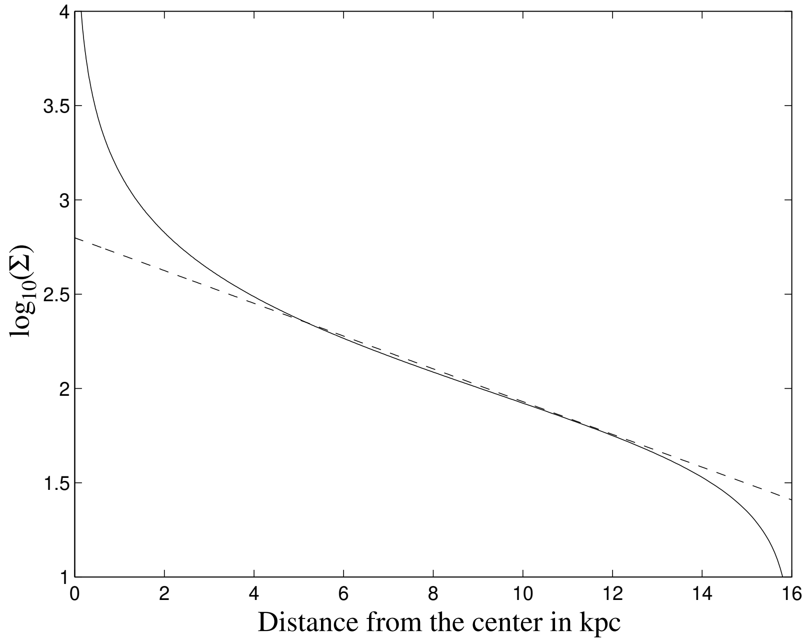


FIG. 5 – The same as figure (4), but with the contribution of a small halo responsible of 20% of the rotation curve. The exponential profile (dashed line) has a scale length 5 kpc and is normalised by $\Sigma(R_0) = 115 M_{\odot}.pc^{-2}$

to the size of the galaxy).

The disk surface density in the solar neighborhood is found to be $115 M_{\odot}.pc^{-2}$ in a galactic model with a "light" halo. This result is marginally compatible with the independant determination of Bahcall, Flynn and Gould (1992).

We computed the optical depth for the maximal disk, assuming a scale height of 325 pc. In the direction of the LMC, we find $\tau_{LMC} = 4.7 \times 10^{-8}$, and towards the Baade's window ($b = 4.2°$, $l = 1°$) $\tau_{bulge} = 5.6 \times 10^{-6}$. The comparison with the first estimates by OGLE and MACHO (Alcock et al. 1995 : $\tau_{LMC} = 8 \times 10^{-8}$; Bennet et al. 1994 : $\tau_{bulge} = 1.6$ to 6.3×10^{-6} ; Udalsky et al. 1994 : $\tau_{bulge} = 3.3 \times 10^{-6}$) suggest an intermediate situation between a massive halo and a maximal disk.

Further work implies the application of the method to other galaxies for which we have accurately-determined rotation curves, and the study of the stability of the disk. According to [BT], a maximal disk is unstable, and leads to the formation of a central bar. Such a bar has been observed [Udalsky et al. 1994]. We also plan to include the corrections due to genaral relativity arising from cosmological considerations.

Acknowledgments : The authors are endebted to G. Chabrier for helpful comments and corrections of the manuscript.

A mathematical background

Let suppose that the rotation velocity $v(r)$ is known up to infinity. Using Bessel functions J_0 and J_1 we have the following formula [BT] :

$$\Sigma(r) = \frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty J_0(kr) S(k) k \, dk$$

where

$$S(k) = \int_0^\infty v^2(x) J_1(kx) \, dx.$$

And conversely, using Bessel transformations :

$$S(k) = 2\pi G \int_0^\infty \Sigma(x) J_0(kx) x \, dx$$

$$v^2(r) = r \int_0^\infty S(k) J_1(kr) k \, dk.$$

For the Mestel's disk or for the exponential disk these integrals can be solved analytically.

This method has a theoretical interest : indeed the correspondence $v \leftrightarrow \Sigma(r)$ is a bijection, but since the rotation curve is know from observations up to $r \leq R_g$ only, several surface densities can in principle lead to the same rotation curve $v(r)$ for $r \leq R_g$, but with different $v(r)$ for $r \geq R_g$. Since most of the mass is concentrated in the center of the galaxy, the rotation curves for $r \geq R_g$ must be nearly Keplerian. It is the reason why our method provides a very narrow range $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ of solutions.

If we want to compute $\Sigma(r)$ from $v(r)$, we have to consider the following double singular integral :

$$\Sigma(r) = \frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty J_0(kr) \left[\int_0^\infty v^2(x) J_1(kx) \, dx \right] \, k \, dk.$$

In order to carry out the integrations, it is necessary to introduce a principal value integral.

Using properties of hypergeometric series ${}_2F_1$ [Erdelyi 1953], we write :

$$\begin{aligned} 4\pi G r \Sigma(r) &= \lim_{a \to 1} \int_0^a [v^2(r/\sqrt{z}) \frac{1}{\sqrt{z}} \, {}_2F_1([3/2, 1/2], [1], z) \\ &\quad - \frac{1}{2} v^2(r\sqrt{z}) \, {}_2F_1([3/2, 3/2], [2], z) \,] dz. \end{aligned} \tag{8}$$

Conversely, $v(r)$ can be written as a function of $\Sigma(r)$ in the following form :

$$\begin{aligned} v^2(r)/r &= \pi G \lim_{a \to 1} \int_0^a [\Sigma(r\sqrt{z}) \, {}_2F_1([3/2, 1/2], [1], z) \\ &\quad - \frac{1}{2\sqrt{z}} \Sigma(r/\sqrt{z}) \, {}_2F_1([3/2, 3/2], [2], z) \,] dz. \end{aligned} \tag{9}$$

It is also possible to rewrite this latter formula using elliptic integrals. Actually elliptic integrals are hypergeometric functions, so the formula (2-146) of [BT] leads to the above principal value integral in the plane of the disk.

But the most important consequence is the theoretical formula giving the mass of the galaxy from the rotation curve : If R_g is the radius of the disk then :

$$M = \frac{R_g}{4G}\int_0^1 [v^2(R_g\sqrt{z}) + v^2(\frac{R_g}{\sqrt{z}})/\sqrt{z}]\ {}_2F_1([3/2,1/2],[2],z)\,dz.$$

This formula can not be used to compute the mass of a given galaxy because of the unknown term $v^2(R_g/\sqrt{z})$, but we shall use it to prove that our method gives accurate results.

Notice first that if $r \geq R_g$ then the relation (9) reduces to :

$$v^2(r)/r = \pi G\int_0^1 \Sigma(r\sqrt{z})\ \ {}_2F_1([3/2,1/2],[1],z)dz,$$

or

$$v^2(r) = \frac{2\pi G}{r}\int_0^{R_g} {}_2F_1([3/2,1/2],[1],u^2/r^2)\,u\,\Sigma(u)\,du. \tag{10}$$

Let $v_k^2(r) = \frac{GM}{r} = \frac{2\pi G}{r}\int_0^{R_g} u\,\Sigma(u)\,du$ be the Keplerian rotation curve. Then (10) can be written :

$$v^2(r) - v_k^2(r) = \frac{2\pi G}{r}\int_0^{R_g} [\ {}_2F_1([3/2,1/2],[1],u^2/r^2) - 1]\,u\,\Sigma(u)\,du.$$

But the function $f(u^2/r^2) = \ {}_2F_1([3/2,1/2],[1],u^2/r^2) - 1$ has the two following properties :

if $r \geq R_g$ then $\frac{3}{4}\frac{u^2}{r^2} + \frac{2}{3}\frac{u^4}{r^4} \leq f(u^2/r^2)$ and

if $r \geq 2R_g$ then $f(u^2/r^2) \leq \frac{3}{4}\frac{u^2}{r^2} + \frac{u^4}{r^4}$. Denoting $M_n = 2\pi\int_0^{R_g} u^n\Sigma(u)\,du$ the momentum of order n of the surface density, we thus obtain the following estimates :

for $r \geq R_g$,

$$\frac{3}{4}\frac{GM_3}{r^3} + \frac{2}{3}\frac{GM_5}{r^5} \leq v^2(r) - v_k^2(r),$$

and for $r \geq 2R_g$

$$v^2(r) - v_k^2(r) \leq \frac{3}{4}\frac{GM_3}{r^3} + \frac{GM_5}{r^5}.$$

This inequality proves indeed the accuracy of our method : let v_{sup} and v_{inf} be the rotation curves associated with the extremal surface densities. Taking into account the above relations, we get :

$$\frac{M_{sup} - M_{inf}}{M} \leq \frac{4}{\pi}\frac{\delta v_o}{v_o} + \frac{2}{3\pi R_g^2}\frac{M_{sup,3} - M_{inf,3}}{M}$$

where $M_{sup,3}$ and $M_{inf,3}$ are the three momentum of the surface densities associated respectively to the M_{sup} and M_{inf} configurations; and $\delta v_o = \sup_{R_g \leq r \leq 2R_g}(v_{sup}(r) - v_{inf}(r))$. The LHS of this inequality is expected to be small, because the rotation curves are both near the Keplerian curve, and the momentum of order 3 are small.

Références

[Alcock et al. 1995] Alcock, C. et al., 1995, preprint 9501091

[Bennet et al. 1994] Bennet, D.P. et al., 1994, preprint 941114

[Bahcall, Flynn and Gould (1992)] Bahcall, J.N., Flynn, C. and Gould, A. 1992, ApJ, 389, 234

[BT] Binney, J., and Tremaine, S. 1987, *Galactic dynamics* (Princeton : Princeton University Press) (BT)

[Erdelyi 1953] Erdelyi A., Higher transcendental functions, Vol 1, McGraw Hill, New-York, 1953

[Fich, Blitz and Stark (1989)] Fich, M., Blitz, L., Stark, A.A., 1989, ApJ, 342, 272

[Fich and Tremaine (1991)] Fich, M., Tremaine, S., 1991, ARA& A, 29, 409

[1] Kent, S., Dame, T.M., Fazio, G., 1991, ApJ, 378, 131

[Kuijken and Gilmore (1991)] Kuijken, K. and Gilmore, G. 1991, ApJ, 367, L9

[Gould 1994] Gould, A., 1994, preprint

[Méra et al. 1995] Méra, D., Chabrier, G., Schaeffer, R., 1995, submitted to Europhysics Letters

[Paczyński et al. 1994] Paczyński, B. et al., 1994, ApJ, 435, L113

[Udalsky et al. 1994] Udalsky, A. et al., 1994, Acta Astronomica, 44, 165

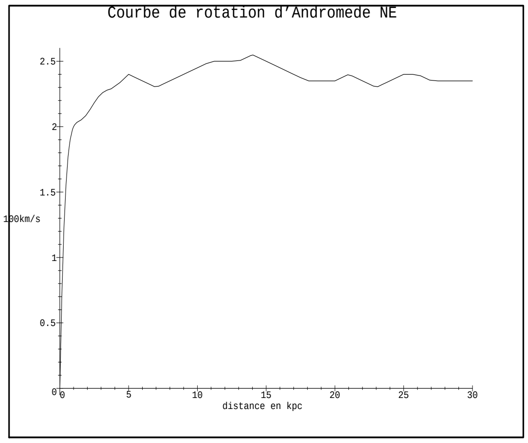
[Vallée (1994)] Vallée, J.P. 1994, ApJ, 437, 179

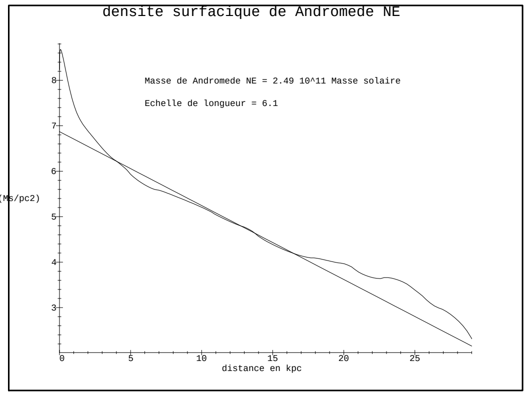
[Zhao et al. 1994] Zhao, H.S., Spergel, D.N. and Rich, R.M., 1994, ApJ, 440, L13

Nous venons donc de faire le point sur le traitement newtonien des courbes de rotations de galaxies, en mettant en oeuvre une nouvelle méthode qui invalide complètement la méthode la plus couramment employée (celle qui consiste à voir le disque d'une galaxie comme limite de sphéroïdes aplatis).
Notre nouvelle méthode à plusieurs avantages :
i) celui de donner des résultats très précis ;
ii) celui de retrouver la masse dynamique ;
iii) il y a nettement moins de "masse cachée" ;
iv) il n'y a pas de mystère de la platitude des courbes de rotations, celle-ci est aisément explicable sans halo ;
v) enfin et c'est le plus important maintenant, note méthode se prête particulièrement bien à une généralisation dans le cadre relativiste, car c'est la seule méthode directe permettant de calculer la répartition de matière à partir d'une courbe de rotation (observée), voir remarque 3 ci-dessous.

