POLYNOMES MULTIVARIES ET COMBINATOIRE

O. Marguin — 18 mai 2011

Par son efficacité, le calcul formel sur les polynômes multivariés permet de résoudre de façon spectaculaire certains problèmes combinatoires. Avant d'en voir des exemples, nous rappelons quelques propriétés des séries génératrices. Ce chapitre est accompagné d'une feuille d'illustrations en Maple.

1 Séries génératrices

1.1 Cas d'une variable

Soit $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments d'un corps K (dans tout ce qui suit, K sera le corps des rationnels). Nous noterons $U(X)$ sa *série génératrice*, c'est-à-dire la série formelle de $K[[X]]$ définie par :

$$U(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \, X^n.$$

Par exemple, la suite constante égale à 1 a pour série génératrice :

$$1 + X + X^2 + \cdots = \frac{1}{1-X}$$

1.2 Récurrences linéaires

Supposons que la suite (u_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre k de la forme :

$$u_n = a_1 \, u_{n-1} + a_2 \, u_{n-2} + \cdots + a_k \, u_{n-k} \quad (n \geqslant k).$$

Alors U vérifie :

$$U(X) = P(X) + U(X)(a_1 \, X + a_2 \, X^2 + \cdots + a_k \, X^k)$$

où $P(X)$ est un polynôme de degré $k-1$ dépendant des a_i et des valeurs initiales $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ (cf [3], p.542). Ainsi :

$$U(X) = \frac{P(X)}{1 - a_1 \, X - a_2 \, X^2 - \cdots - a_k \, X^k}.$$

Par exemple, la série génératrice $F(X)$ de la suite de Fibonacci définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$ vérifie l'équation :

$$F(X) = \frac{X}{1 - X - X^2}$$

ce qui permet, avec Maple, de calculer son $n^{\text{ième}}$ terme très rapidement. Les deux fonctions-clés sont `series` et `coeff`. Rappelons que le terme général s'obtient en décomposant F(X) en éléments simples :

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \varphi X} - \frac{1}{1 - \overline{\varphi} X} \right)$$

où φ est le nombre d'Or, d'où :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \big(\varphi^n - \overline{\varphi}^n \big).$$

Maple possède également la fonction `rsolve` qui résout les récurrences linéaires : voir feuille d'illustration, section 1.

Remarque.— Dans la feuille d'illustration, section 2, il y a un exemple de récurrence polynômiale (tiré de [2], p. 177) où on utilise la fonction `guessgf` pour trouver la série génératrice.

1.3 Cas de plusieurs variables

Si $(u_{i_1,\ldots,i_k})$ est une suite multi-indicée, sa *série génératrice* $U(X_1,\ldots,X_k)$ est la série formelle de $K[[X_1,\ldots,X_k]]$ définie par :

$$U(X_1,\ldots,X_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k \geqslant 0} u_{i_1,\ldots,i_k}\, X_1^{i_1}\ldots X_k^{i_k}.$$

Par exemple (cf [1] p.58 et p.99) :
– la suite double des coefficients du binôme $\binom{n}{k}$ a pour série génératrice :

$$\sum_{n,k\geqslant 0}\binom{n}{k}X^nY^k = \sum_{n\geqslant 0}X^n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y^k\right) = \sum_{n\geqslant 0}X^n(1+Y)^n = \frac{1}{1-X(1+Y)},$$

– la série génératrice du minimum de k entiers $u_{i_1,\ldots,i_k} = \min(i_1,\ldots,i_k)$ est donnée par :

$$U(X_1,\ldots,X_k) = \frac{X_1X_2\ldots X_k}{(1-X_1)(1-X_2)\ldots(1-X_k)(1-X_1X_2\ldots X_k)}.$$

La fonction `mtaylor` de Maple (développement de Taylor à plusieurs variables) permet d'obtenir les premiers termes d'une série génératrice multivariée. Si l'on cherche un coefficient bien précis, il est souvent plus efficace de développer la série génératrice par rapport à l'une des variables avec `series`, extraire le coefficient du degré souhaité avec `coeff`, puis recommencer avec une autre variable, etc.

2 Dénombrement

2.1 Premier exemple

De combien de façons peut-on vider un fût de bière de 100 litres en utilisant un demi (récipient d'un quart de litre), un sérieux (un demi-litre) et un formidable (un litre), sans tenir compte de l'ordre des opérations ?

