Que peut nous apprendre la gravitation sur l'espace-temps ?

Michel Mizony, avec la collaboration de Gilbert Arsac

Institut Girard Desargues (UMR 5028), Université Lyon 1
43, bd. du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex
arsac et mizony@desargues.univ-lyon1.fr

> La vérification scientifique, outre son sens trivial d'élimination des illusions et des erreurs immédiatement décelables consiste donc en une mise à l'épreuve, le plus souvent très médiate, d'un parti pris de *représentation* de l'expérience.
>
> (Granger, 1992)

Résumé

Dès les années 20 des modèles d'univers ont été construits dans le cadre de la relativité générale. Dans les années 30, on s'est aperçu que de tels modèles pouvaient également être construits dans le cadre newtonien en tenant compte de la relativité restreinte.

Nous exposons d'abord les principes de construction de ces deux types de modèles et nous présentons leur équivalence mathématique (en toute généralité, sans l'hypothèse usuelle de pression nulle). Dans l'une de ces théories, l'espace-temps est courbe, dans l'autre, il est plat. Cette contradiction apparente souligne la difficulté de tirer de ces théories, qui sont en fait des théories du mouvement, des conclusions sur la nature ou les propriétés de l'espace-temps.

Nous présentons aussi l'équivalence des modèles gravitationnels locaux construits dans ces deux cadres théoriques (einsteinien et newtonien) et nous montrons pourquoi l'intervention de ces deux cadres est inévitable quand on veut confronter la relativité générale à l'observation, et utile pour la compréhension des concepts engagés.

Enfin nous examinons le problème général de la relation entre réalité physique et modèles mathématiques, et nous rappellons les positions de Galilée et d'Einstein sur la vérité de leurs théories.

1) Introduction.

Dès les années 20, la relativité générale, élaborée au départ pour concilier relativité restreinte et gravitation, est utilisée pour construire des modèles d'univers. Cette recherche est d'abord purement spéculative, visant à explorer les possibilités de la nouvelle théorie. Elle aboutit en particulier à montrer la possibilité de construire des modèles d'univers en expansion (Friedmann, Lemaître) [1]. Or, peu après, les observations de Hubble aboutissent à la conclusion que l'univers est effectivement en expansion ce qui provoque bien sûr un regain d'intérêt pour ces modèles d'univers "einsteiniens" rendant compte de ce phénomène. Dans ces modèles, l'espace-temps est une variété riemannienne, ou plus exactement pseudo-riemannienne, à quatre dimensions, c'est donc un "espace-temps" avec "courbure".

La possibilité de fabriquer des modèles d'univers à partir de l'utilisation de la théorie newtonienne et de la relativité restreinte, mais sans appel à la relativité générale, est reconnue dans les années suivantes (Milne, 1934) ; ces modèles d'univers se placent essentiellement dans le cadre newtonien, mais modifié en supposant la vitesse de la lumière finie. Nous les appellerons lorentziens, en réference au fait de l'invariance de la vitesse limite par les transformations de Lorentz (Nous aurions aimé les appelés "postnewtoniens", mais ce mot est déjà utilisé en des sens différents). Dans ce cadre, la théorie de l'hydrodynamique relativiste (cf. Misner, Thorne et Wheeler §22, 1974, Weinberg ch. 2.10, 1972) permet d'allier la gravitation newtonienne et la relativité restreinte. Dans ces modèles, "l'espace-temps", qui est l'espace de Minkowski, est un espace à quatre dimensions, "plat", puisque c'est tout simplement l'espace R^4 muni d'un produit scalaire.

Dans le cas particulier où la pression du fluide constituant l'univers est nulle, cette dernière famille de modèles (paramétrée par la densité de matière) coïncide avec celle des modèles correspondants de la relativité générale (le terme coïncidence sera précisé au §2.1). Nous expliquons au §3 la manière dont on peut étendre cette coïncidence au cas où la pression est non nulle, et nous examinons les conséquences non banales que l'on peut en tirer pour les modèles d'univers.

Les modèles précédents sont construits sous l'hypothèse très simplificatrice d'un univers homogène et isotrope. Mais dans la pratique, lorsqu'on veut confronter la relativité générale aux observations, on s'intéresse à une portion de l'univers comme le système solaire ou même un amas de galaxies, qui n'est évidemment ni homogène ni isotrope. Nous désignerons par modèles gravitationnels locaux les modèles correspondants qui visent à rendre compte de telles "petites" parties de l'univers et non pas de l'univers dans sa globalité. Ici encore, on a le choix entre le cadre théorique de la relativité générale et le cadre théorique lorentzien et il y a à nouveau équivalence entre les deux types de modèles et donc équivalence quant aux prédictions d'observations. Toutefois la situation n'est pas simple car dans les deux cas on ne sait calculer que des solutions approchées. Le tableau ci-dessous fixera les conventions de langage pour la suite de l'article, en respectant le fait qu'il est classique de désigner par formalisme postnewtonien, les solutions approchées des équations d'Einstein. Eventuellement dans la suite, toujours pour éviter toute ambigüité, nous renverrons aux numéros des cases du tableau.

	champ gravitationnel newtonien en relativité restreinte	*relativité générale*
	(*théorie lorentzienne*)	(*théorie einsteinienne*)
théorie non approximée	*champ gravitationnel lorentzien* *case* 1	*équations d'Einstein* *case* 4
approximation à l'ordre n	*théorie lorentzienne approchée* *case* 2	*relativité générale approchée, formalisme postnewtonien* *case* 3

La case 3 (formalisme postnewtonien) a été introduite en vue de confronter la relativité générale aux observations. En effet, du point de vue mathématique, la relativité générale se traduit par un système de dix équations aux dérivées partielles à dix fonctions inconnues de quatre variables, les équations d'Einstein, qu'on ne sait résoudre qu'exceptionnellement, en supposant que les solutions vérifient suffisamment de symétries. Mais, dans la plupart des cas, on sait calculer des solutions approchées à l'ordre 1, 2 ou parfois 3, à condition de se placer dans certains systèmes de coordonnées dans lesquels ces solutions approchées, qui sont appelées postnewtoniennes, produisent des résultats s'exprimant en termes de grandeurs physiques classiques. Il est bien connu, quoique rarement explicité, que ce sont les résultats de ces calculs qui sont confrontés aux observations et qui valident la relativité générale.