Mais avant de passer au cadre relativiste quelques remarques.
Remarque 1 : Ce preprint est rédigé à la manière des astronomes, c'est-à-dire en anglais,

avec une structure des paragraphes très codifiée. Certes c'est un preprint, mais il a été utilisé et cité dans un travail de Méra, Chabrier et Schaeffer (1998) qui examinent les modèles possibles pour notre galaxie.
Remarque 2 : La mise au point de cette méthode a nécessité le recours à un logiciel de calcul formel d'une part et à une série d'aller-retour entre théorie et expérimentation ; la relation de cette recherche se trouve dans les actes d'une université d'été organisée par l'IREM de Lyon en 1996.
Remarque 3 : Une excellente présentation des trois méthodes préalablement existantes se trouvent dans l'ouvrage de Binney et Tremaine intitulé *Galactic Dynamics*. Ces trois méthodes ont pour noms, la méthode des intégrales elliptiques (basée sur le disque vu comme réunion d'anneaux de matière), la méthode des transformations de Bessel (basée sur des propriétés asymptotiques du potentiel gravitationnel créé par le disque de matière) et enfin la méthode des sphéroïdes, la plus utilisée (basée sur le disque vu comme limite de sphères aplaties). Le point commun de ces trois méthodes est le fait que, partant d'une densité surfacique, la vitesse de rotation s'exprime par une intégrale double qui n'est pas absolument convergente. Ainsi ces trois méthodes (qui sont en fait des méthodes inverses car elles déduisent une courbe de rotation d'une densité surfacique supposée) ne permettent de trouver un résultat que dans des cas d'école (par connaissance de primitives par exemple). La méthode des sphéroïdes aplaties (c'est celle qui fait croire au mystère de la platitude des courbes de rotations) est évidemment inéquivalente aux deux autres et est fausse car il y a un passage à la limite incompatible avec le théorème de Gauss qui stipule : pour une distribution sphérique de matière dans l'espace, seules les forces exercées par la matière à l'intérieur de la sphère définie par une particule sont à prendre en compte ; cette propriété n'est plus valable pour une répartition plane de matière.
Notre méthode est basée sur une approximation riemannienne de l'intégrale double de la méthode des intégrales elliptiques, elle lui est donc théoriquement équivalente. Pour montrer l'équivalence entre la méthode des transformations de Bessel et celle des intégrales elliptiques, j'ai du permuter les intégrales et introduire des valeurs principales (les intégrales doubles n'étant pas absolument convergentes), puis transformer des fonctions de Bessel d'une part et des intégrales elliptiques d'autre part en séries hypergéométriques.
Remarque 4 : Combien pèse Andromède (en l'absence de halo) ?
Pour évaluer la masse de la galaxie d'Andromède, nous disposons de deux courbes observées de vitesses de rotation, celle du Nord-Est et celle du Sud-Ouest. La méthode newtonienne du paragraphe précédent nous donne, dans un environnement vide (pas de correction relativiste) :
pour la courbe Nord-Est : $M_{Andromède} \approx 2.49\ 10^{11}\ M_{\odot}$,
pour la courbe Sud-Ouest : $M_{Andromède} \approx 2.42\ 10^{11}\ M_{\odot}$.





A gauche la courbe des vitesses de rotation observées pour la galaxie d'Andromède ; à droite la courbe de densité surfacique ; cette densité, obtenue par notre méthode, est tracée avec une échelle logarithmique et comparée à la droite approximant le logarithme de la densité lumineuse observée. Le suffixe NE précise l'utilisation des données dites Nord-Est de la Galaxie ; les données dites Sud-Ouest, bien que légèrement différentes, aboutissent aux mêmes conclusions. Ainsi Andromède pèse environ $2.5 M_{\odot}$ (La Voie Lactée pèse environ $1.4 M_{\odot}$).

I - 3. Courbes de rotation des galaxies ; traitement einsteinien ;

Nous allons donc situer notre galaxie dans un univers homogène et isotrope dont la métrique est connue a priori sous sa forme de Robertson-Walker ; pour étudier les corrections relativistes, il faut écrire localement cette métrique sous une forme "statique".

La forme locale de Birkhoff (généralisée) pour une forme de Robertson-Walker d'un univers de Friedmann-Lemaître.

Pour cela, remarquons que pour obtenir la forme de Birkhoff d'un modèle de De Sitter, le changement de variable (par exemple $r = \frac{sh\lambda\tau}{\lambda} sh\alpha$ et $\lambda t = argth(ch(\alpha)th(\lambda\tau))$) correspond à la projection sur l'hypersuface hyperbolique d'équation $x_4^2 - x_0^2 = 1/lambda^2$, parallèlement à e_1, e_2 et e_3, et de centre 0 dans le plan e_0, e_4.

Reprenons pas à pas l'obtention de cette forme localement statique en partant de la métrique d'univers en expansion du type De Sitter (nous développerons le cas $\epsilon = -1$, les autres se traitant de manière similaire) :

$$(1) \qquad ds^2 = d\tau^2 - \frac{sh^2\lambda\tau}{\lambda^2}(d\alpha^2 + sh^2\alpha d\omega^2) \ ,$$

où $\lambda^2 = H^2\Omega$.

Effectuons le premier changement de variable $r = \frac{sh\lambda\tau}{\lambda} sh\alpha$, en notant $H = \lambda coth(\lambda\tau)$ le paramètre de Hubble, on obtient :

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{1}{1 + \frac{r^2\lambda^2}{sh^2\lambda\tau}}(dr - rHd\tau)^2 - r^2 d\omega^2 \ .$$

Cherchons un changement de la variable temporelle en posant : $\tau = h(t,r)$ autrement dit $d\tau = \dot{h}(t,r)dt + h'(t,r)dr$, de telle manière que le terme en $dtdr$ disparaisse. Cela est possible si
$h'(t,r) = -\frac{rH}{1-r^2H^2+\frac{r^2\lambda^2}{sh^2\lambda\tau}}$
la métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = \frac{\dot{h}^2(t,r)}{1+\frac{r^2\lambda^2}{sh^2\lambda\tau}}(1-r^2H^2+\frac{r^2\lambda^2}{sh^2\lambda\tau})dt^2 \ - \frac{1}{1-r^2H^2+\frac{r^2\lambda^2}{sh^2\lambda\tau}}\ dr^2 \ - \ r^2\ d\omega^2\ .$$

Elle se simplifie beaucoup car $H^2 + \frac{\lambda^2}{sh^2\lambda\tau} = \lambda^2 = H^2\ \Omega = \frac{8\pi G\rho}{3}$, qui traduit l'équation des contraintes (une des équations d'Einstein) pour une métrique d'univers.

$$ds^2 = \frac{\dot{h}^2(t,r)}{1+\frac{r^2\lambda^2}{sh^2\lambda\tau}}(1-r^2\lambda^2)dt^2 \ - \frac{1}{1-r^2\lambda^2}\ dr^2 \ - \ r^2\ d\omega^2\ .$$

Il ne reste plus qu'à intégrer l'équation différentielle $h'(t,r) = -\frac{rH}{1-r^2\lambda^2} = -\frac{r\lambda coth(\lambda h(t,r))}{1-r^2\lambda^2}$, avec comme condition aux limites $h(t,0) = t$, ce qui nous donne :
$h(t,r) = \frac{argch(ch(\lambda t)\sqrt{1-r^2\lambda^2})}{\lambda}$. On trouve alors $\frac{\dot{h}^2(t,r)}{1+\frac{r^2\lambda^2}{sh^2\lambda\tau}} = 1$, et en revenant à la variable α on a $th(\lambda t) = ch(\alpha)th(\lambda\tau)$ (le changement de variable annoncé). On obtient finalement la forme de Birkhoff statique locale :

$$(2) \qquad ds^2 = (1-r^2\lambda^2)dt^2 \ - \frac{1}{1-r^2\lambda^2}\ dr^2 \ - \ r^2\ d\omega^2\ .$$

Passons maintenant à la situation générale de la forme de Robertson-Walker d'un modèle de Friedmann-Lemaître. Nous allons suivre la même démarche et nous appellerons forme de Birkhoff généralisée, la forme obtenue.

Soit donc

$$(3) \qquad ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau)(dx^2 + f_\epsilon^2(x)d\omega^2)$$

où $f_\epsilon(x) = x,\ sin(x),\ sh(x)$ suivant les valeurs 0, 1 et -1 du signe ϵ de la courbure de la partie espace de l'univers, et où $d\omega$ désigne l'élément d'angle sphérique.
Ecrivons cette métrique (écrite dans des coordonnées comobiles) de manière localement inertielle pour l'évènement $E = \{\tau = \tau_o,\ x = 0,\ \theta = 0, \phi = 0\}$, en posant $x = R(\tau_o)\rho$:

$$(4) \qquad ds^2 = d\tau^2 - R^2(\tau)/R^2(\tau_o)(d\rho^2 + R^2(\tau_o)f_\epsilon^2(\rho/R(\tau_o))d\omega^2)\ .$$

Posons maintenant $r = R(\tau)f_\epsilon(\rho/R(\tau_o))$ et notons $H(\tau) = \dot{R}(\tau)/R(\tau)$, (4) devient :

$$(5) \qquad ds^2 = d\tau^2 - \frac{1}{1-\epsilon\frac{r^2}{R^2}}(dr - rHd\tau)^2 \ - \ r^2\ d\omega^2\ .$$

Posons $\tau = h(t,r)$; pour éliminer le terme croisé, il faut que l'égalité $h'(t,r) = -\frac{rH}{1-r^2H^2-\epsilon\frac{r^2}{R^2}}$ soit vérifiée ; cette égalité permet d'écrire (5) comme suit :

$$(6) \qquad ds^2 = \frac{\dot{h}^2(t,r)}{1-\epsilon\frac{r^2}{R^2}}(1-\epsilon\frac{r^2}{R^2} - r^2\ H^2)dt^2 \ - \frac{1}{1-\epsilon\frac{r^2}{R^2}-r^2\ H^2}\ dr^2 \ - \ r^2\ d\omega^2\ .$$

Utilisons l'équation d'Einstein (celle des contraintes) $H^2 - \epsilon\frac{1}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3}$, alors en notant $\lambda^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$, nous obtenons

$$(8) \qquad ds^2 = \frac{\dot{h}^2(t,r)}{1-\epsilon\frac{r^2}{R^2}}(1-\lambda^2\ r^2)dt^2\ - \frac{1}{1-\lambda^2\ r^2}\ dr^2\ -\ r^2\ d\omega^2\ .$$

C'est ce que j'appelle la forme de Birkhoff généralisée associée à un modèle d'univers isotrope. Il faudrait évidemment écrire le changement de variable $\tau = h(t,r)$ et donc pour cela résoudre l'équation différentielle $h'(t,r) = -\frac{rH(h(t,r))}{1-\lambda^2(h(t,r)r^2}$, $h(t,0) = t$, ce qui ne peut guère se faire sans la connaissance de $R(\tau)$.
Cependant on peut trouver une solution approchée de cette équation :

$$h(t,r) = t - \frac{1}{2}H(t)r^2 - \frac{1}{8}H(t)(2\lambda^2(t) - \dot{H}(t))r^4 + ...;$$

ainsi, $\frac{\dot{h}^2(t,r)}{1-\epsilon\frac{r^2}{R^2}} = 1 + (1-\frac{q(t)}{\Omega(t)})\lambda^2\ r^2 + O(r^4)$ et :

$$(8a) \qquad ds^2 \approx (1 - \frac{-q}{\Omega}\lambda^2\ r^2)dt^2\ - \frac{1}{1-\lambda^2\ r^2}\ dr^2\ -\ r^2\ d\omega^2\ .$$

Ces formes (8) exigent un certain nombre de remarques :

- Elles ne sont pas statiques ; en effet $\lambda = \lambda(t)$ dépend du temps (sauf pour les modèles de De Sitter).
- Dans la mesure où elles sont locales, on peut trouver une version approchée statique de cette forme : en effet autour de l'évènement E, on peut considérer que λ est constante ainsi que H, Ω et q.
- La variable r possède un sens localement (de rayon de courbure) et donc de distance pour les champs faibles. N'oublions pas que les variables α, ξ et ρ (suivant la valeur de ϵ) ont une signification d'angles.
- C'est fondamentalement la densité locale $\lambda^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$ qui a un sens.
- L'effet de la courbure est non négligeable, il apparaît aussi bien dans le coefficient temporel $(1-\epsilon\frac{r^2}{R^2})$ qu'à travers l'équation $\lambda^2 = H^2\Omega$.
- L'étude des géodésiques radiales pour les métriques (2) ou (8a) nous donne une vitesse d'éloignement égale à λr ou $\sqrt{\frac{-q}{\Omega}}\lambda r$ et non pas à Hr alors que les métriques (1) ou (3) permettent de mesurer H au moyen de redshifts.
- Pour un univers en expansion accélérée, $q(t)$ est négatif et donc la forme approximée (8a) est similaire à celle des modèles de De Sitter.
- On peut retrouver cette forme en résolvant le problème de la métrique à symétrie sphérique et formellement statique $ds^2 = F^2(r)dt^2 - L^2(r)dr^2 - C^2(r)d\omega^2$ solution intérieure à une boule telle que son contenu vérifie l'équation d'état du fluide cosmique, localement, (de fait, pour de petits redshift la densité peut être identifiée à la codensité, et être supposée constante).

Ainsi donc, en considérant que λ est constante ainsi que H, Ω et q, en notant $Q = \frac{-q}{\Omega}$ alors nous avons la forme statique approximée suivante :

$$(9) \qquad ds^2 = (1 - Q\lambda^2\ r^2)dt^2\ - \frac{1}{1-\lambda^2\ r^2}\ dr^2\ -\ r^2\ d\omega^2\ .$$

Il nous reste un petit pas à faire pour retrouver la formule de Hubble. Faisons un changement de variable $x = x(r)$ tel que nous retrouvions une vitesse de Hx. Pour le modèle de De Sitter, il suffit de poser $x = \sqrt{\Omega}r$, et la forme de Birkhoff (2) devient ce que j'appellerai la forme post-newtonienne locale de la métrique d'univers :

$$(10a) \qquad ds^2 = (1 - H^2x^2)dt^2\ - \frac{1}{1-H^2x^2}\frac{dx^2}{\Omega}\ -\ \frac{x^2}{\Omega}\ d\omega^2\ .$$

Plus généralement, pour un modèle d'univers donné, soit au moment τ_o de l'évènement E la valeur $H = H_o$ du paramètre de Hubble, $\Omega = \Omega_o$ celle du paramètre de densité, etc., alors l'approximation post-newtonienne locale de la métrique d'univers s'obtient en posant $x = \sqrt{Q_o\Omega}\ r$, ce qui n'est possible que pour les modèles accélérés :

$$(10b) \qquad ds^2 = (1 - H_o^2x^2)\ dt^2\ - \frac{1}{1-Q_o^{-1}H_o^2x^2}\frac{dx^2}{Q_o\Omega_o}\ -\ \frac{x^2}{Q_o\Omega_o}\ d\omega^2\ .$$

Dans les variables (t, x) le champ d'accélération est donné par

$$Q_o\lambda^2 = Q_o\frac{8\pi G\rho(\tau_o)}{3} = -q_oH_o^2$$

et celui des vitesses radiales par H. Ces métriques (10) sont donc particulièrement bien adaptée pour l'étude de l'univers proche.
Considérons maintenant δ la distance riemannienne radiale associée à notre métrique (10a) ; elle est définie par $x = sin(H\sqrt{\Omega}\delta)/H$ ou par $r = sin(\lambda\delta)/\lambda$ et donne immédiatement

$$ds^2 = cos^2(H\sqrt{\Omega}\delta)dt^2\ - d\delta^2\ -\ \frac{sin^2(H\sqrt{\Omega}\delta)}{H^2\Omega}\ d\omega^2\ .$$

Cette forme plus géométrique est cependant moins adaptée (du point de vue des astronomes) que la précédente pour les études concernant l'univers local. Il est important de la signaler pour mieux saisir la pertinence du choix d'une forme de métrique.

