FRACTIONS CONTINUES – APPLICATIONS

O. Marguin — 11/05/11

Ce chapitre est accompagné d'une feuille d'illustration en Maple.

1. Développement en fraction continue

(1.1) **Définition**

On notera frac(x) la partie fractionnaire du nombre réel x.

Etant donné un nombre réel positif x, on construit par récurrence une suite $(x_n)_n$ de réels par :

$$x_0 = x \ , \ x_{n+1} = \frac{1}{\mathrm{frac}(x_n)} \quad \text{pour } n \geq 0 \tag{1}$$

en convenant de s'arrêter à l'indice N si x_N est un entier. En posant $a_n = \lfloor x_n \rfloor$, on a :

$$x_0 = \lfloor x_0 \rfloor + \mathrm{frac}(x_0) = a_0 + \frac{1}{x_1} \text{ , de même : } x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$$

ainsi de suite, de telle sorte qu'on peut écrire formellement :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots}}}} \tag{2}$$

La suite d'entiers naturels $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ (finie ou infinie) s'appelle *développement en fraction continue de x*.

(1.2) Supposons x rationnel de la forme $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbf{N}^\star)$. Par division euclidienne, on a $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ donc, lorsque r est $\neq 0$:

$$x = \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} = q + \frac{1}{\frac{b}{r}}.$$

On peut ensuite diviser b par r, ainsi de suite. On voit donc que le développement en fraction continue de x est formé des quotients successifs obtenus en appliquant l'algorithme d'Euclide à a et b (recherche du pgcd). Comme cet algorithme se termine, le développement en fraction continue de x est fini.

Voici par exemple une procédure Maple récursive, prenant en paramètre le rationnel x et renvoyant son développement en fraction continue sous forme d'une liste d'entiers (cf feuille d'illustration, section 2) :

```
> rat2fc := proc(x)
      local a,b,q,r;
      a:=numer(x);b:=denom(x);q:=iquo(a,b);r:=irem(a,b);
      if r=0 then [q] else [q,op(rat2fc(b/r))] end if
  end proc;
```

Réciproquement, si le développement en fraction continue de x est fini, il est clair que x est rationnel. Voici une procédure inverse de la précédente, prenant en paramètre une liste d'entiers naturels et renvoyant le rationnel correspondant :

```
> fc2rat := proc(L)
      if nops(L)=1 then L[1] else L[1]+1/fc2rat(L[2..nops(L)]) end if
  end proc;
```

On a donc prouvé le :

Théorème :

x est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est fini.

(1.3) Supposons maintenant x irrationnel et soit $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ son développement en fraction continue, qui est infini. Pour tout $n \geq 0$, notons :

$$r_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}} \tag{3}$$

Soient les deux suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\geq -1}$ et $(q_n)_{n\geq -1}$ telles que :

$$p_{-1} = 1 \ , \ q_{-1} = 0 \ , \ p_0 = a_0 \ , \ q_0 = 1$$

et, pour $n \geq 1$:

$$p_n = p_{n-1}a_n + p_{n-2} \ , \ q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2}. \tag{4}$$

Théorème :

Avec ces notations, on a :
(i) $r_n = \frac{p_n}{q_n}$,
(ii) la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

Preuve :

a) Montrons (i) par récurrence sur n : pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est clair. Supposons $n \geq 1$ et (i) vérifiée pour n. Comme r_{n+1} est obtenu en remplaçant a_n par $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ dans (3), il vient avec (4) :

$$r_{n+1} = \frac{p_{n-1}(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}) + p_{n-2}}{q_{n-1}(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}) + q_{n-2}} = \frac{(p_{n-1}a_n + p_{n-2})a_{n+1} + p_{n-1}}{(q_{n-1}a_n + q_{n-2})a_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p_n a_{n+1} + p_{n-1}}{q_n a_{n+1} + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

b) (ii) est clair pour $n = 0$ et, pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{pmatrix}$$

donc, en prenant les déterminants et puisque $p_0q_{-1} - q_0p_{-1} = -1$:

$$p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} = (-1)^{n+1} \tag{5}$$

ce qui montre que p_n et q_n sont premiers entre eux.