On peut aussi étudier les modifications relativistes à la théorie de Newton, autrement dit mener une résolution approchée dans le cadre lorentzien (case 2 du tableau) qui produit en fait les mêmes résultats que le formalisme postnewtonien. Du fait qu'elles conduisent aux mêmes résultats aux ordres d'approximation actuellement calculés, ces deux démarches sont souvent confondues. Au total, on ne mesure jamais que des grandeurs qui relèvent de la physique classique.

Nous exposons plus en détail dans le corps de l'article la construction des différents modèles et précisons en quoi ils sont équivalents, puis en conclusion, nous examinons ce qu'on peut dire des concepts engagés, et en particulier du concept d'espace-temps qui a un statut tout à fait particulier.

Au niveau bibliographique, nous renvoyons à Weinberg (1972) comme livre de référence, en précisant chaque fois le chapitre à consulter. Cet ouvrage de physique contient en particulier toutes les connaissances mathématiques utilisées dans l'article.

2) Cosmologie et Gravitation lorentziennes et einsteiniennes.

Nous parlerons donc de gravitation quand nous nous intéresserons à l'étude du mouvement des corps célestes dans une petite portion de l'univers, et de cosmologie quand nous nous intéresserons à l'univers dans son ensemble. Nous allons exposer comment dans les deux cas on établit les modèles einsteiniens et lorentziens.

2.1) En ce qui concerne la cosmologie, la matière est assimilée à un fluide homogène et parfait, ne serait-ce que pour pouvoir donner un contenu physique au tenseur impulsion-énergie, par exemple, les galaxies sont des points ordinaires de ce fluide (cf. Weinberg, ch 14). On suppose de plus ce fluide isotrope ; le fait que ce fluide soit parfait est alors nécessaire dans le cadre de la relativité générale pour que les équations d'Einstein aient une solution, et est pris comme hypothèse de départ pour la cosmologie lorentzienne.

La résolution des équations d'Einstein, possible du fait des symétries qui résultent de l'hypothèse d'isotropie, se fait alors usuellement en se donnant un "état" du fluide, c'est-à-dire une densité et une pression ; on obtient ainsi un modèle cosmologique relativiste.

Dans le cas lorentzien on résout les équations de l'hydrodynamique relativiste (équations d'Euler et de Poisson, équation de conservation). Ici, le qualificatif de relativiste renvoie à la relativité restreinte : on suppose qu'il existe une vitesse limite qui est celle de la lumière, mais l'espace-temps est supposé plat, comme dans la théorie newtonienne. Ce sont ces deux hypothèses que l'on traduit par le qualificatif "lorentzien".

Il est à noter d'une part que la théorie de Newton s'accommode très bien de la relativité restreinte dans la mesure où celle-ci conserve le modèle euclidien de l'espace, et d'autre part que la théorie de la relativité restreinte est vérifiable par des expériences de laboratoire qui font qu'elle est universellement admise. Au contraire, la relativité générale remet en cause plus profondément la théorie newtonienne et pendant longtemps elle n'a pu être testée que par des observations astronomiques ; ce n'est que relativement récemment qu'on a pu tester cette théorie par des expérimentations par exemple en utilisant le retard des échos radars réfléchis par des corps du système solaire. Autrement dit, le saut conceptuel se trouve dans le passage à la relativité générale et non pas entre la théorie de Newton et la relativité restreinte.

Dans les deux cas, la résolution des équations est exacte. Il est connu depuis longtemps (Souriau 1975) que les deux modèles d'univers ainsi obtenus sont équivalents lorsque la pression du fluide est nulle, aux sens suivants :

- mathématiquement : il existe en effet une transformation explicite montrant que les deux systèmes d'équations sont équivalents.
- physiquement : les deux modèles prédisent les mêmes observations. Il est donc hors de question de les départager ainsi.

2.2) En ce qui concerne la gravitation, les corps célestes sont assimilés à des points matériels isolés dans le vide ou parfois, dans un milieu par ailleurs homogène et isotrope. Prenons par exemple le cas du système solaire : lorsqu'on s'est préoccupé de confronter la relativité générale aux observations réalisables à cette échelle, on s'est trouvé devant la nécessité de calculer la trajectoire d'un photon au voisinage du soleil ou celle d'une planète comme Mercure. Or dans les deux cas, on ne connaît que des solutions approchées dont le calcul a abouti à dégager peu à peu ce qui est appelé maintenant le formalisme post-newtonien (parametrized postnewtonian formalism, Fock, Weinberg, Will, Thibault Damour) lequel s'introduit de deux manières équivalentes :

- lorsqu'on recherche, dans le cadre de la relativité générale, une solution approchée des équations d'Einstein, il est classique que, à l'ordre zéro, on retrouve la théorie de Newton usuelle, mais un développement à l'ordre un apporte des termes correctifs qui permettent de confronter le modèle aux observations usuelles dans le système solaire (déviation des rayons lumineux au voisinage du soleil, avance du périhélie de Mercure, retard dans le retour des signaux électromagnétiques réfléchis sur les planètes ou les satellites artificiels) et de vérifier à cet ordre là la relativité générale. Le formalisme post-newtonien apparaît ici comme le moyen de dégager, à partir d'une technique de résolution approchée purement mathématique, des paramètres confrontables aux observations.

- *a posteriori*, il apparaît que les solutions approchées ainsi trouvées peuvent être calculées directement dans un cadre lorentzien ; par exemple en considérant les corps célestes comme des corps non ponctuels constitués d'un fluide parfait auquel on applique les lois de l'hydrodynamique relativiste et en faisant l'hypothèse que les variations de la force gravitationnelle dues à la déformation de ces corps se transmettent à la vitesse de la lumière (cf Will, 1981 et Weinberg ch. 10). Une résolution approchée au même ordre un des équations ainsi obtenues donne exactement les mêmes solutions que dans le cas précédent.

On peut parfois faire explicitement la résolution approchée des équations d'Einstein à l'ordre deux. A cet ordre, on obtient une infinité de solutions [2] ; pour obtenir une solution unique sous des conditions aux limites raisonnables, on ajoute implicitement ou explicitement dans le modèle mathématique une "jauge" qui est dans ce cas la "jauge harmonique" (on parle en général de système de coordonnées harmoniques). La solution unique ainsi obtenue coïncide encore avec l'unique solution approchée au même ordre deux des équations lorentziennes (Weinberg ch. 9.4 et Will, 1981). Ainsi, ici encore les deux modèles prédisent les mêmes observations, il est donc hors de question de les départager ainsi.

2.3) Première conséquence : équivalence observationnelle des deux théories.