Enfin soulignons la nature locale de ces formes. Par exemple pour un des modèles de De Sitter, le changement de variable étant défini par $th(\lambda t) = ch(\alpha)th(\lambda\tau)$, n'est valide que sur la partie espace bornée par $ch(\alpha) \leq coth(\lambda\tau)$, pour chaque τ.

En résumé c'est l'approximation post-newtonienne locale, donnée par (10a), de la métrique d'univers que nous allons utiliser dans la suite.

Sur la correction relativiste.

Soit maintenant notre disque (simulant une galaxie spirale), situé dans un milieu homogène de densité ρ. Cette densité peut représenter la densité moyenne de l'univers pour

une galaxie isolée ou la densité moyenne d'un amas de galaxie ou encore pour un système planète-anneaux la densité du milieu interplanétaire.
La solution Einsteinienne (et post-newtonienne), en première approximation pour un champ faible, est donnée par un champ d'accélération supplémentaire, lié à l'expansion de l'univers :

$$\vec{g} = \lambda^2 \ \vec{x} = H_0^2 \Omega \ \vec{x},$$

où $\lambda^2 = 8\pi G\rho/3 = H_0^2\Omega$ traduit la codensité moyenne ρ de l'univers.

Dans ce cadre relativiste, la correction au premier ordre, correction linéaire, pour l'étude des courbes de rotation de galaxies s'obtient aisément.
Dans les notations du paragraphe précédent, considérons un point $\vec{x_i}$, de masse m_i, de notre disque de matière; il est donc soumis à ce champ cosmologique et donc à l'accélération supplémentaire : $\vec{g} = \lambda^2 \ \vec{x}_i$.
Ainsi nous sommes amenés à modifier très légèrement le système d'équations (2) du paragraphe précédent.
La force $\vec{F_i}$ agissant sur le point $\vec{x_i}$ s'écrit :

$$\vec{F_i} = \sum_{j\neq i} G\frac{m_i m_j}{d_{ij}^3}\vec{d_{ij}} \ - \ m_i\lambda^2 \ \vec{x}_i.$$

Et si nous supposons que ces forces expliquent les courbes de rotation nous avons

$$\vec{F_i} = m_i \frac{v_i^2}{d_i}\frac{\vec{x}_i}{d_i}.$$

Ainsi :

$$\sum_{j\neq i} G\frac{m_j}{d_{ij}^3}\vec{d_{ij}} = \frac{v_i^2}{d_i}\frac{\vec{x}_i}{d_i} \ + \lambda^2 \ \vec{x}_i.$$

En projetant ces équations sur un axe radial et en normalisant les masses, en posant $\omega = \frac{1}{M_g}$, où $M_g = \sum_i m_i$ est la masse de la galaxie et en notant $\mu_i = m_i/M_g$, nous avons à résoudre le système de $n+1$ équations à $n+1$ variables μ_i pour chaque ω :

$$(11a) \qquad \sum_{j\neq i} \mu_j F_{ij} = \omega\,(v_i^2/d_i \ + \ \lambda^2 \ d_i),$$

pour $i = 1, ..., n$,

$$\sum_i \mu_i = 1;$$

avec les contraintes :

$$(11b) \qquad \mu_i \geq 0 \ .$$

Cette correction est-elle négligeable ou non ?
Par exemple, pour un univers de 18 milliards d'années correspondant à une constante de Hubble de $H_o = 75$ km/s/Mpc, si R_g est le rayon du disque en kpc, et V_g la vitesse de rotation au bout du disque en centaine de km/s, alors la correction de masse est faible et

de l'ordre de : $0.38 * 10^{-6} * (\frac{R_g}{V_g})^2$, dans le système d'unités lié à la galaxie, et qui vaut par exemple environ $0.18 * 10^{-4}$ pour la Voie lactée et $0.6 * 10^{-4}$ pour Andromède.

Considérons maintenant une deuxième correction beaucoup plus importante, en tenant compte du fait que la galaxie étudiée se trouve dans un amas de galaxie. De fait cette galaxie se trouve dans un milieu de densité moyenne ρ_{local} de 100 à 500 fois la densité moyenne de l'univers ρ.
Si en première approximation l'on simule la sur-densité locale par une sphère de matière homogène de densité ρ_{local}, l'étude du chapitre 6 §8, montre que la métrique à l'intérieur de cette sphère est formellement la même que la forme statique locale de la métrique de l'univers (équation (2)) ; plus précisemment on a :

$$(12) \qquad ds^2 = (1 - \lambda^2 r^2)c^2 dt^2 - (1 - \lambda^2 r^2)^{-1} dr^2 - r^2 d\omega^2 \ ,$$

où $\lambda^2 = \lambda^2_{local} = \frac{8\pi G \rho_{local}}{3c^2}$.
Ainsi le système d'équations (11) reste valable, mais en prenant pour λ^2 une valeur variant de 1 à 500 fois la valeur provenant de celle de la densité de l'univers (la galaxie étant une galaxie du champ ou une galaxie d'un amas dense). Pour Andromède, avec une densité locale de 100 fois celle de l'univers, la correction relativiste de la vitesse V_g n'est plus négligeable, même si elle reste petite de l'ordre de 2%, ce qui a pour effet d'obtenir une masse de 0.5 à 1% plus grande que celle prévue par le traitement Newtonien.

Dans le tableau suivant, la correction relativiste est donnée, en pourcentage d'augmentation de masse, pour un univers de 20 Milliards d'années et suivant les valeurs de H_0 :
Tableau 1 : correction relativiste de la masse d'Andromède.

H_0	$50km/s/Mpc$	$75km/s/Mpc$	$100km/s/Mpc$
λ^2	$0.2\ 10^{-57}cm^{-2}$	$0.5\ 10^{-56}cm^{-2}$	$1.2\ 10^{-56}cm^{-2}$
λ^2_{local}	$0.2\ 10^{-55}cm^{-2}$	$0.5\ 10^{-54}cm^{-2}$	$1.2\ 10^{-54}cm^{-2}$
% d'augmentation	$\approx 0.1\%$	$\approx 0.6\%$	$\approx 1.2\%$

Si nous considérons une galaxie comparable à Andromède, mais située dans un gros amas de galaxies, alors la correction relativiste est de l'ordre de 3% pour $H_0 \approx 75km/s/Mpc$.
Cette étude relativiste est intéressante pour plusieurs raisons :
a) Une courbe de rotation étant donnée, les galaxies correspondantes sont légèrement plus lourdes (de 0.1 à 5%) dans un univers non vide. La correction relativiste n'est donc pas négligeable, même si le champ est faible (mais les grandeurs sont astronomiques).
b) Le phénomène de platitude des courbes de rotations devrait être plus prononcé pour les galaxies du champ que pour les galaxies des amas (Mais les observations sont-elles suffisamment précises pour apprécier ce phénomène ?).
c) Du fait de la faible correction à une distance de 10 à 15 kpc, il est justifié, a posteriori, de négliger la correction einsteinienne à la loi de Newton pour les petites galaxies.
d) L'influence de la valeur de la constante de Hubble est non négligeable, puisque les corrections, pour $H_0 = 100$, sont nettement plus importantes que celles obtenues pour $H_0 = 50$.

e) Il est évident qu'à plus de 20 kpc, la correction relativiste des masses, correction liée à la présence d'un milieu extra-galactique non vide, est non négligeable et même extrêmement importante, à 30 kpc elle est de l'ordre de 6% si H_0 est égal à 100 km/s/Mpc et la densité de l'amas 500 fois le densité de l'univers.

Supposons maintenant la présence d'un halo massif froid (statique et à entropie constante), entourant une galaxie, halo de densité ρ_h (constante pour simplifier). Alors la vitesse de rotation d'une particule d'épreuve dans ce halo serait $v_h = c\sqrt{\frac{M}{r} - \lambda_h^2\, r^2}$, où $\lambda_h^2 = (8\pi G/3c^2)\rho_h$; cf. le paragraphe suivant pour l'établissement de cette formule. Ceci signifie que la présence d'un halo massif impose une masse encore plus grande dans le disque d'une galaxie, et surtout que la courbe théorique v_h, plus pentue encore que la courbe théorique newtonienne, ne peut contribuer à expliquer la platitude de la courbe observée.

Alors, faut-il encore un halo massif ?

En résumé, la simple présence d'un milieu inter-galactique non vide conduit à une sous-estimation de la masse d'une galaxie et notre méthode post-newtonienne explique la platitude des courbes observées, qu'il y ait ou non un halo (léger ou plus massif).

Note : c'est en cherchant à mettre au point, dans le cadre de la relativité générale, une méthode de calcul de la masse d'une galaxie à partir de la connaissance (observationelle) de sa courbe de rotation que j'ai été amené à revoir le traitement newtonien "bien connu" ! J'ai été, je dois le dire, très surpris tant par la précision de cette méthode nouvelle du calcul de la masse d'une galaxie que par l'esthétique de la preuve mathématique de la pertinence de cette méthode. Mais de fait toute ma réflexion est partie de l'étude de la trajectoire d'une particule d'épreuve créé par un champ central, dans un univers non vide (du type de De Sitter) et de la mise en évidence du concept de sphère d'attraction ou halo d'attraction d'une sur-densité locale.

Pour des raisons observationelles, Méra et autres (cf. [11]) pensent qu'il faut cependant un léger halo entourant notre Voie Lactée pour rendre compte de sa dynamique, en particulier nous trouvons au voisinage du soleil une densité surfacique d'environ 130 $M_\odot/pc^2$ alors que la densité observée est de 50 à 90 $M_\odot/pc^2$; d'après ce que nous venons de voir un halo statique ne peut convenir. Pour appréhender ce problème il nous faut d'abord examiner la dynamique créée par une surdensité locale.

II - 1 Sur le rayon d'attraction d'une galaxie, d'un amas, etc.

Une concentration locale sphérique de matière dans un milieu homogène non vide (une étoile dans un nuage de gaz, une galaxie dans un amas, un amas dans l'univers, ... en première approximation) émet un champ gravitationnel qui, décrit par la relativité générale, est attractif jusqu'à une certaine distance r_a, puis répulsif. C'est une conséquence du théorème suivant que nous allons établir :

Théorème : Soit une sur-densité locale de masse M dans un milieu homogène de densité ρ, alors cette masse M est attractive dans une sphère de rayon (plus exactement de périmètre de courbure) r_a donné par :

$$(13) \qquad r_a^3 = \frac{M}{\lambda^2}$$

où $\lambda^2 = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}$.
De plus si R désigne le rayon de la sur-densité de masse M et ρ_M sa densité supposée homogène alors on a :

$$(14) \qquad r_a = R \iff \rho_M = 2\ \rho\ .$$

Nous dirons qu'une sur-densité locale est gravitationnellement liée si son rayon d'attraction est plus grand que son rayon (de courbure).

Commençons par rappeler que la vitesse de rotation d'une particule d'épreuve dans un champ gravitationnel central est, en théorie newtonienne, proportionelle à $v_N = \sqrt{\frac{mG}{r}}$, où m est la masse source ponctuelle du champ et r la distance au centre de cette source, et que dans le cadre de la relativité générale, pour la forme de Schwarzschild d'une métrique statique à symétrie sphérique dans le vide, on a exactement la même formule ; Mais si l'on considère cette même source plongée dans un univers de densité comobile homogène $\rho = (8\pi G/3c^2)^{-1}\lambda^2 = (8\pi G/3)^{-1}\frac{H_o^2\Omega}{c^2}$, alors suivant la théorie einsteinienne, cette vitesse de rotation suit la loi :

$$(15) \qquad v_E = \sqrt{\frac{M}{C(r)} - \lambda^2 C^2(r)};$$

C'est cette formule que nous établirons, dans le lemme suivant, pour en déduire le théorème ci-dessus.
Nous avons pris les notations relativistes usuelles : $M = mG/c^2$ et v_E n'est plus une vitesse mais le quotient de la vitesse (dans le temps propre d'un observateur fictif mais fixé une fois pour toute), par la vitesse de la lumière. Dans la mesure où les observations des vitesses de rotations sont basées sur des différences de décalages spectraux, c'est en fait la vitesse théorique v_E qui doit être confrontée à la vitesse observée et non pas la vitesse v_N. Ce résultat standard, mais trop peu connu dans sa signification, montre en particulier que v_E dépend de la fonction "rayon" de courbure $C(r)$, en fait périmètre de courbure, qui paramètre l'ensemble des solutions possibles permises par la relativité générale. Admettons en première approximation que $C(r) \approx r$, ce que nous pourrons justifier, dans le cadre des champs faibles associés aux galaxies ou aux amas de galaxies, en faisant appel à une jauge compatible avec l'électromagnétisme, la jauge "harmonique" (cf. annexe 2). Alors cette loi

$$(16) \qquad v_E = \sqrt{\frac{M}{r} - \lambda^2 r^2}$$

montre que le champ gravitationnel émis par la source de masse m (i.e. de "masse" relativiste M) dans un univers de densité $\rho = (8\pi G/3)^{-1}\lambda^2$ aujourd'hui, est attractive jusqu'à un certain rayon r_a (dépendant de M et de ρ) défini par $v_E = 0$, puis répulsive. On a ainsi la formule (13) ; la formule (14) s'en déduit en utilisant le volume $4/3\ \pi R^3$ de la sphère de rayon R.