La fraction $\frac{p_n}{q_n}$ s'appelle *réduite d'ordre n de x.*

(1.4) **Convergence**

Lemme :

Les suites d'entiers $(p_n)_{n>0}$ et $(q_n)_{n>0}$ sont strictement croissantes.

Cela se prouve aisément par récurrence grâce aux formules (4), en remarquant que a_n est ≥ 1 pour $n \geq 1$.

Théorème :

La suite des réduites $\frac{p_n}{q_n}$ *converge vers* x, *et on a :*

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Preuve : pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{pmatrix}$$

d'où, en prenant les déterminants et avec (5) :

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n \tag{6}$$

Il s'ensuit que la suite $(\frac{p_{2n}}{q_{2n}})_{n\geq 0}$ est croissante et que la suite $(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}})_{n\geq 0}$ est décroissante. De (5) on tire également :

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n-1}q_n} \tag{7}$$

Comme la suite $(q_n)_{n>0}$ tend vers $+\infty$ (lemme), on en déduit que les suites $(\frac{p_{2n}}{q_{2n}})_{n\geq 0}$ et $(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}})_{n\geq 0}$ sont adjacentes. Soit ℓ leur limite commune. Avec les notations de (1.1), on a pour tout n :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_{n+1}}}}} \tag{8}$$

avec $x_{n+1} > 1$. Il s'ensuit que :

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < x < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$$

ce qui montre que $\ell = x$. Enfin d'après (7) :

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

(1.5) **Théorème** :

La suite des $|x - \frac{p_n}{q_n}|$ *est strictement décroissante.*

En effet, en faisant le même calcul que dans le point a) du §(1.3), la formule (8) donne :

$$x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}} \tag{9}$$

et par conséquent, avec (5) :

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

Il suffit donc de prouver que $q_{n+1}(x_{n+2}q_{n+1} + q_n) > q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})$, ce qui se déduit des inégalités $x_{n+2} > 1$ et $x_{n+1} < 1 + a_{n+1}$ en utilisant (4).

(1.6) Les réduites de x sont les “meilleures approximations possibles” de x par des rationnels, au sens suivant :

Théorème :

> *Soient p et q deux entiers naturels > 0 tels que $|x - \frac{p}{q}| < |x - \frac{p_n}{q_n}|$. Alors $p > p_n$ et $q > q_n$.*

Preuve : supposons par exemple n impair (le cas pair est analogue). D'après le théorème (1.5), l'inégalité $|x - \frac{p}{q}| < |x - \frac{p_n}{q_n}|$ implique :

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p}{q} < \frac{p_n}{q_n}$$

donc :

$$0 < \frac{p}{q} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$$

ou encore, d'après (7) :

$$0 < \frac{pq_{n-1} - qp_{n-1}}{qq_{n-1}} < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

et comme $pq_{n-1} - qp_{n-1}$ est un entier, on a $qq_{n-1} > q_n q_{n-1}$ et par conséquent $q > q_n$. En considérant les inégalités :

$$\frac{q_n}{p_n} < \frac{q}{p} < \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}}$$

on prouve de même que $p > p_n$, cqfd.

(1.7) **Cas des nombres quadratiques**

Lemme :

> *Soit x un nombre irrationnel > 0 de développement en fraction continue périodique. Alors x est algébrique de degré 2 sur $\mathbf{Q}$.*

En effet, s'il existe $n \geq 0$ tel que le développement en fraction continue $(a_0, a_1, \ldots)$ de x vérifie $a_{n+1+k} = a_k$ pour tout k, alors dans (8) on a $x_{n+1} = x$ et par (9), $x = \frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}}$ d'où le résultat. Pour un exemple, voir la feuille d'illustration, section 3.