Ainsi, ces deux théories dont l'une (la relativité générale) suppose l'espace-temps courbe et l'autre (la théorie lorentzienne) l'espace-temps plat ne peuvent pas être départagées par l'observation. Autrement dit, la validation expérimentale ne porte pas sur la nature conceptuelle de l'espace temps : elle contredit clairement la théorie newtonienne classique qui suppose que les effets gravitationnels se propagent à une vitesse infinie, mais pas la gravitation lorentzienne.

3) Equivalence théorique entre la cosmologie lorentzienne et la cosmologie einsteinienne.

Nous allons maintenant faire un pas de plus en montrant dans le cadre cosmologique, puis dans le cadre gravitationnel, que les deux théories sont mathématiquement équivalentes.

En ne supposant plus que la pression du fluide cosmologique est nulle, Souriau (1983) a montré que l'équivalence entre les modèles cosmologiques lorentzien et einsteinien était encore valable dans un autre cas particulier, celui d'un fluide dit "ultrarelativiste" dans lequel la relation entre pression et densité est particulièrement simple. Pour cela, il a procédé de plus à une légère modification de l'équation de Poisson en introduisant un terme de pression.

Du point de vue technique, l'équation usuelle de Poisson,

$$Div(\vec{g}(t)) = -4\pi G\rho(t)$$

(où G est la constante de Newton), est remplacée chez Souriau par :

$$Div(\vec{g}(t)) = -4\pi G\rho(t) + \Lambda$$

(où Λ est la constante cosmologique, cf Souriau, loc. cit., formule 1*4).

En fait, il n'est pas difficile de voir que ce calcul est valable pour tous les fluides parfaits à condition de modifier encore l'équation sous la forme

$$Div(\vec{g}(t)) = -4\pi G(\rho(t) + 3p(t))$$

où p représente la pression du fluide : la démonstration de Souriau faite dans le cas où $p(t) = 0$, reste valable, et ceci pour tout fluide parfait, et non plus pour quelques fluides particuliers (cf annexe).

Ainsi, les deux théories sont en fait mathématiquement équivalentes dans tous les cas. Cette équivalence est explicite dans les repères co-mobiles localement inertiels, ce qui suffit à établir l'équivalence générale, même si l'une des théories (la relativité générale) est formulée de manière covariante et l'autre non. De plus, elles s'éclairent mutuellement au sens suivant :

- Il existe une pression gravitationnelle pure négative, égale à l'opposé de la densité de matière-énergie. Cette pression a des conséquences non négligeables au niveau des modèles d'univers bien qu'elle soit trop faible pour être actuellement détectable en laboratoire. Son existence montre que la modification ci-dessus de l'équation de Poisson n'est pas purement ad hoc. De manière concomitante, il n'y a pas de mystère concernant la constante cosmologique : elle exprime simplement le fait que le fluide cosmologique est un fluide parfait de matière sans pression thermodynamique. Sur ce point, qui nécessiterait un long développement de caractère technique, nous renvoyons à Mizony (1993).

- le tenseur impulsion-énergie T - dont Einstein disait qu'il n'était qu'une "pièce de bois vulgaire" - est interprétable de la manière classique lorsqu'on se place dans un repère "localement inertiel".

- la loi de corps noir qui est à la base de la caractérisation du rayonnement cosmologique à 3 degrés Kelvin est une loi thermodynamique qui ne peut être introduite en toute rigueur que dans le cadre lorentzien. L'équivalence valide son utilisation en relativité générale. Plus généralement, des concepts thermodynamiques usuels comme par exemple celui d'entropie prennent un sens en relativité générale.

- l'hydrodynamique n'apparaît plus comme une simple technique mais comme permettant d'exprimer en termes lorentziens la gravitation relativiste.

- le système des équations d'Einstein apparaît comme une intégration partielle du système des équations lorentziennes en ce sens que, soit les équations sont identiques aux équations lorentziennes, soit elles en fournissent des intégrales premières.

- la formulation géométrique des équations d'Einstein est indépendante de l' "observateur" [2], ce qui n'est pas le cas en théorie lorentzienne, sauf si on se limite à des changements de repères lorentziens. Cette indépendance est ce que l'on appelle usuellement la propriété de covariance d'une théorie, ici des équations d'Einstein.

Remarque : toutes les conséquences ci-dessus reposent fondamentalement sur la lecture "classique" du tenseur impulsion-énergie dans un repère non seulement comobile mais localement inertiel [4]. Dans la mesure où il est plus pratique de travailler avec des coordonnées comobiles, pour éviter des confusions dans l'interprétation de ce tenseur, il vaudrait mieux dire que dans un repère comobile, il est interprétable en termes de co-densité et de co-pression, lesquelles prennent les noms usuels de densité et de pression uniquement dans les repères localement inertiels.

4) Equivalence théorique entre la gravitation lorentzienne et la gravitation einsteinienne.

Pour bâtir dans le cadre de la relativité générale un modèle gravitationnel local rendant compte du mouvement des corps célestes dans une petite partie de l'univers il faut se donner *a priori* un modèle cosmologique décrivant l'univers et qui fournira des conditions à l'infini assurant que le problème a une solution unique. Nous nous limiterons au cas où le modèle d'univers est homogène et isotrope, ce qui est le choix usuel. Le calcul est ensuite mené en supposant que le mouvement du système local étudié n'a pas d'influence sur l'univers. Sans cette hypothèse, légitimée par le fait que l'hypothèse d'homogénéité peut être considérée comme résultant d'une intégration des systèmes locaux, on ne sait pas résoudre le problème.

On utilise en fait deux métriques : celle du modèle cosmologique, donnée *a priori*, et celle, inconnue, rendant compte du système gravitationnel étudié [5].

- La première métrique est solution d'un système d'équations obtenu par simplification des équations d'Einstein grâce aux hypothèses d'homogénéité et d'isotropie.

- La deuxième métrique sera solution d'un autre système d'équations obtenu par simplification des équations d'Einstein provenant cette fois-ci d'hypothèses de symétrie propres au système gravitationnel que l'on étudie. Ce deuxième système est plus complexe que le premier.

La première métrique permet la description de ce que seraient les trajectoires des rayons lumineux en l'absence du système local étudié, cette référence est indispensable pour pouvoir confronter les résultats du calcul aux observations.

Par exemple, dans un modèle cosmologique d'univers vide et plat (métrique de Minkowski), on considère le soleil comme une sphère homogène et on calcule le champ gravitationnel à l'extérieur de cette sphère. Le modèle gravitationnel ainsi calculé rend compte, au premier ordre, des observations relatives au système solaire (ce calcul au premier ordre revient en fait à calculer directement avec la métrique de Schwarzschild [6]), ce qui montre sa fonctionnalité, malgré le caractère radical des hypothèses de symétrie faites ici.