Pour la confrontation aux observations, nous admettrons que l'univers a environ 20 milliards d'années et que la constante de Hubble est de l'ordre de 50 à 80 ou même 100 km/s/Mpc ; ces données semblant très raisonnables au vu des observations actuellement faites. Rappelons qu'une constante de Hubble de 100 km/s/Mpc et un âge de l'univers de 20 milliards d'années sont contradictoires dans le cadre du modèle "standard", mais pas du tout dans le cadre de la relativité générale traitée correctement (i.e. avec un tenseur impulsion-énergie interprété dans un repère localement inertiel).

Lemme Le champ gravitationnel à l'extérieur d'une boule de masse M est donné par la forme de métrique

(17) $ds^2 = (1 - \frac{2M}{C(r)} - \lambda^2 C^2(r))dt^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{C(r)}-\lambda^2 C^2(r)} C'^2(r)dr^2 - C^2(r)d\omega^2,$

dans un univers en expansion décrit localement par la forme statique (2)

$$ds^2 = (1 - \lambda^2\ r^2)dt^2\ - \frac{1}{1-\lambda^2\ r^2}\ dr^2\ -\ r^2\ d\omega^2\ .$$

Ce résultat est standard pour une métrique de la forme

$ds^2 = F^2(r)dt^2 - L^2(r)dr^2 - C^2(r)d\omega^2$, avec la condition $\lim_{M\to 0} C(r) = r$.

Note : dans un univers en expansion décrit localement par la forme statique approchée (9), la solution (approchée) est :

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{C(r)}(1 + \frac{1-Q}{6M}\lambda^2 C^3(r)) - Q\lambda^2 C^2(r))dt^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{C(r)}-\lambda^2 C^2(r)} C'^2(r)dr^2 - C^2(r)d\omega^2.$$

Nous prendrons en première approximation $C(r) = r$ (la justification, basée sur la jauge harmonique, est donnée en annexe). Ainsi la métrique locale approchée exprimant le champ gravitationnel créé par une sur-densité M dans un univers en expansion est dans les coordonnées (t,r) :

$$(18) \qquad ds^2 = (1 - \frac{2M}{r} - \lambda^2 r^2)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}-\lambda^2 r^2)} dr^2 - r^2 d\omega^2\ ;$$

et dans les coordonnées localement newtonienne (t,x) :

$$(19) \quad ds^2 = (1 - \frac{2M\sqrt{\Omega}}{x} - H_o^2 x^2)dt^2\ - \frac{1}{1-\frac{2M\sqrt{\Omega}}{x} - H_o^2 x^2}\frac{dx^2}{\Omega_o}\ -\ \frac{x^2}{\Omega_o}\ d\omega^2\ .$$

Considérons maintenant les équations des géodésiques circulaires, déterminant la trajectoire d'un corps d'épreuve en chute libre, pour essayer d'évaluer sa vitesse de rotation. Pour une métrique statique on a dans le plan équatorial :

$C\frac{d\phi}{dt} = F\sqrt{\frac{F'C}{FC'}}$, c'est à dire : $v_E = \sqrt{\frac{M}{C(r)} - \frac{H_o^2\Omega}{c^2}C^2(r)} = \sqrt{\frac{M}{C(r)} - \lambda^2 C^2(r)}.$

Cette formule est également valable pour une masse M dans un milieu homogène de densité ρ_{local}. Le théorème en découle immédiatement.

En conséquence, comme $v_N = \sqrt{\frac{mG}{r}}$, ou en unités relativiste $v_N = \sqrt{\frac{M}{r}}$, la correction à apporter à la vitesse de rotation d'un corps d'épreuve est de

$\frac{v_E}{v_N} = \sqrt{\frac{r}{C(r)} - \frac{\lambda^2}{M} r C^2(r)}$. Pour $C(r) = r$ elle est donc de (pour $r \leq r_a$)

$$(20) \qquad \frac{v_E}{v_N} = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{M} r^3} = \sqrt{1 - \frac{r^3}{r_a^3}}.$$

Pour une confrontation aux observations, la métrique d'univers ayant la forme de métrique (1) du modèle de De Sitter dans le temps τ à la fois atomique, cinématique et einsteinien, le problème se pose de savoir avec qu'elle précision nous pouvons localement travailler avec la métrique (18) ou (19) sur l'espace $\mathbb{R}^4$ tangent à l'événement considéré.
Nous devons, pour établir ces évaluations et l'approximation associée, faire des hypothèses supplémentaires.

Hypothèses pour l'étude de vitesse de corps d'épreuve soumis à l'attraction gravitationnelle d'une sur-densité locale (galaxie dans l'univers ou dans un amas, amas dans l'univers, étoile dans un nuage de gaz, etc...) dans un univers.

* L'univers est âgé d'environ 20 milliards d'années.

* La densité locale des amas de galaxies est de l'ordre de cent à cinq cent fois la densité moyenne de matière de l'univers (l'observation semble montrer que pour un petit amas, le groupe local par exemple, ce rapport de densité de cent est valide et que, pour les gros amas, comme celui de la Vierge par exemple, cette densité peut-être même plus grande que cinq cent).

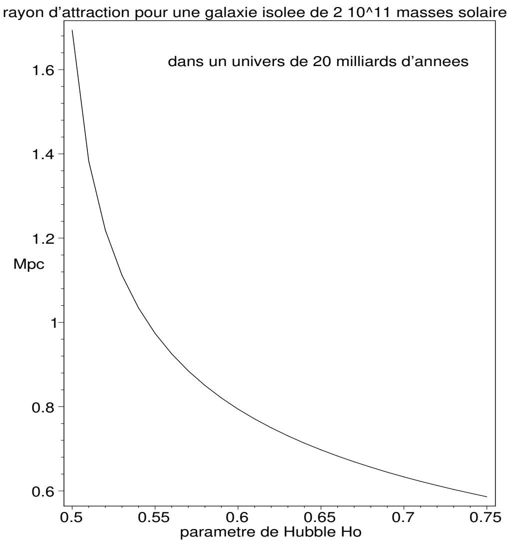
Supposons donc que nous regardions aujourd'hui une galaxie située en $\alpha = 0$; alors $x = r\sqrt{\Omega}$ désigne la distance euclidienne dans l'espace de Minkowski tangent en ce point d'espace et aujourd'hui.

Le rayon de courbure $R_o = \frac{sh\lambda\tau_o}{\lambda}$ est de l'ordre de $R_o = 10000 Mpc$ (plus de cent fois la dimension d'un super-amas ; comme $r = R_o sh\alpha$, l'approximation sur l'espace tangent est donc excellente pour $r \leq 100\ Mpc$ par exemple. En effet $sh\alpha$ est de l'ordre du centième, donc $sh\alpha \approx \alpha$.

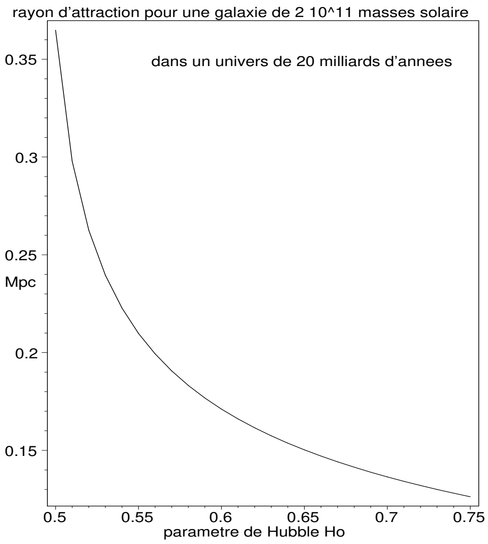
Au niveau temporel, comme dans le changement de variable on a

$\tau = \frac{1}{\lambda} Argch(\sqrt{1 - \lambda^2 r^2} ch\lambda t)$, pour que ces deux temps soient quasiment identiques, il faut que $\lambda^2 r^2 << 1$, ce qui n'est pas très contraignant ; en effet λ^2 est de l'ordre de 10^{-56}, $10^{-58} cm^{-2}$, et 10 Mpc (le rayon d'un gros amas de galaxies) est de l'ordre de $3\ 10^{25} cm$. Les calculs approximatifs commenceront à perdre de leur pertinence qu'à une échelle nettement supérieure à celle d'un super-amas. De même, pour l'étude d'une galaxie, λ^2_{local} est de l'ordre de 10^{-53}, $10^{-56} cm^{-2}$, et 20 kpc (le rayon d'une galaxie) est de l'ordre de $6\ 10^{22} cm$. Les calculs approximatifs commenceront à perdre de leur pertinence qu'à une échelle nettement supérieure à 10 000kpc, c'est à dire à une échelle supérieure à celle de structures du type amas de galaxies.
Ainsi, pour l'étude d'une courbe de vitesses de rotation d'une galaxie l'erreur faite sur la distance radiale en identifiant la métrique d'univers avec celle sur l'espace tangent est au plus de l'ordre de 10^{-7}, ce qui est négligeable devant la correction relativiste liée au champ exercé par l'amas local de galaxies sur cette courbe de rotation.

Quelques rayons d'attraction :
Pour un âge de l'univers de 20 milliards d'années, notons ρ la densité de l'univers en g/cm^3. Soit r_a le rayon d'attraction d'une galaxie de masse 2 $10^{11} M_\odot$ (de masse comprise entre celle de la Voie Lactée et celle d'Andromède) isolée dans l'univers, puis située dans un petit amas dont la densité est de l'ordre de 100 fois la densité de l'univers (pour un gros amas de galaxies cette densité est de l'ordre de 500 fois et plus celle de l'univers). La figure ci-dessous exprime ce rayon en fonction du paramètre de Hubble H_o.



Galaxie isolée dans l'univers



Galaxie au sein d'un petit amas

Figure II,1 : Le rayon d'attraction d'une galaxie en fonction de H_o. On notera la très forte sensibilité de ce rayon à la densité environnante d'une part et au paramètre de Hubble d'autre part.

Du point de vue observationel, peut-on évaluer ce rayon d'attraction d'une galaxie ? S'il était possible de le mettre en évidence, peut-être en considérant des petites galaxies satellites ou des amas globulaires très lointains, alors ce serait d'une part une nouvelle confirmation de la relativité générale et un moyen supplémentaire pour tester la valeur de la constante de Hubble. Par exemple pour la Voie Lactée ce rayon d'attraction est de 350 kpc (Andromède est à 700 kpc) si $H_0 = 50$ et ce rayon est de 130 kpc si $H_0 = 75$.

De fait la relativité générale prévoit un halo d'attraction à toute galaxie si on définit ce halo comme étant la sphère d'attraction de la galaxie. Pour la Voie Lactée les amas globulaires les plus lointains appartiennent à ce halo d'attraction, qui n'a aucune raison d'être dense. Le rayon de ce halo évolue en augmentant avec le temps du fait de l'expansion de l'univers ; pour se convaincre de cette évolution, certes très lente, il suffit de revenir aux coordonnées comobiles (τ, a) à partir de la forme de la métrique (22) qui n'est statique qu'apparemment. La signification physique de cette évolution est tout simplement la traduction du fait qu'une galaxie de masse donnée évolue dans un milieu de plus en plus dilué.

Il existe d'autres méthodes pour évaluer la masse d'une galaxie, en particulier celle qui traite la dispersion des vitesses des amas globulaires par le théorème du viriel. Cette méthode fournit des masses très nettement supérieures aux masses minimales prévues par l'étude des courbes de vitesses de rotation, ce qui n'est pas en soi contradictoire. Mais ce théorème du viriel est basé sur la loi d'attraction newtonienne, c'est à dire sur le champ à symétrie central $\vec{g} = -\frac{M}{r^3}\vec{r}$. Il faudrait utiliser un "théorème du viriel post-newtonien", associé au champ $\vec{g} = -\frac{M}{r^3}\vec{r} + \lambda^2\vec{r}$. Dans la mesure où les amas globulaires sont loin du centre galactique et comme ce champ post-newtonien s'annule au rayon d'attraction, la correction risque fort d'être très importante.

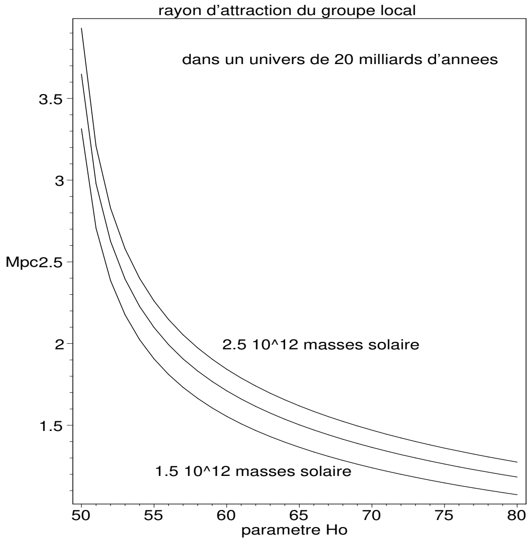
Appliquons maintenant ce type de traitement einsteinien aux amas de galaxies. Il va nous permettre de rendre compte de manière particulièrement intéressante de l'équilibre des amas locaux de galaxies et des concentrations plus fortes, comme les super-amas, par la mise en évidence d'une notion de sphère d'attraction d'une condensation locale de matière dans un univers en expansion. Ce fait a déjà été signalé par J.M. Souriau [8].

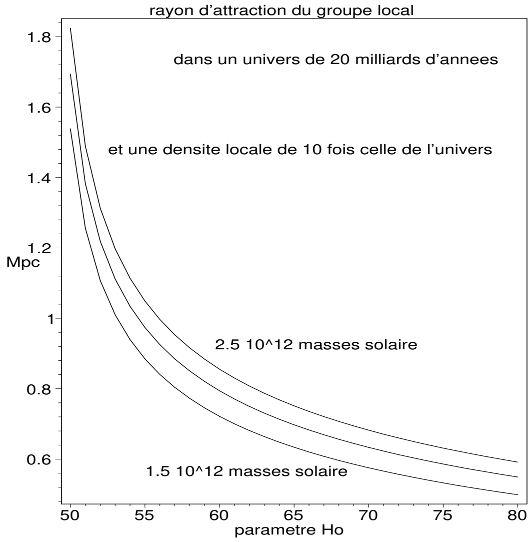
Sur le rayon d'attraction des amas

En première approximation nous supposerons qu'un amas de galaxies est une condensation sphérique de matière dans un univers non-vide. Mutatis mutandis la formule (25) s'applique : elle s'écrit

$r_a^3 = \frac{M}{\lambda^2}$, où M est la masse de l'amas et λ traduit la densité d'un univers, toujours de 20 Milliards d'années. Appelons halo d'attraction d'un amas cette sphère de rayon r_a.