Théorème *(Lagrange, 1768)* :

> *Soit x un nombre irrationnel > 0. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
> *(i) x est quadratique,*
> *(ii) le développement en fraction continue de x est périodique à partir d'un certain rang.*

(ii) $\Rightarrow$ (i) : s'il existe un indice $n+1$ à partir duquel le développement en fraction continue de x est périodique, dans la formule (8) x_{n+1} est algébrique de degré 2 sur $\mathbf{Q}$ d'après le lemme, d'où le résultat.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : notons $x^\star$ le conjugué algébrique de x (c'est-à-dire l'autre racine du polynôme minimal de x sur $\mathbf{Q}$).

a) supposons d'abord $x > 1$ et $x^\star < 0$ (pour un exemple, voir la feuille d'illustration, section 4). Soit E l'ensemble des polynômes $P \in \mathbf{Z}[X]$ de la forme $A\,X^2 + B\,X + C$, irréductibles sur $\mathbf{Q}$ et tels que $A > 0$ et $C < 0$. Tout polynôme $P \in E$ possède une unique racine réelle > 0, dont on note α_P la partie entière. Soit $\varphi : E \to E$ l'application définie par :

$$\varphi(P) = -X^2\,P\left(\alpha_P + \frac{1}{X}\right).$$

Si $P = A\,X^2 + B\,X + C$, on a d'après la formule de Taylor :

$$\varphi(P) = -(A\,\alpha_P^2 + B\,\alpha_P + C)\,X^2 - (2\,A\,\alpha_P + B)\,X - A.$$

d'où l'on déduit que le discriminant de $\varphi(P)$ est égal à $B^2 - 4AC$: φ conserve les discriminants. Définissons alors une suite $(P_n)_n$ de polynômes de E telle que :

$$P_0(x) = 0\ ,\ P_{n+1} = \varphi(P_n) \text{ pour } n \geq 0.$$

Si $P_n = A_n X^2 + B_n X + C_n$, la suite des discriminants $\Delta_n = B_n^2 - 4A_nC_n$ étant constante, et puisque A_nC_n est < 0, les suites d'entiers relatifs (A_n), (B_n) et (C_n) sont, en valeur absolue, majorées par $K = \Delta_0$. Le nombre de triplets (u, v, w) d'entiers relatifs vérifiant $|u| \leq K, |v| \leq K, |w| \leq K$ étant fini, il y a deux indices $n_1 < n_2$ tels que $A_{n_1} = A_{n_2}, B_{n_1} = B_{n_2}$ et $C_{n_1} = C_{n_2}$, d'où $P_{n_1} = P_{n_2}$, ce qui prouve que la suite (P_n) est périodique à partir d'un certain rang. Or par définition de φ, le nombre x_n (notation de (1.1)) est l'unique racine positive de P_n. Donc la suite (x_n) est périodique à partir d'un certain rang, d'où le résultat.

b) soit maintenant $x > 0$ irrationnel quadratique quelconque. D'après la formule (8) et les propriétés de la conjugaison, pour tout n on a :

$$x^\star = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x^\star_{n+1}}}}} \tag{10}$$

Il y a un n tel que $x^\star_{n+1} < 1$, sinon d'après (10), x et $x^\star$ ont même développement en fraction continue, ce qui est absurde puisque $x \neq x^\star$. Comme $x^\star_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{x^\star_{n+2}}$ et $a_{n+1} \geq 1$, on en déduit que $x^\star_{n+2}$ est < 0. D'après a), le développement en fraction continue de x_{n+2} est périodique à partir d'un certain rang, donc celui de x aussi.

Remarque.— Les nombres irrationnels positifs ayant un développement en fraction continue périodique sont exactement les nombres quadratiques x tels que $x > 1$ et $-1 < x^\star < 0$ (*Galois, 1829*) : pour une preuve, voir [2], théorème 4.5.

2. Quelques applications

(2.1) **Approximations par des rationnels**

Les réduites d'un nombre réel jouent par exemple un rôle important en astronomie : périodes de révolution, lunaisons, éclipses, calendriers (voir [1], § 7.4.4) et en musique : gammes, tempérament (ibid., voir aussi [3], pp. 3-16).