Un problème se pose : les conditions aux limites imposées par le modèle cosmologique n'assurent pas l'unicité des solutions des équations décrivant le système gravitationnel étudié (Logunov et al., 1987), ce qui était déjà connu d'Einstein (Stachel 1986). Cependant, les différences entre ces solutions se traduisent par des termes négligeables par rapport à la précision actuelle des observations, situation toutefois provisoire vu l'accroissement rapide de cette précision.

Ce problème d'unicité, bien posé par Fock [7] (1959), a suscité historiquement diverses propositions (Eisenstaedt, 1982) visant à compléter la relativité générale par des équations assurant l'unicité de la solution. Celle qui semble s'imposer actuellement, due à Lanczos et de Donder (1922), est connue usuellement sous le nom de condition de coordonnées harmoniques (Fock, loc cit, Weinberg ch. 7.4, Will, 1981). Son interprétation physique est la suivante : de même que le champ électromagnétique est transmis par le photon, le champ gravitationnel est supposé transmis par une particule de masse nulle, et les équations supplémentaires introduites traduisent simplement le fait que le graviton est de spin 2, ce qui implique une métrique de référence.

Considérons le même problème de calcul d'un modèle gravitationnel local dans le cadre lorentzien à la fois du point de vue cosmologique et gravitationnel ; la résolution des équations, moyennant les conditions à l'infini, fournit cette fois une solution unique. Ceci est bien connu lorsqu'on suppose l'univers vide ou à pression hydrodynamique nulle ; nous avons expliqué en 3 qu'en fait, ce résultat vaut même avec une pression non nulle, ce qui est le cas le plus général envisagé actuellement.

Le problème de savoir si la coïncidence des solutions à l'ordre deux dans les cadres lorentzien et einsteinien se poursuit à des ordres supérieurs, voire à tous les ordres, est ouvert. Ce problème semble ardu, il est toutefois possible de démontrer mathématiquement l'existence théorique d'une jauge complétant la relativité générale (c'est-à-dire assurant l'unicité de la solution des équations), coïncidant à l'ordre deux avec la jauge harmonique, et assurant la coïncidence des solutions à tous les ordres. En fait l'existence de cette jauge assure même l'équivalence mathématique des deux théories. Il existe donc une manière de compléter la relativité générale qui permet de la rendre équivalente, mathématiquement parlant, à la théorie post-newtonienne. Il est tentant de conjecturer que la jauge abstraite qui assure cette équivalence n'est autre que la jauge harmonique qui a elle un sens physique précis puisqu'elle exprime que le graviton est de spin 2. Il est à noter qu'une équivalence abstraite entre la théorie lorentzienne et la relativité générale a déjà été établie par Deser (1970).

L'équivalence mathématique des deux théories ne doit pas masquer les différences qualitatives qu'on peut formuler comme suit : la théorie einsteinienne s'attache à trouver une métrique telle que les corps en chute libre suivent les géodésiques de cette métrique, tandis que la théorie lorentzienne, partant des géodésiques de l'espace-temps plat de Minkowski, s'attache à considérer les trajectoires des corps en chute libre comme déformations de ces géodésiques dues aux potentiels newtoniens et postnewtoniens.

5) Des modèles gravitationnels aux concepts d'espace-temps.

Nous avons examiné deux théories permettant de créer des modèles d'univers ou des modèles gravitationnels : la théorie lorentzienne et la théorie einsteinienne. Nous avons vu que ces théories conduisent à des modèles équivalents et donc indépartageables par l'observation, qu'il s'agisse de gravitation ou de cosmologie. En même temps elles apparaissent comme contradictoires en ce sens que l'une suppose l'espace-temps plat [8] alors que l'autre le suppose courbe ; nous allons en conclusion revenir sur la comparaison de ces deux théories puis regarder de plus près le problème de l'espace-temps.

5.1) Comparaison des deux théories dans leur rapport à l'observation.

Le problème de la confrontation de la relativité générale aux observations est rarement posé en tant que tel. Nous avons souligné que cette confrontation passe obligatoirement par l'utilisation du formalisme post-newtonien (ppn-formalism). Ainsi, *a priori*, c'est la case 3 de notre tableau qui est l'objet de tests. Mais si l'on examine de plus près la nature des observations, c'est en fait la case 2, c'est à dire la théorie lorentzienne approchée qui est confrontée aux observations, dans la mesure où ce que l'on observe, ce sont des déformations de géodésiques. Les mots employés sont tout à fait caractéristiques : *avance* (du périhélie de Mercure), *déviation* (des rayons lumineux au voisinage du Soleil), *retard* (de l'écho radar), etc... Pour ces observations, la théorie lorentzienne permet de calculer directement les approximations de la case 2. C'est pourquoi on ne peut pas la départager de la théorie einsteinienne.

5.2) Comparaison théorique des modèles.

Du point de vue théorique, c'est la relativité générale qui apparaît comme englobante par rapport à la théorie lorentzienne puisqu'elle permet de retrouver comme cas limites (mais en des sens différents), et la relativité restreinte, comme cas particulier d'un univers vide de matière, et la théorie de Newton comme approximation à l'ordre 0. Par ailleurs d'un point de vue conceptuel mathématique la relativité générale apparaît comme plus élaborée, faisant appel aux concepts de courbure et de géodésique sur une variété et les équations d'Einstein apparaissent comme des "intégrales premières" des équations de l'hydrodynamique relativiste utilisées dans la théorie lorentzienne, qui se trouvent donc partiellement résolues. Ainsi, la théorie einsteinienne explique celle de Newton de la même manière que cette dernière explique le modèle de Kepler du mouvement des planètes en ce sens qu'elle permet de le retrouver comme modèle "local". Remarquons d'ailleurs qu'en la complétant par d'autres jauges, la relativité générale peut nous fournir d'autres théories de la gravitation (cf le ppn-formalism Will).

Ces relations entre les deux théories peuvent aussi se décrire en termes de synthèse "la relativité générale est une synthèse entre la gravitation newtonienne et la relativité restreinte" (Luminet, 1994). Cette synthèse a lieu dans un cadre théorique plus abstrait et englobant. L'existence de la théorie lorentzienne montre qu'on peut réaliser cette même synthèse, ou tout au moins un assemblage des deux théories, de Newton et de la relativité restreinte, résistant à l'épreuve de l'expérience.