Pour l'étude de notre groupe local, dans lequel se trouve la Voie Lactée et la galaxie d'Andromède, supposons que sa masse soit d'environ 15 à 25 galaxies de $10^{11}M_\odot$; différentes études (cf. Ekholm et autres [13] par exemple) donnent la fourchette
$1.7\ 10^{12}M_\odot \quad 2.4\ 10^{12}M_\odot$ pour la masse du groupe local. Donnons le rayon d'attraction de ce groupe local suivant la valeur de H_0, correspondant à $M = 1.5\ 10^{12}M_\odot$, $M = 2\ 10^{12}M_\odot$ et $M = 2.5\ 10^{12}M_\odot$:





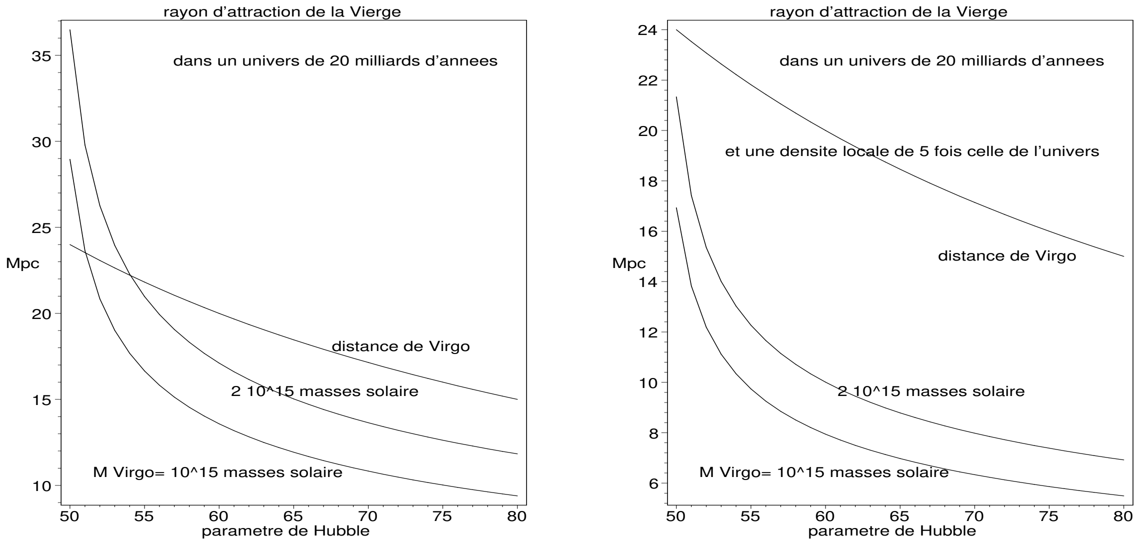
Groupe local isolé dans l'univers — Groupe local dans un environnement

Figures II-2 : Le rayon d'attraction du groupe local.

Ceci montre que le rayon d'attraction est compatible avec les distances aux autres groupes locaux de galaxies (le plus proche étant à environ 2,5 Mpc) si la densité de l'environnement

est 10 fois la densité de l'univers, mais semble éliminer les valeurs de H_0 trop élevées, si l'on veut que le groupe local soit gravitationnellement lié, à moins d'une sous-estimation importante de la masse de notre amas local (le rayon d'attraction est proportionnel à la racine cubique de la masse). Le halo d'attraction devant être plus grand que le rayon de l'amas lui-même, rayon estimé à au moins 0.7 Mpc. Par contre si notre groupe local est isolé dans l'univers, alors les petites valeurs de H_0 ne sont pas possibles à moins d'une surestimation très grande de la masse de l'amas local.
Il nous faut étudier de plus près la dynamique associée à une sur-densité locale.

Considérons maintenant le rayon d'attraction de l'amas de la Vierge, situé à une distance de l'ordre de 15 à 25 Mpc et dont la masse est estimée de l'ordre de au moins 500 fois la masse du groupe local. Nous prendrons les données provenant d'un article (cf. Ekholm et autres [14]) dont l'un des auteurs est Georges Paturel, de l'observatoire de Lyon, que je tiens à remercier pour les fructueux échanges qui m'ont permis de mieux saisir la complexité des problèmes.
La vitesse d'éloignement observée de Virgo est de 980 km/s/Mpc, et la vitesse de chute de notre groupe local est estimée à environ 220km/s/Mpc ; ainsi la vitesse cosmologique serait de 1200km/s/Mpc et donc la distance de Virgo est estimée à 1200 $/H_o\ Mpc$ (de 24 à 15 Mpc). Par ailleurs la masse de Virgo obtenue par le théorème du viriel est d'environ 6 $10^{14}\ M_\odot\ 100/H_o$ et ces auteurs estiment que la masse de Virgo est en fait de 1.5 à 2 fois cette masse du Viriel. Toutes ces estimations sont basées sur des études précises des galaxies observées dans Virgo et dans la direction de cet amas. Ces auteurs précisent : "Looking from the Virgo centre the zero-velocity surface was clearly seen around $r/R_{Virgo} \approx 0.5$." c'est-à dire le rayon d'attraction est environ à mi-chemin entre l'amas de la Vierge et nous (groupe local).
Calculons donc le rayon d'attraction de Virgo en prenant pour la masse de Virgo la fourchette [$10^{15} M_\odot$ ... 2 $10^{15} M_\odot$, en fonction de la constante de Hubble.



Amas de Virgo isolé dans l'univers Amas de Virgo dans un environnement

Figures II-3 : Le rayon d'attraction de l'amas de la Vierge

Notons que ce rayon du halo varie du simple au triple lorsque H_0 passe de 80 à 50km/s/Mpc.

Au vu de ces figures, pour que la distance de Virgo soit le double de son rayon d'attraction, il faut que le milieu environnant ait une densité moyenne de plusieurs fois celle de l'univers ou alors la masse de Virgo est fortement surévaluée.

Par ailleurs notre groupe local subit une vitesse de freinage, causée par l'attraction de la Vierge, vitesse évaluée à environ 220 km/s qu'il nous reste à prendre en compte.

Géodésique radiale et sur-densité locale

Considérons une particule d'épreuve se déplaçant radialement dans le champ créé par une masse M dans un univers ou un milieu homogène dont la densité est traduite par le paramètre λ. La métrique (18) étant à symétrie sphérique la vitesse sur une géodésique radiale vérifie $v^2(r) = 1 - \epsilon F^2(r)$, où ϵ est une constante du mouvement et $F^2(r) = (1 - \frac{2M}{r} - \lambda^2 r^2)$. Si la particule d'épreuve n'est soumise à aucune autre force que celles de l'expansion d'une part et de l'attraction par la masse M d'autre part, alors sa vitesse au rayon d'attraction r_a est nulle, autrement dit $\epsilon = \frac{1}{F^2(r_a)}$. Ainsi la vitesse vérifie :

$$v^2(r) = \frac{1}{F^2(r_a)}(F^2(r_a) - F^2(r)) \ .$$

En utilisant la formule (13) liant M, λ et r_a, nous avons $F^2(r) = 1 - \frac{\lambda^2}{r}(2\ r_a^3 + r^3)$ qui atteint son maximum $1 - 3\lambda^2 r_a^2$ en r_a. La vitesse v(r) est donc toujours définie et vaut

$$v(r) = \pm \frac{1}{1 - 3\lambda^2 r_a^2}\sqrt{\lambda^2 r^2 + \lambda^2 r_a^2\ (2\frac{r_a}{r} - 3)}\ ,$$

le signe $\pm$ étant celui de $r - r_a$.

Maintenant considérons la vitesse cosmologique d'éloignement $v_{cos}(r)$ (c'est celle obtenue de la même manière avec $M = r_a = 0$). On a :

$$v_{cos}(r) = \lambda\ r.$$

Comparons ces deux vitesses au voisinage des sur-densités locales que nous étudions. Nous obtenons le

Théorème : Le rapport des vitesses radiales en la présence d'une masse M et en son absence (vitesse cosmologique) est donnée par

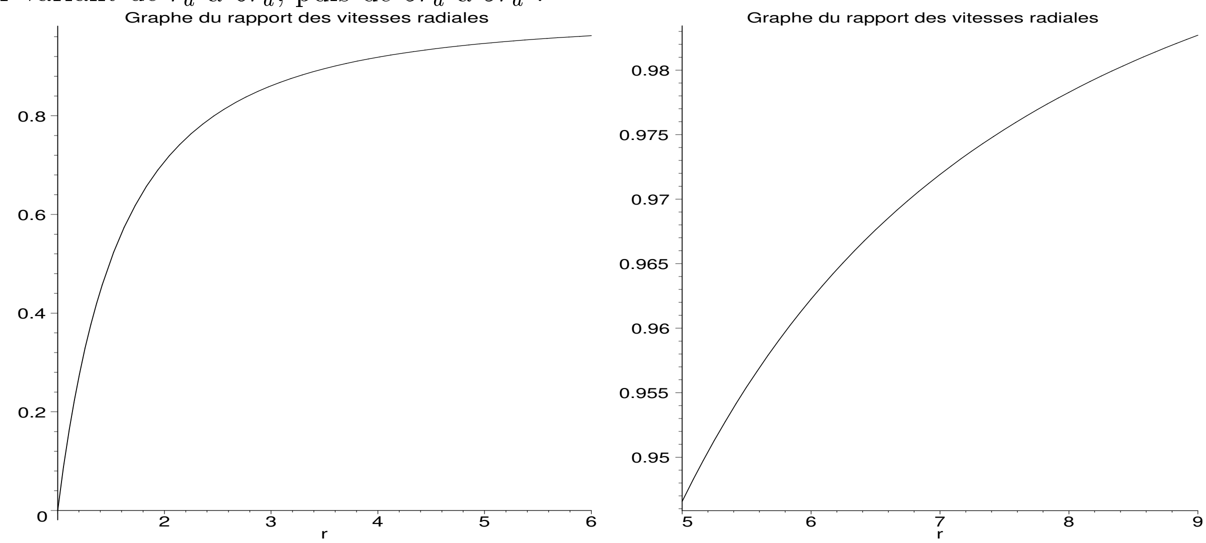
$$\text{(21)} \qquad \frac{v(r)}{v_{cos}(r)} = \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{r_a^2}{r^3}\ (2r_a - 3r)}}{\sqrt{1 - 3\lambda^2 r_a^2}}\ ,$$

le signe $\pm$ étant celui de $r - r_a$.

Nous avons fait l'étude dans les coordonnées (t, r) ; dans les coordonnées (t, x), à partir de la forme de métrique (19) on obtient :

$$\text{(22)} \qquad \frac{v(x)}{v_{cos}(x)} = \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{x_a^2}{x^3}\ (2x_a - 3x)}}{\sqrt{1 - 3H^2 x_a^2}}\ ,$$

En sachant que $\lambda^2 r^2 = H^2 x^2 \ll 1$, en première approximation ce rapport $\frac{v(r)}{v_{cos}(r)} = \pm\sqrt{1 + \frac{r_a^2}{r^3}(2r_a - 3r)} = \pm\sqrt{1 + \frac{x_a^2}{x^3}(2x_a - 3x)}$ ne dépend que de r_a ; traçons ce rapport pour r variant de r_a à $6r_a$, puis de $5r_a$ à $9r_a$:



Figures II-4 : Rapport des vitesses radiales.

Application au groupe local, à l'amas de la Vierge et à celui de Perseus-Pisces.
Pour le groupe local, les observations montrent (cf. [13]) que les galaxies suivent très bien la loi de Hubble à partir de $2.5Mpc$ de distance du centre du groupe local situé au 2/3 environ de la distance sur la ligne Voie Lactée-Andromède. Donc si le rayon d'attraction est de 1 Mpc, ce rapport $\frac{v(r)}{v_{cos}(r)} \approx 0.82$ pour $r = 2.5Mpc$ et donc $r_a = 1\ Mpc$ apparaît comme un rayon maximum, et cela correspond, au vu de la figure II-2, à une masse maximum de $1.5\ 10^{12} M_\odot$ avec $H_o \approx\geq 80$ si la densité environnante est celle de l'univers. Par contre si la densité environnante est 10 fois celle de l'univers la fourchette $(M, H_o) \in [1.5\ 10^{12} M_\odot,\ 2.5\ 10^{12} M_\odot] \times [53,\ 65]$ est admissible. Cependant se pose le problème du fait que le rayon d'attraction est sensiblement égal au rayon du Groupe Local ; celui-ci est-il gravitationnellement lié ?

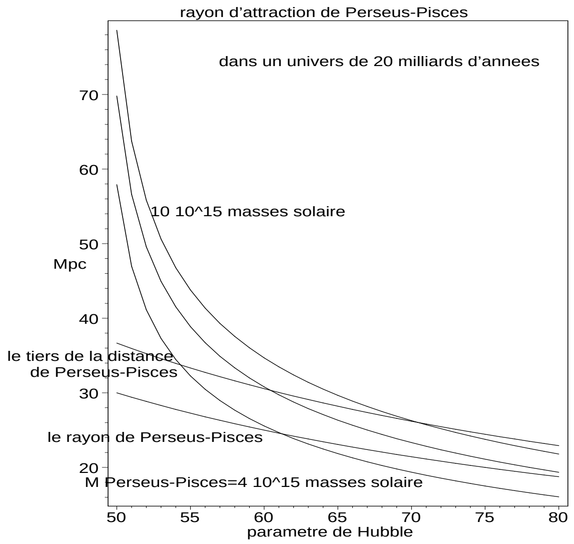
Pour Virgo, appliquons la formule (21) autrement en partant du fait que tous les astronomes s'accordent sur une vitesse de chute du groupe local d'environ $220km/s/Mpc$ et d'une vitesse cosmologique de cet amas d'environ $1200km/s/Mpc$; ce qui signifie que $\frac{v(r)}{v_{cos}(r)} \approx 0.8$ et donc que $\frac{d(Virgo)}{r_a(Virgo)} \approx 2.4$. D'après les figures II-3, l'amas de la Vierge est forcément situé dans un environnement plus dense que l'univers ; une densité de 5 fois celle de l'univers est compatible avec $55 \leq H_o \leq 80$ et $10^{15} M_\odot \leq M(Virgo) \leq 2\ 10^{15} M_\odot$.