Pour $n \geqslant 0$, notons u_n le nombre de façons de vider un fût de n quarts de litres. Alors u_n est le nombre de triplets d'entiers naturels (d,s,f) vérifiant :

$$d + 2\,s + 4\,f = n,$$

donc u_n est le coefficient en X^n dans le développement de :

$$\begin{aligned} U(X) &= (1+X+X^2+\cdots)(1+X^2+X^4+\cdots)(1+X^4+X^8+\cdots) \\ &= \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^4)}. \end{aligned} \tag{1}$$

On trouve $u_{400} = 10201$: voir la feuille d'illustration, section 3. On y verra également un exemple d'utilisation de la fonction `rgf_findrecur` qui permet de deviner une récurrence linéaire, ainsi que le calcul de l'expression de u_n d'abord sans `rsolve`, puis avec.

2.2 Deuxième exemple : partitions d'entiers

Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. Une *partition de* n est une représentation de n en somme d'entiers $\geqslant 1$, qu'on appelle les *sommants* de la partition (cf [1], p.104). Soient p_n le nombre de partitions de n et $p_{n,m}$ le nombre de partitions de n en m sommants. On a par exemple :

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$$

donc $p_5 = 7, p_{5,1} = p_{5,4} = p_{5,5} = 1$, $p_{5,2} = p_{5,3} = 2$.

Si on note x_i le nombre de sommants égaux à i, il est clair que :

– la donnée d'une partition de n équivaut à la donnée d'une solution en nombres entiers $x_i \geqslant 0$ de :

$$x_1 + 2\,x_2 + \cdots + n\,x_n = n,$$

– si en plus on veut m sommants, il faut ajouter la condition :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m.$$

Par conséquent, la série génératrice de $(p_{n,m})$ est :

$$\begin{aligned} P(X,Y) &= 1 + \sum_{1\leqslant m\leqslant n} p_{n,m}\,X^n\,Y^m \\ &= \frac{1}{(1-XY)(1-X^2Y)(1-X^3Y)\dots} \end{aligned} \tag{2}$$

puisque

$$\prod_{i\geqslant 1} \frac{1}{1-X^i\,Y} = \prod_{i\geqslant 1}\Big(\sum_{x_i\geqslant 0} X^{ix_i}\,Y^{x_i}\Big) = \sum_{x_1,x_2,\dots\geqslant 0} X^{x_1+2x_2+\cdots}\,Y^{x_1+x_2+\cdots}$$

et la série génératrice de (p_n) s'obtient en faisant $Y = 1$ dans la précédente :

$$\frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)\dots}. \tag{3}$$

2.3 Structures décomposables

Les coefficients des séries génératrices (1), (2), (3) donnent le nombre de décompositions d'un entier donné, respectant une certaine structure. D'une manière générale, si $\mathfrak{A}$ est une structure pour laquelle est définie une fonction *taille* (entière) et si a_n est le nombre d'objets de taille n de cette structure, la série génératrice $A(X) = \sum_n a_n\,X^n$ s'appelle *dénumérant* de $\mathfrak{A}$.

Il arrive qu'une structure soit *décomposable*, c'est-à-dire qu'on puisse l'obtenir à partir de structures plus simples en appliquant des constructions combinatoires comme : réunion, produit cartésien, séquence (éventuellement vide). Pour ces trois types de construction, on peut appliquer le tableau de correspondances suivant (cf [2], p.111) :

structure	dénumérant
$\mathfrak{A}\cup\mathfrak{B}$	$A(X)+B(X)$
$\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$	$A(X)\,B(X)$
Séq. de $\mathfrak{A}$	$\dfrac{1}{1-A(X)}$

Pour illustrer ceci, reprenons l'exemple 2.1 en nommant les structures : $\mathfrak{A}$ = décomposition en demis, sérieux et formidables, $\mathfrak{D}$ = décomposition en demis, $\mathfrak{S}$ = décomposition en sérieux, $\mathfrak{F}$ = décomposition en formidables. Alors il est clair que $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}\times\mathfrak{S}\times\mathfrak{F}$. D'autre part, $\mathfrak{D}$ (resp. $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{F}$) est une séquence de décompositions en un demi (resp. un sérieux, un formidable). Nommons : $\mathfrak{D}_1$ = décomposition en un demi, $\mathfrak{S}_1$ = décomposition en un sérieux, $\mathfrak{F}_1$ = décomposition en un formidable, et définissons pour toutes ces décompositions la fonction *taille* comme étant le nombre de quarts de litres obtenus. Les dénumérants correspondants sont alors :

$$D_1(X) = X\ ,\ S_1(X) = X^2\ ,\ F_1(X) = X^4$$

et les règles ci-dessus conduisent à :

$$D(X) = \frac{1}{1-D_1(X)} = \frac{1}{1-X}\ ,\ S(X) = \frac{1}{1-S_1(X)} = \frac{1}{1-X^2}\ ,\ F(X) = \frac{1}{1-F_1(X)} = \frac{1}{1-X^4}$$

puis à la formule (1) précédente :

$$A(X) = \frac{1}{D_1(X)} \times \frac{1}{S_1(X)} \times \frac{1}{F_1(X)} = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^4)}.$$