De plus, la théorie einsteinienne réduit des faits premiers de ces théories, newtonienne d'une part et de la relativité restreinte d'autre part (des catégories distinctes) à des apparences, ou bien des "faits actuels" à des "faits virtuels" (Granger, 1992 p 296). Par exemple, dans la théorie newtonienne, l'existence de l'attraction universelle est un fait premier, directement relié à une vérification empirique, nécessaire pour le calcul des trajectoires des corps, alors que dans la théorie einsteinienne ces trajectoires se déduisent simplement de la géométrie du modèle. En ce sens, la théorie einsteinienne est une géométrie où l'on introduit la notion d'énergie, alors que la théorie lorentzienne, dans sa présentation classique, n'est pas réductible à une géométrie, et est plus "physique".

Nous avons insisté jusqu'ici sur une hiérarchie qui place la théorie einsteinienne "audessus", en ce sens qu'elle explique en un certain sens la théorie lorentzienne. Nous avons vu que en un autre sens, la théorie lorentzienne éclaire la relativité générale en permettant d'interpréter le tenseur impulsion-énergie.

En ce qui concerne les modèles cosmologiques, le modèle post-newtonien peut aussi s'obtenir comme on l'a vu au §3, à partir de modèles einsteiniens, y compris la modification de l'équation de Poisson qui pourrait *a priori* passer pour une adaptation ad hoc de la théorie post-newtonienne : il s'agit en fait de tenir compte d'une pression habituellement négligée car non mesurable expérimentalement aujourd'hui. Cette pression est de nature purement gravitationnelle, en ce sens la théorie einsteinienne éclaire ici encore la théorie post-newtonienne.

Cet éclairage mutuel des deux théories, déjà détaillé à propos des modèles cosmologiques, montre qu'elles apparaissent toutes deux comme indispensables en particulier pour la formulation des concepts. Du point de vue pratique, rappelons de plus que les concepts lorentziens s'introduisent naturellement dans l'interprétation des observations.

5.3) Le problème de l'espace-temps.

Pour lever la contradiction concernant la courbure de l'espace-temps, nous devons adopter un point de vue plus épistémologique nous permettant de proposer une ou plusieurs solutions.

5.3.1) Comment traduire des principes physiques en un modèle mathématique ?

Tout principe physique même s'il s'exprime dans un énoncé du langage courant, suppose un minimum de symbolisme mathématique. Par exemple le principe de la conservation de l'énergie, le principe de covariance suivant lequel "les lois de la physique ne dépendent pas de l'observateur", ne peuvent être développés théoriquement et se traduire en énoncés confrontables aux observations que moyennant une interprétation mathématique. D'autres, comme le principe d'attraction universelle de Newton, ne peuvent pratiquement pas s'exprimer sans appel à un symbolisme mathématique.

Cependant la traduction des principes physiques en axiomes mathématiques n'est pas une opération complètement transparente et est l'une des sources de difficultés en relativité générale. Examinons par exemple le principe des géodésiques en remarquant que le mot géodésique sous-entend déjà une traduction mathématique d'un phénomène physique : tout corps en chute libre suit une géodésique d'un l'espace-temps einsteinien.

Une traduction immédiate de ce principe est la suivante : un espace-temps einsteinien est une variété riemannienne dans laquelle la notion de géodésique est parfaitement définie. Une géodésique joignant deux points est un chemin de longueur minimale entre ces deux points. Soulignons l'adjectif minimal et non pas minimum. En mathématiques, les géodésiques sont souvent supposées indéfiniment différentiables, et en tout cas, on ne sait les calculer et assurer l'unicité locale qu'en les supposant au moins deux fois différentiables : l'hypothèse d'existence d'une différentielle continue à l'ordre 1 d'une courbe permet de parler de sa longueur et celle d'une différentielle continue à l'ordre 2 permet d'exhiber un système différentiel dont les géodésiques sont solutions. Ces hypothèses de différentiabilité sont tout à fait courantes et en général implicites en physique. Elles sont utiles pour pouvoir calculer mais n'ont pas de justification proprement physique :

> "Je vous ai dit plus d'une fois que je suis un partisan acharné non pas des équations différentielles, mais bien du principe de relativité générale (i.e. du principe de covariance), dont la force heuristique nous est indispensable. Or en dépit de bien des recherches, je n'ai pas réussi à satisfaire le principe de relativité générale autrement que grâce à des équations différentielles ; peut-être quelqu'un découvrira-t-il une autre possibilité, s'il cherche avec assez de persévérance."
>
> A. Einstein dans la conclusion de sa lettre à Pauli du 2 Mai 1948.

La volonté de faire un lien explicite entre relativité générale et mécanique quantique a conduit peu à peu à envisager que les géodésiques puissent être non différentiables. Cette idée remonte aux travaux de Feynman (1965) puis Holland (1993) qui ont finalement conduit à considérer des trajectoires fractales dans des cadres classiques ou relativistes (Abbott et Wise 1985, Nottale 1993, Lygeros 1994). Il est donc légitime de se poser la question de la pertinence des hypothèses de différentiabilité pour la traduction du principe des corps en chute libre.

5.3.2) Espace de repérage.

Une théorie mathématique peut toujours se ramener, au moins *a posteriori* et théoriquement, à la donnée d'une axiomatique qui sera ensuite manipulée suivant les lois de la logique usuelle. Mais lorsque cette théorie doit être utilisée comme modèle physique, la mise en correspondance avec la réalité suppose l'utilisation d'un "référentiel" ou espace de repérage, citons ici Granger (loc cit, p. 38) : "Ce que nous appelons référentiel est donc un espace de représentation adéquat des phénomènes". Nous préférons dans la suite parler d'espace de repérage car "référentiel" a un sens technique en relativité générale. Cet espace de repérage est un objet mathématique ; pour la théorie de Newton, il s'agit de l'espace euclidien, pour la théorie de la relativité restreinte, de l'espace-temps plat de Minkowski, pour la relativité générale, d'une variété différentielle à quatre dimensions, pour la mécanique quantique, de l'espace des états (classes de vecteurs d'un espace de Hilbert). Il sert à définir ce que Granger (p.47) appelle des "énoncés indexés" : tout phénomène physiquement mesurable est paramétré par un point de cet espace de repérage.

Les difficultés sous-jacentes à ces choix d'espaces de repérage sont soulignées par un physicien (Felden,1992) : "Cependant, une hypothèse fondamentale semble jusqu'à présent avoir peu prêté à discussion, elle consiste à identifier de manière axiomatique l'espace physique concret d'observation et d'expérimentation (la source d'informations opérationnelles) à un espace géométrique formel, c'est-à-dire abstrait" (p.5) ou encore : "l'hypothèse fondamentale ...consiste à identifier formellement à l'ensemble physique P un ensemble géométrique G de représentation" (p. 13, P désigne "l'ensemble universel des phénomènes physiques identifiables c'est à dire observables, expérimentables et mesurables ..."). Et il souligne la fragilité de cette hypothèse.