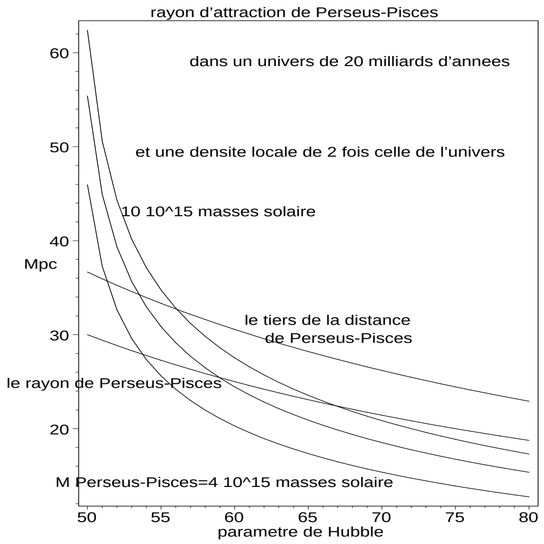
Il reste également la possibilité d'une forte surévaluation de la masse de la Vierge qui ne pèserait que de $5\ 10^{14} M_\odot$ à $10^{15} M_\odot$ dans un environnement de densité double à quadruple de la densité de l'univers, ce qui serait plus en concordance avec l'étude sur l'amas Perseus faite en [15].

Sur le super-amas Perseus-Pisces :

D'après l'étude menée par M.O. Hanski et autres (cf. [15]), ce super-amas de Perseus-Pisces (PP dans la suite) est à environ $d_{PP} \approx 50\ h^{-1}\ Mpc$ de distance et possède une

masse M_{PP} de 4 10^{15} h^{-1} $M_\odot$ à 7 10^{15} h^{-1} $M_\odot$, dans une sphère de rayon R_{PP} de 15 h^{-1} Mpc; dans les notations usuelles des astronomes le paramètre sans dimension h est défini par $h = H_o/100\ km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$. La vitesse d'éloignement cosmologique est $v_{cos}(PP) = 5000 km/s$ et ces astronomes estiment que la vitesse de chute de notre groupe local est très petite, moins de $100km/s$, ce qui signifierait que $v/v_{cos} \geq 0.98$ et donc le rapport $d_{PP}/r_a(PP)$ entre la distance de ce super-amas et son rayon d'attraction soit plus grand que 8 (cf. figures II-4). Or ce rayon d'attraction $r_a(PP)$, doit être plus grand que le rayon $R_{PP} \approx 15\ h^{-1}\ Mpc$ utilisé; et comme $d_{PP}/R_{PP} \approx 50/15$, il faut admettre une vitesse de chute d'environ $520km/s$ et donc une distance $d_{PP} \approx 55\ h^{-1}\ Mpc$.
Sinon, si effectivement la vitesse de chute est très faible, alors il faut accepter que les amas de Perseus et de Pisces ne sont pas gravitationnellement liés. Examinons ces deux hypothèses :
a) Le super-amas Perseus-Pisces forment une structure gravitationnellement liée; nous prendrons donc une vitesse de chute de $500km/s$, une distance de 55 h^{-1} Mpc et comme $r_a(PP) \geq R_{PP}$, dans les figures suivantes nous avons tracé les courbes correspondant à $M_{PP} =$ 4 10^{15} h^{-1} $M_\odot$, 7 10^{15} h^{-1} $M_\odot$ et 10 10^{15} h^{-1} $M_\odot$.
A moins d'augmenter considérablement la masse de ce super-amas, il n'y a compatibilité que si $H_o \leq 60$. Mais il resterait à rendre compte d'une grande vitesse de chute.
Dans [14] et [15], les auteurs ont utilisé la métrique dite de Tolman-Bondi avec une constante cosmologique, en privilégiant $H_o = 60$, il est intéressant de retrouver sur la figure de gauche la même fourchette de masse pour $H_o \approx 60$. Cependant il y a un désaccord sur la vitesse de chute.

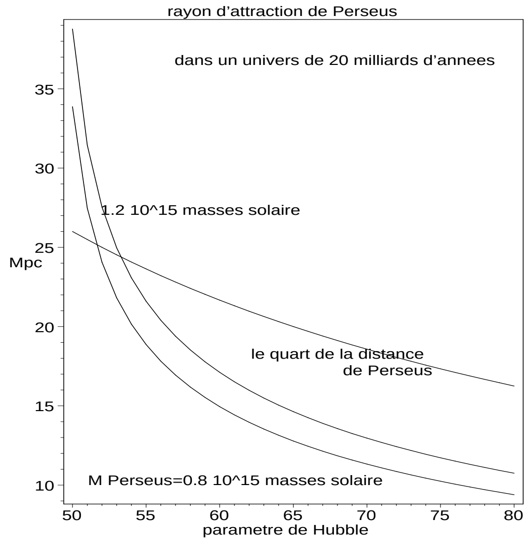


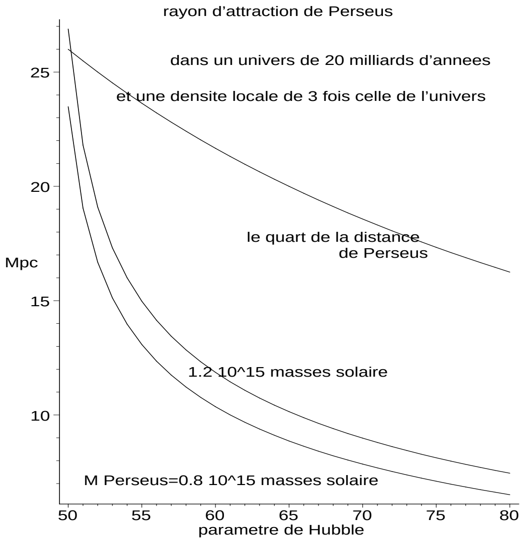


Amas de Perseus-Pisces isolée dans l'univers   Ce super-amas dans un environnement

Figures II-5 : Le rayon d'attraction du super-amas Perseus-Pisces. Nous avons tracé les courbes indiquant d'une part le tiers de la distance d_{PP} de cet amas et d'autre part son rayon qui est sensiblement égal au rayon d'attraction. La figure de droite est tracée en supposant un environnement de densité 2 fois celle de l'univers.

b) Le super-amas n'est pas lié par la gravitation, nous pouvons examiner le rayon d'attraction de chacun des quatre gros amas qui le composent. Prenons par exemple celui de Perseus qui est le plus gros. D'après [15], sa masse est de 8 10^{14} h^{-1} $M_\odot$ à 12 10^{14} h^{-1} $M_\odot$, sa distance de 51.5 h^{-1} Mpc (avec une vitesse de chute très petite) et son rayon de 1.8 h^{-1} Mpc.





Amas de Perseus isolé dans l'univers Cet amas dans un environnement

Figures II-6 : Le rayon d'attraction de l'amas Perseus. Considérons la vitesse de chute du groupe local vers l'amas Perseus pour ces deux configurations :

Pour l'amas isolé (figure de gauche) et pour $H_o \approx 60$, alors $d/r_a \approx 5.5$ ce qui correspond à une vitesse de chute d'environ $230km/s$.

Pour Perseus dans un environnement de densité triple de celle de l'univers, pour $H_o \approx 60$, alors $d/r_a \approx 8$ ce qui correspond à une vitesse de chute d'environ $100km/s$.

Ainsi, pour une masse de Perseus de 8 10^{14} h^{-1} $M_\odot$ à 12 10^{14} h^{-1} $M_\odot$ et un environnement de densité de trois à quatre fois celle de l'univers, on retrouve une vitesse de chute faible et les résultats de [15] ; en particulier les auteurs estiment la densité moyenne du super-amas Perseus-Pisces de une à deux fois la densité critique de l'univers, et comme pour $H_o \approx 60$ le paramètre de densité Ω vaut environ 0.5 pour un âge de l'univers de 20 milliards d'années, la densité moyenne du super-amas est de deux à quatre fois celle de l'univers. Une différence cependant, ce sont les amas qui expliquent la dynamique et non le super-amas Perseus-Pisces.

Nous avons examiné le rayon d'attraction et (ou) la vitesse de freinage pour quatre types de sur-densité locale, galaxie, amas local, amas et super-amas. Il apparaît à l'évidence des différences ; d'un côté galaxies et amas ont un rayon d'attraction nettement plus grand que leur rayon ; de l'autre le Groupe Local et le super-amas Perseus-Pisces qui ont un rayon d'attraction proche de leur rayon et donc d'après (14) ne semblent pas gravitationnellement liés.

Nous venons d'effectuer une étude statique (à un moment donné) du concept de rayon d'attraction d'une sur-densité M dans l'univers. Or le rayon d'attraction évolue avec le temps ; il augmente dans la mesure où la densité de l'univers environnant diminue. Il nous faut donc étudier la dynamique de ce rayon.

Sur la dynamique du rayon d'attraction : l'âge des surdensités

La notion de halo d'attraction est compatible avec les observations faites sur l'amas de la Vierge ou celui de Perseus et comme le dit Souriau [8] qui avait introduit la notion de rayon d'attraction d'une masse M, cette notion de rayon d'attraction est compatible avec les densités observées des amas. Il ajoute :" La formule (*) peut s'interpréter comme donnant la densité minimum d'un amas sphérique gravitationnellement lié

$$(*) \qquad \rho_{min} = \frac{3\lambda^2 c^2}{4\pi G}.$$

On peut interpréter les amas de galaxies comme des lambeaux déchirés par l'expansion lorsque la densité générale est devenue inférieure à (*) ; ...".

DéfinitionNous appellerons date de naissance d'une surdensité locale le moment où cette surdensité est deux fois celle de l'univers ; c'est à dire le moment où elle devient gravitationnellement liée, ce qui se traduit par l'égalité entre son rayon et son rayon d'attraction, cf. formule (14).

Soit $\tau \to r_a(\tau)$ l'évolution au cours du temps du rayon d'attraction d'une masse M.

La dynamique du rayon d'attraction provient de la réécriture de la formule (13) $r_a^3 = \frac{M}{\lambda^2} = \frac{3c^2 M}{8\pi G\rho}$ en utilisant l'évolution au cours du temps de la densité $\rho(\tau)$ de l'univers :

$$(23) \qquad \frac{r_a(\tau)}{r_a(\tau_o)} = \frac{R(\tau)}{R(\tau_o)} = \frac{sh(c\lambda\tau)}{sh(c\lambda\tau_o)} \ .$$

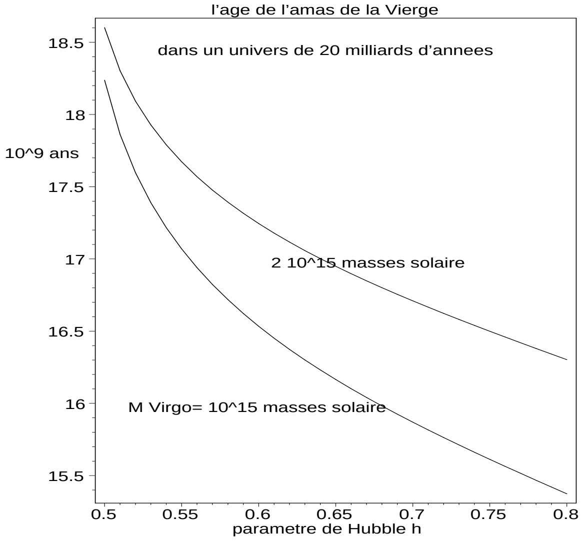
Soit τ_o) le présent et τ_1) la date de naissance d'une surdensité M de rayon (toujours de courbure) $r_1 = r_a(\tau_1)$ à sa naissance. On peut alors donner l'âge $\tau_o - \tau_1$ de la structure en utilisant cette formule (23) en fonction de son rayon à sa naissance. Et, inversement, on peut donner le rayon d'attraction d'une structure au moment τ_1 de sa formation en fonction de son âge.

Par exemple, pour $H_0 = 75$ et un âge de l'univers de $20\ 10^9$ années, une galaxie isolée de $2\ 10^{11} M_\odot$ possède un rayon d'attraction actuellement de $r_a(\tau_o) = 500kpc$ environ et donc si elle a un âge de 15 milliards d'années son rayon $r_a(\tau_1)$ serait de 90kpc et si elle a un âge de 18 milliards d'années (âge possible des vieux amas globulaires de notre galaxie) ce rayon d'attraction $r_a(\tau_1)$ serait de 35kpc, c'est à dire de l'ordre grandeur de son rayon observé. Résultat surprenant ! Simple coïncidence ou résultat profond que l'on peut prendre comme hypothèse de travail ?

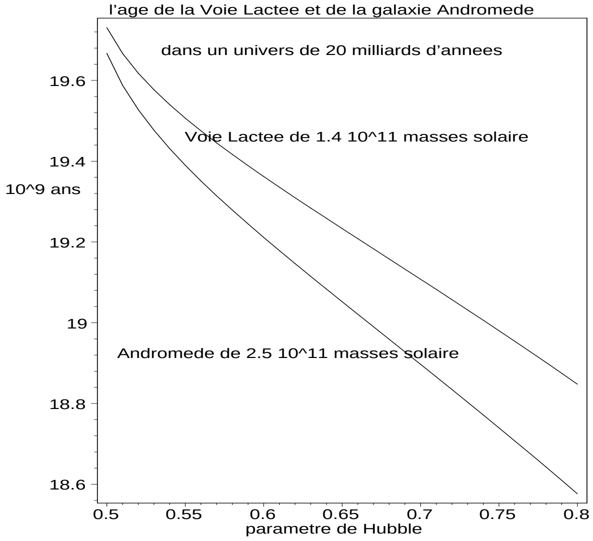
Cette hypothèse de travail qui stipule que la surdensité de masse M conserve un rayon constant (et donc une densité constante) au cours du temps peut s'énoncer :

$$(24) \qquad (Rayon\ observ\acute{e})^3 \approx r_a(\tau_1)^3 = \frac{3c^2}{8\pi G}\frac{M}{\rho(\tau_1)} \ .$$

On peut alors donner l'âge d'une structure en fonction des observations aujourd'hui, à l'aide de la formule (23) ; par exemple pour l'amas de la Vierge, pour notre Voie Lactée et pour Andromède cela donne :



Âge de l'amas de la Vierge



Âge de la Voie Lactée et d'Andromède

Figures II-7 : Âges de structures (isolées dans l'univers).