(2.2) **Equations diophantiennes**

a) Etant donnés $a, b \in \mathbf{N}^\star$ et $c \in \mathbf{Z}$, il s'agit de trouver $u, v \in \mathbf{Z}$ solutions de l'équation :

$$au + bv = c \tag{11}$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer a et b premiers entre eux. Notons que l'algorithme d'Euclide étendu fournit une solution. Procédant comme en (1.3), le développement en fraction continue de $x = \frac{a}{b}$ conduit à une suite finie de réduites $(\frac{p_0}{q_0}, \ldots, \frac{p_n}{q_n})$ avec $p_n = a$ et $q_n = b$. D'après (5), on a :

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = (-1)^{n+1}$$

d'où, en posant $\varepsilon = (-1)^{n+1}$, une solution particulière de (11) donnée par :

$$u_0 = \varepsilon c q_{n-1} \ , \ v_0 = -\varepsilon c p_{n-1}.$$

L'équation (11) devient alors $a(u - u_0) + b(v - v_0) = 0$ c'est-à-dire :

$$\frac{v - v_0}{u - u_0} = -\frac{a}{b}$$

et comme $\frac{a}{b}$ est irréductible, les solutions de (11) sont les entiers u, v de la forme :

$$u = u_0 - bt \ , \ v = v_0 + at \ \text{ avec } t \in \mathbf{Z}.$$

b) Il s'agit de résoudre l'équation diophantienne de *Pell-Fermat* $u^2 - N v^2 = 1$, où N est un entier naturel qui n'est pas le carré d'un entier.

Soit $\mathcal{H}$ le groupe des homographies $h : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \to \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ de la forme $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ et $ad - bc = \pm 1$. Appliquons le théorème de Lagrange (1.7) à $x = \sqrt{N}$. Il y a deux indices $0 < k < n + k$ tels que $x_k = x_{n+k}$ donc, d'après (5), (8) et (9), il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ telles que :

$$\begin{cases} x_k = h_1(x_k) \\ x = h_2(x_k) \end{cases} \tag{12}$$

et, avec $h = h_2 \circ h_1 \circ h_2^{-1}$, il vient $x = h(x)$. On obtient ainsi une relation *non triviale* :

$$\sqrt{N} = \frac{a\sqrt{N} + b}{c\sqrt{N} + d} \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbf{Z} \text{ et } ad - bc = \pm 1 \tag{13}$$

d'où l'on tire, par unicité de l'écriture dans la base $(1, \sqrt{N})$:

$$a^2 - Nc^2 = \pm 1. \tag{14}$$

Remarquons enfin qu'on peut prendre $+1$ dans (14), quitte à obtenir (13) à partir de la relation $x = h^2(x)$.

Remarque.— Tout couple (u, v) d'entiers tels que $u + v\sqrt{N} = (a + c\sqrt{N})^k$ (avec $k \in \mathbf{N}^\star$) est alors solution de l'équation de départ, qui admet donc une infinité de solutions (voir [2], théorème 4.6).

(2.3) **Décomposition d'un entier en somme de deux carrés**

Nous ne développerons pas ce point, renvoyant par exemple à [2], exercices 4.10, 4.11, ou [3], pp. 35-42.

(2.4) **Dynamique des difféomorphismes du cercle**

Dans le théorème de *KAM* (*Kolmogorov-Arnold-Moser*) décrivant la dynamique d'un difféomorphisme φ du cercle, intervient le développement en fraction continue du *nombre de rotation* de φ, lorsqu'il est irrationnel : voir [4], chapitre 6. Il y a des applications intéressantes en physique, notamment pour l'étude du phénomène d'accrochage de fréquences dans les systèmes dynamiques bi-périodiques : voir par exemple [5], chapitre I, § III.

Références :

[1] M. Demazure, *Cours d'algèbre*, Cassini (1997)
[2] D. Duverney, *Théorie des nombres - cours et exercices corrigés*, Dunod (1998)
[3] *Les nombres - problèmes anciens et actuels*, collection Mathémathèmes, Ellipses (2000)
[4] D.K.Arrowsmith & C.M.Place, *An introduction to Dynamical Systems*, Cambridge (1990)
[5] *Le chaos*, série Synthèses (CEA), Eyrolles (1989)