Cette identification d'une partie de la réalité physique à un objet mathématique ne va pas de soi, en fait tout le problème est de savoir quelles propriétés mathématiques de ces espaces ont une signification physique. Dans certains cas, ce problème est clairement posé : par exemple, à toute particule, classifiée par énergie et spin, est associée, dans le cadre de la relativité restreinte, une représentation du groupe de Poincaré, mais chacun admet que la réciproque n'est pas nécessairement vraie.

La question de savoir si les propriétés de courbure de l'espace-temps, voire la notion d'espace-temps, ont une signification physique, doit donc être posée. Une réponse négative signifierait que la question de savoir si l'espace-temps est courbe ou plat n'est pas une question physique. En tout cas, dans les catégories de pensée définies par Granger et Felden, il n'y a pas de contradiction entre le fait que l'espace de repérage de la théorie lorentzienne soit plat et celui de la relativité einsteinienne courbe. De fait, ces deux choix apportent des informations complémentaires sur l'ensemble des phénomènes physiques.

Bien entendu, ceci remet en cause le statut d'affirmations comme "la matière courbe l'espace-temps" énoncées dans un langage qui pourrait laisser croire qu'il s'agit d'un fait empirique alors qu'il s'agit d'une affirmation théorique dans le cadre de la relativité générale, qui n'est susceptible d'aucune vérification expérimentale. Il en est de même plus généralement de toute déclaration sur l'espace-temps. Toutefois, dans l'espace-temps lorentzien, on pourrait dire que la matière courbe les géodésiques de la métrique de Minkowski et cette affirmation sur le mouvement peut être confrontée à l'observation. On peut considérer que les deux théories lorentzienne et einsteinienne sont, non pas deux théories de l'espace-temps, mais deux théories du mouvement utilisant comme cadre de description des espace-temps mathématiquement différents.

Enfin le fait de ne plus confondre l'espace-temps physique et l'espace de repérage mathématique permet aussi de mieux poser les problèmes délicats d'irréversibilité du temps. Par exemple, il n'y a pas forcément contradiction entre le fait que le temps de la théorie soit réversible et que celui de l'espace-temps physique ne le soit pas.

6) Conclusion.

D'une certaine manière, le problème de l'espace, qui était au dix-neuvième siècle, avec l'apparition des géométries non euclidiennes, un problème de mathématicien devient ici un problème de physicien. Pour les mathématiciens, la vérité d'une géométrie provenait à l'époque de ce qu'elle traduisait fidèlement les propriétés de l'espace, cette concordance pouvant être connue soit intuitivement (elle est alors une évidence) soit expérimentalement (cette solution est suggérée par Gauss et Lobatchevski). Cette voie s'étant révélée vaine, on sait que l'issue finale fut un changement dans la notion de vérité mathématique : les deux géométries sont également vraies. Il est sans doute prématuré aujourd'hui de dire quelle sera l'issue pour les physiciens du problème de l'espace. La réponse n'est pas si simple : on peut évidemment soutenir que la physique produit des modèles, plus ou moins convenables et efficaces et, en suivant Popper, qu'en conséquence, il n'y a pas vraiment de question de vérité ou plus exactement que s'il y a des modèles faux, il n'y a pas de modèles vrais. Ainsi, la théorie lorentzienne et la théorie einsteinienne apparaissent comme deux théories conceptuellement distinctes mais physiquement équivalentes. Ce serait cependant oublier que lorsqu'il s'agit de l'étude de l'univers, il est difficile de renoncer à l'idée que les modèles physiques ont un rapport assez étroit avec la réalité. Par exemple pour Galilée, la question de savoir si la terre tourne autour du soleil ou si au contraire le soleil tourne autour de la terre était une question de vérité et non simplement de relativité du mouvement, de même pour Einstein qui d'après Coret (1997) "considère que la théorie n'est pas seulement une ¡¡construction mentale¿¿, image ou symbole du réel, mais qu'elle est trace d'un réel qui est, dans son essence, géométrique. Plus nous saurons de géométrie ..., plus nous nous rapprocherons de ce réel puisque ¡¡ les lois de la nature sont des lois mathématiques¿¿, comme il (*Einstein*) le soutient dans ce qu'il appelle lui-même son ¡¡crédo des sciences de la nature¿¿ ". On aborde ici des questions philosophiques qui dépassent en partie le cadre de ce travail mais pour l'étude desquelles la voie tracée par Felden et Granger nous semble maintenant incontournable.

Notes :

1) Sur l'histoire des modèles d'univers en expansion : c'est à A. Friedmann (1922) que l'on doit l'étude d'une famille de modèles d'univers isotropes. Une étude d'une famille plus complète fut faite par G. Lemaître en 1927. C'est à Robertson, en 1935, et Walker, en 1936, que l'on doit l'étude complète des modèles d'univers isotropes dans le cadre de la relativité générale. Cependant, il faut signaler que les premiers exemples de modèles d'univers en expansion ont été décrits par W. de Sitter (1917) et déjà par V. Varicak (1910) ! Ce fait trop peu connu mérite d'être signalé.

2) Dans les milieux relativistes, il y a deux manières de considérer la relativité générale, suivant que l'on répond par oui ou par non à la question de savoir s'il faut une jauge. La position dite orthodoxe (en particulier celle d'Einstein) consiste à considérer la relativité générale sans utiliser de jauge, ce qu'il exprime sous la forme suivante dans une lettre à Painlevé en 1921 :

Lorsque dans le ds^2 de la solution à symétrie centrale statique, on introduit à la place de r n'importe quelle fonction de r, on n'obtient pas une nouvelle solution, car la grandeur r n'a en elle-même aucune signification physique [...]. Il faut sans cesse garder à l'esprit que les coordonnées ne possèdent pas de signification physique, ce qui veut dire qu'elles ne représentent pas le résultat d'une mesure, seules les conclusions, accessibles par l'élimination des coordonnées, peuvent prétendre à une signification objective. L'interprétation métrique de la grandeur ds n'est en outre pas "pure imagination" mais le noyau profond de la théorie elle-même. (cité d'après Eisenstaedt, 1982, p. 174).