- Nous avons plusieurs fois parlé de densité moyenne d'un amas, d'une structure locale, la notion de densité présuppose une définition claire de la notion de rayon. Les astronomes nous enseignent à se méfier de cette notion de rayon très difficilement définissable. Par exemple le rayon d'une galaxie dans le lumineux est déjà difficile à préciser et n'est pas le même dans l'infrarouge. La relativité générale nous fournit un rayon, bien défini, celui de rayon d'attraction d'une sur-densité locale à un moment fixé. Quels sont les liens existants entre les rayons repérables par les astronomes et le rayon d'attraction (rayon de courbure qui évolue avec le temps) ? Peut-on donner des définitions acceptables à la notion intuitive de densité moyenne d'une structure locale (densité du groupe local, d'un amas, du super-amas de la Vierge) ? La formule (14), autrement dit l'hypothèse de J.M. Souriau, donne un premier repère : La densité moyenne d'une structure sphérique locale est le double de la densité de son environnement au moment de sa formation, autrement dit c'est le rapport de sa masse sur le volume de son halo d'attraction au moment de sa naissance.

Pour établir ces figures II-7, nous avons pris pour rayon d'attraction à la naissance les rayons approximatifs observés aujourd'hui et nous avons supposé ces structures isolées dans l'univers. Ces figures nous délivrent donc des ordres de grandeurs et des tendances ; par exemple les galaxies sont âgées et plus âgées que les amas.

Ces résultats sont plausibles et en accord avec l'âge des plus vieux objets observés dans notre galaxie. Pour établir ces figures II-7, nous avons également supposé un univers de 20 milliards d'années ; Par contre si l'univers était âgé de 30 10^9 ans les galaxies auraient environ 28 10^9 ans et la Vierge 23 10^9 ans environ. Ceci signifie que sous cette hypothèse (24), un âge de l'univers de nettement plus de 20 10^9 ans est difficilement concevable au vu des plus vieux objets repérés dans les galaxies.

Une autre vérification de cette formule (24) :

Le système solaire est dans un galaxie spirale dont la densité moyenne de matière est estimée à environ 0,2 ou 0,3 $M_\odot/(pc)^3$ (cf. l'étude de la Voie Lactée en début de chapitre). Le rayon du halo d'attraction du système solaire aujourd'hui est donc de l'ordre de 2,4 à 2,8 années-lumière (plus de la moitié de la distance à l'étoile la plus proche). Sachant qu'une étoile prend naissance dans un nuage de densité estimée entre 400 et 20000 atomes/cm^3, le système solaire avait à sa naissance un rayon d'attraction compris entre 0,4 et 1,6 années-lumière. Or la ceinture de Oort (si elle existe elle marque le rayon du système solaire) est actuellement évaluée à une distance de l'ordre de 0,2 à 1,6 années-lumière. La relation (24) semble donc valable pour le système solaire au vu des estimations actuelles.

Sur la dynamique d'un objet au voisinage d'une surdensité.

Du fait que le groupe local se trouve dans la zone proche du halo d'attraction de la Vierge, il subit un ralentissement de l'effet d'expansion cosmologique. C'est ce que nous allons examiner d'un point de vue dynamique.

Avec la formule (21) nous avons étudier les géodésiques radiales d'un point de vue statique, c'est à dire à un temps fixé. Soit donc $r = r(\tau)$ la distance entre un objet et une surdensité (par exemple entre notre amas local et la Vierge), distance qui évolue au cours du temps ; soit M la masse de la surdensité, et les conditions aux limites aujourd'hui : r_a son rayon d'attraction aujourd'hui, r_o la distance actuelle, v_o sa vitesse de fuite et $v_{cos}(r_o)$ la vitesse cosmologique théorique (dans notre exemple, $v_o \approx 980km/s$ et $v_{cos}(r_o) \approx 1200km/s$ en prenant comme vitesse de chute 220km/s).

Soit H_o, λ (et donc τ_o et Ω) précisant l'univers ; alors la vitesse d'éloignement cosmologique est $v_{cos}(r_o) = H_o\sqrt{\Omega}\ r_o = c\lambda coth c\lambda\tau_o r_o$.
L'utilisation des équations des géodésiques radiales à l'aide de la métrique formellement statique (18) conduit au résultat suivant :

$$(25) \quad v^2(r) = v_o^2 + v_{cos}^2(r_o)\frac{r^2}{r_o^2}(1 - \frac{r_o^2}{r^2} + 2\frac{r_a^3}{r^3} - 2\frac{r_a^3}{r^2 r_o})$$

où $v(r) = v(r(\tau))$ désigne la vitesse d'éloignement au moment τ où l'objet était à une distance $r(\tau)$ de la surdensité.

Cette formule (cf. annexe 3 pour l'établissement de celle-ci et d'un certain nombre de conséquences), est complémentaire à la formule (21) et n'a qu'un intérêt théorique car on ne peut observer dans le temps cosmologique l'évolution d'un objet dans le champ d'une surdensité.

A l'aide de la formule (21), on peut songer par exemple à faire une étude du champ des vitesses radiales de chute de galaxies ou groupe de galaxies dans l'amas de la Vierge, le super amas de la Vierge, ou dans des amas plus lointains. En fait cette équation (établie dans le cadre de la relativité générale) remplace, avantageusement me semble-t-il, le fameux théorème du viriel, théorème dont personne ne peut contrôler sa validité dans un univers en expansion. Cependant l'établissement d'un théorème du viriel relativiste reposera sur la forme locale (18) de la métrique d'univers et sur la dynamique donnée par cette équation (25).

En résumé : l'étude locale de l'univers ne peut que reposer sur l'ensemble suivant d'équations :

$$(18) \qquad ds^2 = (1 - \frac{2M}{r} - \lambda^2 r^2)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} - \lambda^2 r^2)} dr^2 - r^2 d\omega^2 \ ;$$

$$(13) \qquad r_a^3 = \frac{M}{\lambda^2}$$

$$(21) \qquad \frac{v(r)}{v_{cos}(r)} = \pm \frac{\sqrt{1 + \frac{r_a^2}{r^3}\ (2r_a - 3r)}}{\sqrt{1 - 3\lambda^2 r_a^2}} \ ;$$

$$(23) \qquad \frac{r_a(\tau)}{r_a(\tau_o)} = \frac{R(\tau)}{R(\tau_o)} = \frac{sh(c\lambda\tau)}{sh(c\lambda\tau_o)} \ .$$

Par exemple si on se donne H et Ω aujourd'hui (dans les fourchettes usuelles) et une vitesse de chute vers l'amas de la Vierge ces équations permettent de fixer outre sa distance, son rayon d'attraction, sa masse et son âge.

Inversement, nous savons qu'une évaluation précise de la distance de l'amas de la Vierge est très importante pour préciser l'échelle des indicateurs de distances astronomiques. Le lien établi entre la masse, l'âge de la Vierge et la vitesse de freinage qu'elle occasionne peut permettre de mieux cerner la densité moyenne de l'univers et donc la distance entre la Vierge et le groupe local.

Une autre conséquence importante (et directe) de ces équations est à noter : les galaxies sont très âgées, plus âgées que les amas, eux-mêmes plus âgés que les groupes locaux de galaxies et les super-amas ne sont pas gravitationnellement liés (comme nous l'avons vu pour celui de Perseus-Pisces).

Il est évident que des confrontations plus précises avec les observations sont nécessaires. Cependant on peut déjà souligner que le concept de Halo d'Attraction d'une condensation locale de matière dans un univers ou environnement non vide, concept simple dû à la relativité générale, nous fournit une méthode directe d'évaluation de la masse d'une structure locale en fonction de son âge et du freinage de la vitesse de fuite cosmologique qu'elle produit dans sa banlieue. Cette méthode d'évaluation de la masse s'avère être d'une très grande précision pour l'amas de la Vierge et confirme le modèle d'univers présenté. Par rapport au problème initial poursuivi, celui de la "masse cachée", cette méthode d'évaluation de masses d'amas devrait permettre de mieux le comprendre.

Les résultats ont été exposés avec la "distance" r qui est un rayon de courbure ; en sachant que la distance euclidienne sur l'espace tangent (l'espace newtonien) est $x = r/\sqrt{\Omega}$, on peut immédiatement transcrire les résultats ; cependant se pose la question de savoir ce qui est évalué par les astronomes, la distance x ou le rayon périmétrique de courbure r ? Une réponse partielle : le redshift z est défini par $1 + z = \frac{R(\tau_o)}{R(\tau)}$, un rapport de rayon de courbure ; ainsi les mesures de redshift n'indiquent que des distances relatives ; il est donc indifférent de travailler avec la distance x ou la distance r. Par contre lorsque des distances sont appréciées à partir de mesures d'angles, il est nécessaire de distinguer les variables x et r du fait que $r^2 d\omega^2 = \frac{x^2}{\Omega} d\omega^2$; les astronomes utilisent de fait la variable r.

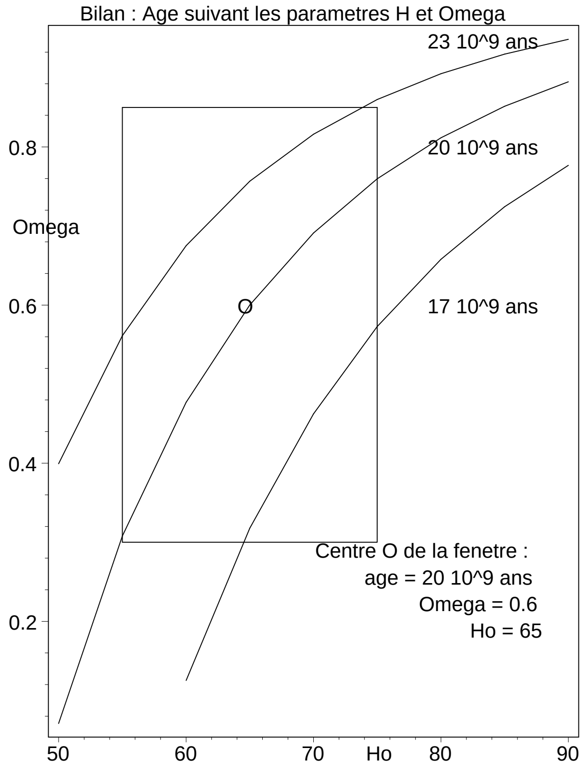
Nous avons peu parlé de ce paramètre de densité Ω qui évolue avec le temps et qui est défini comme le rapport de la densité ρ de l'univers sur la densité critique $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$. Il a clairement une signification de courbure de l'espace ($x = r/\sqrt{\Omega}$). Rappelons deux faits à propos de ce paramètre (cf. le formulaire récapitulatif du chapitre précédent) :

i) $\lim_{\tau\to\infty} \Omega(\tau) = 1$ qui provient du fait que $H^2(\tau)\Omega(\tau) = \lambda^2$ est un invariant et que $\lim_{\tau\to\infty} H(\tau) = \lambda$.

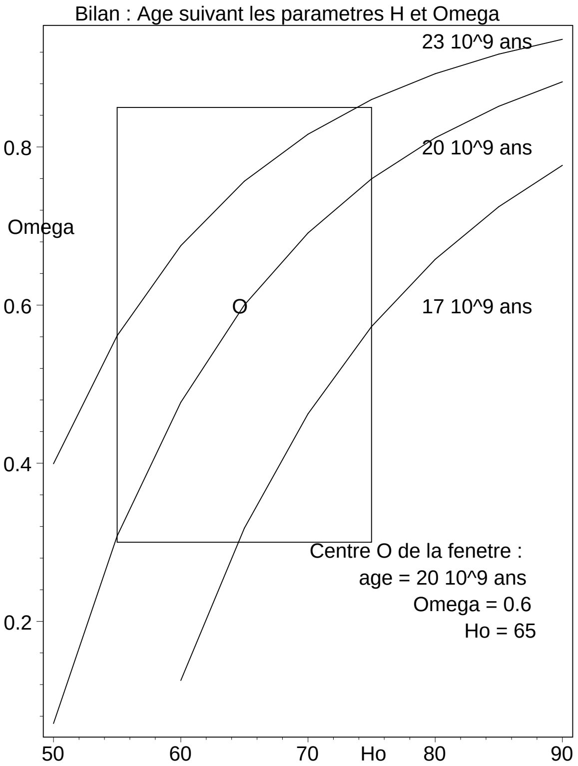
ii) $\Omega(\tau) \approx -q(\tau)$, le paramètre de décelération ; aussi ce paramètre de densité, comme le paramètre de décelération, est donc très difficile à évaluer directement par des mesures.

Conclusion

A travers la forme locale "statique" de la métrique d'univers, nous avons examiné les courbes de vitesse de rotation des galaxies et la notion de halo d'attraction d'une galaxie ou d'un amas. Les conséquences obtenues sont importantes et confrontables aux observations. Le modèle d'univers, développé sur la base du tenseur impulsion-énergie interprété dans un repère localement inertiel, s'avère en accord extraordinaire avec les observations actuelles. De plus il permet de bien poser les problèmes dit de masse manquante. Il est vrai que je prend d'énormes précautions théoriques, mais ne faut-il pas le faire pour aller à l'encontre d'idées reçues ? Ici je vais à l'encontre de la croyance au fait que lorsqu'on étudie un "champ faible", la relativité générale ne sert à rien. C'est vrai à courte distance, mais pas à des distances "astronomiques". C'est peut-être l'essentiel du message que je voulais vous livrer (outre le fait qu'il n'y a pas de mystère au sujet de la constante cosmologique).