2.4 Arbres binaires

La structure $\mathfrak{B}$ d'arbre binaire est décomposable de façon récursive :

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{F} \cup (\mathfrak{B} \times \mathfrak{B})$$

où $\mathfrak{F}$ est la structure « feuille ». En prenant pour fonction taille le nombre de feuilles, il vient :

$$B(X) = X + B(X)^2$$

d'où, en résolvant l'équation du second degré, le dénumérant :

$$B(X) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4X}).$$

On en tire, pour $n \geqslant 1$, le nombre b_n d'arbres binaires à n feuilles, appelé $n^{\text{ième}}$ *nombre de Catalan* (cf [2], p.112). On peut montrer (cf [1] p.66 ou [3] p.524) que :

$$b_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Voir la feuille d'illustration, section 4.

2.5 Décompositions de Lagrange

Etant donné un entier naturel n, il s'agit de trouver le nombre q_n de quadruplets (a, b, c, d) d'entiers $\geqslant 0$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n$ (cf [2], p.112). La structure $\mathfrak{Q}$ de ces quadruplets est égale à $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$, où $\mathfrak{C} = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathfrak{C}_k$ est la structure « réunion des carrés de l'entier k ». En prenant pour taille d'un entier sa valeur, il vient :

$$C_k(X) = X^{k^2}$$

donc q_n est le coefficient en X^n dans $\left(\sum_{k \geqslant 0} X^{k^2}\right)^4$: voir la feuille d'illustration, section 5.

3 Problème des reines

Il s'agit de disposer n reines sur un échiquier $n \times n$ de manière à ce qu'aucune reine ne soit en prise avec une autre. Combien y a-t-il de solutions ?

Gauss a montré que pour $n = 8$, il y en a 92. Pour $n = 4$, il y a en a deux, représentées sur la figure 1.

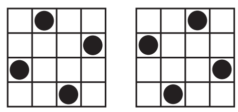

FIG. 1 – Les deux solutions pour $n = 4$.

3.1 Principe

Envisageons toutes les manières de disposer des reines sur un échiquier $n \times n$. Une disposition de reines est une structure décomposable, produit cartésien des n^2 dispositions individuelles sur chacune des cases. Pour une case donnée (i, j), il y a deux dispositions possibles : pas de reine ou une reine. En prenant pour fonction taille le nombre de reines, le dénumérant est donc $P_{i,j} = 1 + X_{i,j}$. La série génératrice de toutes les dispositions possibles est donc le polynôme à n^2 variables :

$$P_n = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (1 + X_{i,j}) \tag{4}$$

Résoudre le problème posé revient à développer P_n et ne garder que les « bons » monômes.

3.2 Modélisation

(d'après [2], p.113). Introduisons $4n-2$ indéterminées ℓ_i, c_j, d_k, e_h pour représenter respectivement les lignes, colonnes, diagonales montantes et diagonales descendantes, numérotées dans l'ordre schématisé sur la figure 2 pour $n=4$.

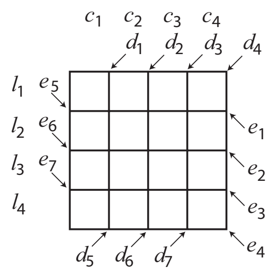

FIG. 2 – Modélisation pour $n=4$.

Dans (4) on remplace $X_{i,j}$ par le monôme $\ell_i\, c_j\, d_{i+j-1}\, e_{i-j+n}$ qui code la ligne, la colonne et les deux diagonales passant par la case (i,j). Chaque terme du développement de P_n est alors un monôme en les ℓ_i, c_j, d_k, e_h. Par exemple, les deux configurations de la figure 1 sont représentées par le (même) monôme :

$$\ell_1 c_2 d_2 e_3\ \ell_2 c_4 d_5 e_2\ \ell_3 c_1 d_3 e_6\ \ell_4 c_3 d_6 e_5$$

Les *bons monômes* sont alors ceux qui contiennent les variables $\ell_1,\ldots,\ell_n,c_1,\ldots,c_n$ (chaque ligne ou colonne est occupée au moins une fois) et qui ne contiennent aucune variable avec un exposant >1 (chaque ligne, colonne ou diagonale n'est occupée qu'une seule fois). Le nombre de solutions est la somme des coefficients des bons monômes dans le développement de :

$$P_n = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} (1+\ell_i c_j d_{i+j-1} e_{i-j+n}) \tag{5}$$

Mais le développement brutal de P_n n'est pas envisageable car il comporte $2^{(n^2)}$ termes (c'est-à-dire de l'ordre de 10^{19} pour $n=8$).