Autrement dit, n'ont de signification objective que les conclusions indépendantes du choix de coordonnées, c'est à dire indépendantes du choix d'une jauge. Cette position orthodoxe ne permet une confrontation aux observations que si l'on considère une solution approchée à l'ordre 1. Dans ce cas en effet, en l'absence d'un choix de jauge, il n'y a certes pas unicité de la solution, mais les différences de prédiction entre solutions différentes sont d'un ordre de grandeur plus faible que les différences dues à l'approximation d'une part, aux erreurs de mesure d'autre part. Mais si l'on considère une solution approchée à l'ordre 2, nécéssaire pour l'étude des champs forts (étoiles à neutrons par exemple), alors la non unicité devient "observable", et la théorie en l'absence de jauge est donc non prédictive.

3) En général, le concept d'observateur est utilisé sans définition précise, ce qui peut être source d'ambiguités. Une définition précise se trouve chez Segal (1976), où un observateur est une classe d'équivalence de repères.

4) Rappelons qu'un repère associé à un corps en chute libre est appelé repère comobile mais que les formules de la relativité restreinte ne s'appliquent que dans les repères, appelés localement inertiels (Weinberg, 3.3), où la métrique est exactement celle de Minkowski. L'interprétation ci-dessus n'est valable que dans les repères comobiles qui sont de plus localement inertiels.

5) Il est souvent question dans la littérature (Will, 1981) des théories bimétriques de la gravitation ; ici il ne s'agit pas d'une théorie bimétrique, mais bien du rapport entre deux problèmes distincts de la relativité générale, celui des modèles d'univers et celui de la gravitation (étude locale). J.-P. Bourguignon par exemple a souligné ce point lors d'un cycle de conférences sur la relativité générale à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon en 1995.

6) Cette métrique de Schwarzschild pose par ailleurs beaucoup de problèmes, on pourra se reporter à Abrams (1989), Mizony (1993), Narlikar (1988), Stavroulakis (1986) ...

7) L'ouvrage de Fock se distingue par un grand souci de rigueur mathématique, ce qui l'amène à poser nettement les problèmes non seulement d'unicité mais encore de distinction entre les notions de covariance et d'invariance.

8) Il existe une théorie de la gravitation dans laquelle l'espace-temps est plat et identifié à R^4, strictement équivalente à la relativité générale (Deser, 1970). Elle est restée relativement négligée sans doute du fait que, contrairement à la théorie lorentzienne, elle

n'intervient pas dans la confrontation de la relativité générale aux observations. Ce modèle, signalé par Weinberg (ch. 7.6) est bien présenté par Lévy-Leblond (1979).

Bibliographie

L. F. ABBOTT and M. B. WISE : Dimension of a quantum mechanical path ; Am. J. Phys. Vol. 49 (1981)

L. S. ABRAMS : Black holes : the legacy of Hilbert's error ; Can. J. Phys. Vol 67 pp. 919-926 (1989).

T. DAMOUR : Testing gravity to second post-Newtonian order : a field theory approach ; Phys. Rev. D(3) Vol 53 n^o 10 (1996).

A. CORET : L'a-préhension du réel ; éditions des archives contemporaines, Amsterdam (1997).

S. DESER : Self-Interaction and Gauge Invariance ; General Relativity and Gravitation Vol 1, n^{o}1 pp.9-18 (1970).

T. De DONDER : La gravifique Einsteinienne ; Gauthier-Villars, Paris (1921).

J. EISENSTAEDT ; Histoire et singularités de la solution de Schwarzschild ; Arch. for history of exact sciences, vol 27 n^o 2, Springer-Verlag (1982).

J. EISENSTAEDT ; La relativité générale à l'étiage 1925-1955 ; Arch. for history of exact sciences, vol 35 n^o 2, Springer-Verlag (1986).

M. FELDEN : Le modèle géométrique de la physique. Masson, Paris (1992).

R. FEYNMAN et A. HIBBS : Quantum Mechanics and Path Integrals. Mc Graw-Hill, (1965).

V. FOCK : The theory of space, time and gravitation ; Pergamon Press, London (1964).

A. FRIEDMANN : Uber die Krummung des Raumes ; Z. Phys., vol 10, p.377, (1922)

G. G. GRANGER : La vérification Ed. O. Jacob, Paris (1992).

P. R. HOLLAND : The quantum theory of motion ; Cambridge uni. press, 1993.

K. LANCZOS : Ein vereinfacendes Koordinatensystem fur die Einsteinschen Gravitationsgleichungen ; Phys. Zeitschrift, 23, (1922).

J.-M. LEVY-LEBLOND : The Importance of Being (a) Constant ; in Problems in the foundations of Physics, pp. 237-263, Soc. Italiana di Fisica, Bologna (1979).

A. LOGUNOV, Y. LOSKUTOV et Y. CHUGREEV : Does general relativity explain gravitational effects ? ; Moscou (1987).

J.-P. LUMINET in Le Temps et sa Flèche ; E. KLEIN et M. SPIRO, Ed. Frontières (1994).

N. LYGEROS : Panorama : Fractals et posets en relativité ; Annales de la Fondation Louis de Broglie, vol.19 n^{o}4, pp 273-290 (1994).

E.A. MILNE : A Newtonian expanding universe ; Q.J. Math., Vol 5, pp 64-72, (1934).

C.W. MISNER, K.S. THORNE et J.A. WHEELER ; Gravitation ; Freeman, San Francisco (1973).

M. MIZONY : La relativité générale aujourd'hui ; publication lafp (université Lyon1) n^o. 12 (1993) 216 p.

J. V. NARLIKAR : The Schwarzschild solution : some conceptual difficulties, Found. Phys. 18 n^o. 6 pp 659 - 668 (1988).

L. NOTTALE : Fractal space-time and microphysics; World Scientific (1993).
I. SEGAL : Mathematical cosmology and extragalactic astronomy; Academic Press, New-York (1976).
W. de SITTER : in Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam 1917).
J.-M. SOURIAU : Géométrie et Thermodynamique en cosmologie,in ¡¡Géométrie symplectique et Physique mathématique¿¿ CNRS Paris (1975).
J.-M. SOURIAU : Un modèle d'univers confronte aux observations, in Dynamics and Processes, Lecture Note in Math. vol 1031, Springer-Verlag (1983).
J.-J. STACHEL : Einstein's search for general covariance, 1912-1915; pp 63-100, in Einstein and the history of general relativity, North Andower, MA, (1986).
N. STAVROULAKIS : Mathématique et trous noirs; Gazette des mathématiciens, n^o. 31 pp 119 -132 (1986).
V. VARICAK : Anwendung der Lobatshefskijschen Geometrie in der Relativtheorie; Physikalische Zeitschrift, vol 11, pp 93-96 (1910).
V. VARICAK : Uber die nichteuklidische Interpretation der Relativtheorie; Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, vol 21 pp 103-128 (1912).
S. WEINBERG : Gravitation and cosmology. John Wiley, New-York (1972).
C. WILL : Theory and experiments in gravitational physics. Cambridge university press, London (1981).