Terminons ces trois chapitres consacrés aux modèles d'univers par une dernière figure récapitulant les caractéristiques principales du modèle en adéquation avec les observations astronomiques ; la fenêtre indique le domaine des paramètres compatibles avec les observations :



ANNEXES :

1 Sur le traitement Newtonien :

Nous savons que les modèles d'univers homogènes et isotropes obtenus par la relativité générale sont les mêmes que ceux obtenus par la mécanique newtonienne. Par exemple le modèle relativiste donné par la métrique (1), s'obtient en prenant un champ gravitationnel Newtonien donné par $\vec{g} = \lambda^2 \vec{r}$ (c'est un champ répulsif). Comme le champ newtonien usuel créé par un objet de masse M est $\vec{g} = -\frac{M}{r^3}\vec{r}$, on retrouve aisément les formules de vitesses (16), et de rayon d'attraction (13) en considérant simplement le champ newtonien total : $\vec{g} = -\frac{M}{r^3}\vec{r} + \lambda^2\vec{r}$. En conséquence, ceci signifie que, si l'on veut utiliser un théorème du viriel, il faut l'établir pour ce champ.

2 Justification de l'approximation C(r) = r.

Nous avons vu que le champ gravitationnel à l'extérieur d'une boule de masse M est donné par la métrique (17) $ds^2 = (1 - \frac{b}{C(r)} - \lambda^2 C^2(r))dt^2 - (1 - \frac{b}{C(r)} - \lambda^2 C^2(r))^{-1} C'^2(r) dr^2 - C^2(r) d\omega^2$,
dans un univers en expansion décrit par la forme statique locale

(2) $ds^2 = (1 - \lambda^2 r^2)dt^2 - (1 - \lambda^2 r^2)^{-1} dr^2 - r^2 d\omega^2$.

Si l'on peut facilement identifié b à 2M, en disant que si $\lambda = 0$ on doit retrouver la gravitation newtonienne pour les champs faibles, il n'est pas évident d'identifier C(r), qui est une fonction a priori quelconque de r, à r. Dans la mesure où l'on résout localement les équations d'Einstein, on ne peut même pas faire appel à un comportement précis à l'infini d'espace de la fonction arbitraire C(r) ! Le seul comportement possible est de considérer que l'irrégularité locale constituée par la galaxie observée dans un amas local, ne change pas la métrique d'univers. Il faut donc prendre comme condition asymptotique un raccordement de cette métrique solution avec la métrique d'univers, à la frontière de la carte pour laquelle la forme de Birkhoff de la métrique d'univers est définie.

Comment trouver la fonction C(r) ? Pour cela il nous faut une équation supplémentaire. Nous prendrons la jauge de coordonnées harmoniques : la métrique g, définie par (17), doit vérifier cette jauge par rapport à la métrique γ, définie par (2). Cette jauge s'écrit de manière γ-covariante :

(A) $D_\mu(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}g^{\mu\nu}) = 0$ où D_μ est la dérivation covariante par rapport à la métrique d'univers γ.

Les symboles $\neq 0$ de la connexion associée à γ sont :
$\Gamma^1_{11} = -\Gamma^0_{10} = \frac{\lambda^2 r}{(1-\lambda^2 r^2)}$, $\Gamma^1_{00} = -\lambda^2 r(1-\lambda^2 r^2)$, $\Gamma^3_{23} = cotg\theta$, $\Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{22} sin^2\theta = -r(1-\lambda^2 r^2) sin^2\theta$, $\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}$, $\Gamma^2_{33} = -sin\theta\ cos\theta$.

La seule équation non trivialement vérifiée du système (A) s'écrit :
$\frac{d}{dr}(\frac{C^2(1-\frac{2M}{C}-\lambda^2C^2)}{C'}) = 2rC'(1-\lambda^2r^2) - \lambda^2 r C^2(\frac{C'(1-\lambda^2r^2)}{1-\frac{2M}{C}-\lambda^2C^2} + \frac{1-\frac{2M}{C}-\lambda^2C^2}{C'(1-\lambda^2r^2)})$.

Elle peut s'arranger en la mettant sous la forme :
$\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2r^2)C'}\frac{d}{dr}(\frac{C^2(1-\frac{2M}{C}-\lambda^2C^2)}{\sqrt{1-\lambda^2r^2C'}}}) = 2r\frac{1-\frac{2M}{C}-\frac{3\lambda^2}{2}C^2}{1-\frac{2M}{C}-\lambda^2C^2}$.

Posons $\lambda r = sin\lambda\rho$; par ce changement de variable la fonction $C(\rho)$ est solution de l'équation :

$\frac{d}{d\rho}((\frac{C^2-2MC-\lambda^2C^4}{C'})^2) = 2\frac{sin2\lambda\rho}{\lambda}(C^2-2MC-\frac{3}{2}\lambda^2C^4)$.

Je ne sais pas intégrer cette équation, cependant les solutions de la forme $C(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n$ sont nombreuses et dépendent de deux constantes arbitraires.

Par exemple, prenons $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$; alors on obtient a_0 solution de l'équation $a_0 - M - 2\lambda^2 a_0^3 = 0$. Puis, pour avoir une approximation en λ^2, on cherche a_3 ; on obtient $a_3 = \frac{2\lambda^2 a_0(17a_0+18M)}{-3(a_0-3M)^2}$.

On a ainsi le développement limité suivant, si l'on suppose que $\lambda^2\rho^2$ est très petit et que M est petit par rapport à ρ :

$C(\rho) = M(1+2\lambda^2M^2) + \rho(1+\frac{35}{6}\lambda^2\rho^2) + ...$. Et donc en revenant à la variable r, on a l'approximation suivante du premier ordre en λ^2 :

$C(r) = M(1+2\lambda^2M^2) + r(1-\frac{17}{3}\lambda^2r^2) + ...$.

Autre exemple : comme lorsque $\lambda = 0$, une solution, celle de V. Fock, est

$C(\rho) = \rho + M$, prenons $a_1 = 1$ et $a_0 = M$, alors on obtient $a_2 = \frac{2\lambda^2 M}{1+\lambda^2M^2}$. Et donc $C(r) = M + r + \frac{2\lambda^2M}{1+\lambda^2M^2}r^2 + ...$.

Vu l'utilisation faite pour les galaxies ou les amas, l'identification entre r et C(r) introduit, pour ces deux solutions, une erreur de l'ordre de 10^{-11}, ce qui est tout à fait négligeable.

En fait, pour évaluer correctement l'erreur introduite en identifiant C(r) et r, il faudrait calculer la solution qui se raccorde avec la métrique d'univers à la frontière de la carte sur laquelle est définie la métrique, i.e. telle que pour $r = \lambda^{-1}$, C(r) vérifie :

$\frac{2M}{C(\lambda^{-1})} + \lambda^2 C^2(\lambda^{-1}) = 1$, et $C'(\lambda^{-1}) = 1$.

3 - Preuve de la formule (25) :

A partir de la métrique d'univers $ds^2 = d\tau^2 - \frac{sh^2\lambda\tau}{\lambda^2}(d\alpha^2 + sh^2\alpha d\omega^2)$, il est facile de voir que, pour une particule d'épreuve comobile,

$v_{cos}(r) = \frac{dr}{d\tau} = \lambda r coth\lambda\tau$, où $r = \frac{sh\lambda\tau}{\lambda} sh\alpha$ désigne la distance euclidienne tangente. Utilisons maintenant la forme "statique" de la métrique ; on a, en posant $th\lambda t = ch\alpha th\lambda\tau$:
$ds^2 = (1 - \lambda^2 r^2)dt^2 - (1 - \lambda^2 r^2)^{-1}dr^2 - r^2 d\omega^2$, pour $r^2\lambda^2 < 1$.

Retrouvons dans un premier temps $v_{cos}(r) = \frac{dr}{d\tau}$ en utilisant les propriétés des géodésiques radiales pour une métrique à symétrie sphérique et (formellement) statique.

$\frac{Ldr}{Fdt} = \sqrt{1 - \epsilon F^2}$, où ϵ est une constante du mouvement. Comme $d\tau = ds$, car $d\alpha = 0$, on obtient : $d\tau = \sqrt{F^2 dt^2 - L^2 dr^2}$ c'est à dire $\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\epsilon} F^2$. En utilisant $th\lambda t = ch\alpha th\lambda\tau$ et $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}$, on obtient $\epsilon = \frac{1}{ch^2\alpha}$ et finalement :
$\frac{dr}{F^2 dt} = \frac{dr}{ch\alpha d\tau} = \frac{1}{ch\alpha}\lambda r coth\lambda\tau$.

Ainsi $v_{cos}(r) = \frac{1}{ch\alpha}\frac{dr}{F^2 dt}$.

Reprenons maintenant le problème initial en calculant la vitesse d'un corps d'épreuve se déplaçant radialement dans le champ créé par une masse M dans un univers non vide, champ décrit par la métrique :

$ds^2 = c^2(1 - \frac{2M}{r} - \lambda^2 r^2)dt^2 - (1 - \frac{2M}{r} - \lambda^2 r^2)^{-1}dr^2 - r^2 d\omega^2$.

Notons r_o la distance aujourd'hui entre la boule de masse M (l'amas de la Vierge par exemple) et le corps d'épreuve (notre groupe local), r_1 la distance au moment de la naissance de la boule M, r_a son rayon d'attraction aujourd'hui. Notons v_{cos} la vitesse cosmologique, v la vitesse effective et v_o la vitesse mesurée aujourd'hui, vitesses calculées avec la variable temporelle annexe t. Pour obtenir les vitesses calculées avec la variable temporelle τ, compte tenu de ce qui précède il suffira de multiplier celles-ci par le facteur $\frac{cothc\lambda\tau}{ch\alpha F^2}$ (en particulier pour l'amas de la Vierge, on peut négliger $ch\alpha F^2$ qui vaut 1 à 10^{-10} près).

Pour calculer $v = \frac{dr}{dt}$, utilisons directement le champ des accélérations (cf. annexe 1 ci-dessus) : $g = c^2(-\frac{M}{r^2} + \lambda^2 r)$, en remplaçant M par sa valeur $M = \lambda^2 r_a^3$. On obtient par intégration de $\frac{dv}{dt} = c^2\lambda^2(-\frac{r_a^3}{r^2} + r)$:
$v^2(r) = c^2\lambda^2 r^2(1 + 2\frac{r_a^3}{r^3}) + K$; Comme au temps t_o on doit avoir $v^2(r_o) = v_o^2$ (la vitesse observée aujourd'hui), la constante d'intégration vaut

$K = (\frac{v_o^2}{c^2\lambda^2 r_o^2} - 1 - 2\frac{r_a^3}{r_o^3})r_o^2$, ainsi la loi des vitesses est :
(25) $v^2(r) = v_o^2 + c^2\lambda^2 r^2(1 - \frac{r_o^2}{r^2} + 2\frac{r_a^3}{r^3} - 2\frac{r_a^3}{r^2 r_o})$, pour $r \geq r_1$, et

$v_{cos}^2(r) = c^2\lambda^2 r^2$, pour $r \leq r_1$. (Cette loi des vitesses s'obtient directement en utilisant les équations des géodésiques radiales associées à la métrique).

En écrivant que $0 < v^2(r_a)$, on obtient l'inégalité qui permet de minorer le rayon d'attraction de la boule : $(1 - \frac{3r_a^2}{r_o^2} + \frac{2r_a^3}{r_o^3}) < \frac{v_o^2}{v_{cos}^2(r_o)}$. (Cette inégalité est valable aussi bien dans le temps annexe t que dans le temps cosmologique τ).

Pour obtenir la distance r_1 au temps τ_1 de la naissance de la surdensité , écrivons que $v_{cos}^2(r_1) = v^2(r_1)$, ce qui nous donne $v_{cos}^2(r_o) = v_o^2 + 2c^2\lambda^2\frac{r_a^3}{r_o}(\frac{r_o - r_1}{r_1})$, autrement dit

$(1+\frac{r_o^3}{2r_a^3}(1-\frac{v_o^2}{v_{cos}^2(r_o)}))r_1 = r_o$. Compte tenu de la formule (22), en première approximation on a donc $r_1 \approx 2/3\ r_a$.

Par ailleurs, comme dr = vdt, par intégration on a :
$t_o - t_1 = \int_{r_1}^{r_o} \frac{dr}{v(r)}$, ce qui s'écrit encore :
$t_o - t_1 = \frac{1}{c\lambda} \int_b^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-(1-\frac{v_o^2}{v_{cos}^2(r_o)})+\frac{2r_a^3}{r_o^3}(\frac{1}{x}-1)}}$, où

$b = (1 + \frac{r_o^3}{2r_a^3}(1 - \frac{v_o^2}{v_{cos}^2(r_o)}))^{-1}$. Ce qui permet d'évaluer l'âge d'une surdensité dans le temps annexe t. Etc.

Bibliographie :

[1] S. Weinberg : Gravitation and cosmology ; John Wiley, New-York(1972).
[3] J.M. Souriau : "Un modèle d'univers confronté aux observations" in Dynamics and processes, Lecture notes in Mathematics, n^o1031, Springer-Verlag, Berlin (1981).
[7] Landolt-Börnstein : Vol. 2, subvol. c, Springer-Verlag (1982).
[8] J. M. Souriau : "Géométrie et Thermodynamique en cosmologie" in "Géométrie symplectique et Physique mathématique" CNRS Paris (1975).
[9] E. Elbaz : Cosmology ; Ellipses, Paris (1992).
[10] J. BINNEY and S. TREMAINE : Galactic dynamics ; Princeton University Press, (1987).
[11] D. Méra, G. Chabrier et R. Schaeffer : "Towards a consistent model of the Galaxy : II. Derivation of the model" ; A&A vol 330, pp.953-962, (1998).
[12] M. Mizony : Le calcul formel dans ma pratique d'enseignant et de chercheur ; in Actes de l'Université d'été : Développer la recherche scientifique à travers l'étude de situations mathématiques ; Publications IREM de Lyon, pp.135-143, (1997).
[13] T. Ekholm, Yu. Baryshev, P. Teerikorpi, M.O. Hanski et G. Paturel : On the quiescence of the Hubble flow in the vicinity of the Local Group ; astro-ph/0103090, (2001).
[14] T. Ekholm, P.Lanoix, P. Teerikorpi, P. Fouqué et G. Paturel : Investigations of the Local Supercuster Velocity Field ; astro-ph/0001475, (2000).
[15] M.O. Hanski, G. Theureau, T. Ekholm et P. Teerikorpi : The Perseus- Pisces supercluster and the Tolman-Bondi model ; astro-ph/0109080, (2001).