3.3 Mise en œuvre

Pour éviter l'explosion combinatoire, on extrait successivement de (5) les coefficients de $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n$. Le calcul est ramené à la recherche du coefficient de $c_1c_2\ldots c_n$ dans :

$$P'_n = \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_j d_{i+j-1} e_{i-j+n}). \tag{6}$$

On extrait les coefficients de $c_1,c_2,\ldots,c_n$ et il reste à éliminer les mauvais monômes : voir la feuille d'illustration, section 6. Le problème des reines est résolu en cinq lignes de programme ! La feuille d'illustration contient aussi une procédure plus classique basée sur un autre algorithme (*backtracking*).

4 Somme des entiers n-balancés

4.1 Enoncé

Nous dirons qu'un entier naturel est n-balancé s'il comporte $2n$ chiffres décimaux (compris entre 0 et 9) et si la somme de ses n premiers chiffres est égale à celle de ses n derniers chiffres : par exemple 761428 est 3-balancé, de même que 6123 puisqu'il s'écrit 006123. *Il s'agit de calculer la somme E_n de tous les entiers n-balancés* (cf [4]).

4.2 Solution

Soient $g_{n,k}$ le nombre des entiers à n chiffres dont la somme des chiffres vaut k et $s_{n,k}$ la somme de ces entiers. Par définition :

$$E_n = \sum_{k=0}^{9n} (10^n + 1)\, s_{n,k}\, g_{n,k}. \tag{7}$$

Pour $n > 1$, on a la formule de récurrence :

$$s_{n,k} = \sum_{r=0}^{9} (10\, s_{n-1,k-r} + r\, g_{n-1,k-r}). \tag{8}$$

Notons G et S les séries génératrices à deux variables :

$$G(X,Y) = \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ k\geqslant 0}} g_{n,k}\, X^n\, Y^k \ , \ S(X,Y) = \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ k\geqslant 0}} s_{n,k}\, X^n\, Y^k$$

et posons également :

$$V(Y) = \sum_{r=0}^{9} Y^r \ , \ W(Y) = \sum_{r=0}^{9} r\, Y^r.$$

Le coefficient en Y^k dans $(1 + Y + Y^2 + \cdots + Y^9)^n$ est le nombre de n-uplets de chiffres dont la somme vaut k. Donc :

$$G(X,Y) = \sum_{n\geqslant 1} V(Y)^n\, X^n = \frac{V(Y)\, X}{1 - V(Y)\, X}. \tag{9}$$

De plus :

$$\sum_{k\geqslant 0} s_{1,k}\, X\, Y^k = X\, W(Y). \tag{10}$$

En sommant pour $n \geqslant 1, k \geqslant 0$ et avec (8), (9) et (10), il vient :

$$\begin{aligned}
S(X,Y) &= X\, W(Y) + 10\, X\, V(Y)\, S(X,Y) + X\, W(Y)\, G(X,Y)\\
&= \frac{X\, W(Y) + X\, W(Y)\, G(X,Y)}{1 - 10\, X\, V(Y)} = X\, W(Y)\, \frac{1 + G(X,Y)}{1 - 10\, X\, V(Y)}\\
&= \frac{X\, W(Y)}{(1 - X\, V(Y))(1 - 10\, X\, V(Y))}.
\end{aligned}$$

$S(X,Y)$ et $G(X,Y)$ une fois calculées, la formule (7) donne E_n :

$$E_n = (10^n + 1) \sum_{k=0}^{9n} \big(\text{coefficient en } X^n Y^k \text{ dans } S(X,Y) + \text{coefficient en } X^n Y^k \text{ dans } G(X,Y)\big)$$

D'où le programme de la feuille d'illustration, section 7.

Références :

[1] L. Comtet, *Analyse combinatoire*, P.U.F. (1970)
[2] C. Gomez, B. Salvy, P. Zimmermann, *Calcul formel : mode d'emploi*, Masson (1995)
[3] C. Froidevaux, M.-C. Gaudel, M. Soria, *Types de données et algorithmes*, Ediscience (1993)
[4] `http://en.wikipedia.org/wiki/Generating_function`