Annexe

Les équations de la cosmologie Newtonienne revisitées.

Soit $(\mathcal{U}, g)$ un modèle d'univers isotrope (i.e. un modèle de Friedman-Lemaître). La forme de Robertson-Walker d'un tel modèle s'écrit :

$$(1) \qquad ds^2 = dt^2 - R^2(t)(dr^2 + f_\epsilon^2(r)d\omega^2)$$

où $f_\epsilon(x) = x,\ sin(x),\ sh(x)$ suivant les valeurs 0, 1 et -1 du signe ϵ de la courbure de la partie espace de l'univers, et où $d\omega$ désigne l'élément d'angle sphérique ($d\omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$).

Pour une métrique d'univers de la forme (1) les équations d'Einstein se réduisent à :

$$(2) \qquad 8\pi G T_o^o = 3(\frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2}),$$

$$(3) \qquad 8\pi G T_1^1 = \frac{\epsilon}{R^2} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + 2\frac{\ddot{R}}{R},$$

et les identités de Bianchi se réduisent à l'équation de conservation sur le tenseur T_ν^μ :

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}(R^3 T_o^o) = 3R^2 \dot{R} T_1^1 (= R^2 \dot{R} T_i^i).$$

Comme l'interprétation thermodynamique est globale, employons la dynamique Newtonienne correspondant à un tel fluide parfait. Pour cela il n'y a qu'à suivre l'exemple traité par J. M. Souriau pour retrouver ou reconstruire les mêmes modèles d'univers;

plus précisément cet auteur montre que lorsque la pression du fluide cosmique est nulle, l'équation de Poisson, l'équation d'Euler et l'équation de continuité permettent de retrouver les mêmes équations, la même dynamique, mais dans un cadre Newtonien. Seule l'interprétation géométrique n'est plus la même.

En mécanique Newtonienne, un point matériel qui occupe la position $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ à l'instant t gravite selon l'équation :

$$(5) \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \ ,$$

où $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r}, t)$ désigne le champ de gravitation.

Supposons que $t \ \rightarrow \ \vec{r}(t)$ décrive la trajectoire dans $\mathbb{R}^3$ d'un point comobile avec le fluide parfait de densité $\rho = \rho(t) = T^o_o$ et de pression $\vec{p} = \vec{p}(t)$ de composantes $p(t) = T^1_1$, emplissant de manière homogène et isotrope l'espace $\mathbb{R}^3$.

Notons $\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ la vitesse en chaque point $\vec{r}$.
En interprétant la loi Newtonienne (5) comme l'équation des géodésiques d'une connexion abstraite sur $\mathbb{R}^4$, J. M. Souriau remarque que le champ $\vec{g}$ est de la forme

$$(6) \qquad \vec{g}(t) = -\lambda(t)\vec{r}(t) \ ,$$

à une constante additive près, que l'on peut supposer nulle (par changement de l'origine de l'espace).

Dans ce cadre $\vec{v}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires, notons donc :

$\vec{v}(t) = H(t)\vec{r}(t)$, (H s'interprète comme le coefficient de Hubble), alors on trouve que l'équation d'Euler $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}(t)$ s'écrit, en utilisant (5) et (6) :

$$(7) \qquad \frac{dH}{dt} + H^2 = -\lambda.$$

Nous avons ainsi montré que la mécanique Newtonienne est compatible avec une expansion, devant vérifier l'équation d'Euler (7) .
Utilisons maintenant la thermodynamique en disant que le fluide cosmique est parfait. La loi de conservation de ce fluide s'écrit alors dans les notations précédentes :

$$(8) \qquad \frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0.$$

Nous donnerons plus loin l'interprétation Newtonienne (conservation de l'énergie). En tout cas, pour une pression nulle, elle se réduit à la conservation de la masse.

Prenons maintenant l'équation de Poisson qui relie le contenu énergétique au champ gravitationnel $\vec{g}(t)$. Pour un fluide sans pression elle se réduit à : $Div(\vec{g}(t)) = -4\pi G\rho(t)$.
Prenons l'équation de Poisson suivante, qui tient compte de la pression :

$$(9) \quad Div(\vec{g}(t)) = -4\pi G(\rho(t) + 3p(t)).$$

En utilisant l'équation (6) et l'équation d'Euler (7), l'équation de Poisson s'écrit alors :

$$(10) \quad 3(\frac{dH}{dt} + H^2) = -4\pi G(\rho(t) + 3p(t)).$$

Dans ce cadre Newtonien, il nous reste donc deux équations à résoudre : les équations (8) et (10) , puis l'équation d'Euler permet alors de calculer le champ gravitationnel newtonien $\vec{g}(\vec{r}, t)$.

Remarque fondamentale : Les équations (8) et (10) admettent une intégrale première :

$$(11) \qquad 3(H^2 + \frac{K}{||\vec{r}||^2}) = 8\pi G\rho,$$

où K est une constante. Cette constante K est donc fixée par des conditions initiales. Elle a également une interprétation Newtonienne lorsque K est positive, celle de la conservation de l'énergie (cinétique plus potentielle) d'une particule comobile avec le fluide cosmique.

Il est évident que si on note $R(t) = ||\vec{r}(t)||$, ces équations Newtoniennes (8), (10) et (11) sont strictement équivalentes aux équations (4), (3) et (2) de la relativité générale (on a pris ici la vitesse de la lumière égale à 1). Si l'interprétation du temps t, du coefficient de Hubble H et de la densité ρ sont les mêmes, la constante d'intégration K n'a pas d'interprétation en terme de courbure d'espace. Le champ gravitationnel $\vec{g}$, dans cette présentation Newtonienne, a bien la signification d'un champ d'accélération $\vec{g} = \frac{d^2R}{dt^2}$.

Ainsi nous venons de démontrer le résultat suivant :

théorème : Un modèle d'univers homogène et isotrope fourni par la relativité générale est identique, au niveau des équations, au modèle correspondant basé sur la thermodynamique relativiste, la mécanique Newtonienne et l'équation de Poisson modifiée.

Autrement dit **les théories Einsteinienne et (post) Newtonienne de la cosmologie sont mathématiquement équationnellement équivalentes**.