Polynômes multivariés et combinatoire — Exercices

1.— Nombres porte-bonheur

Pour $n \geq 0$, notons E_n l'ensemble des entiers de 0 à $10^n - 1$. Nous dirons qu'un entier naturel est *porte-bonheur* si son écriture décimale contient au moins une fois le nombre 13 (chiffres 1 et 3 qui se suivent). Soit u_n le nombre d'entiers porte-bonheur $\in E_n$.

1. Que valent u_0, u_1, u_2 ?

2. Montrer que pour $n \geq 2$, on a :

$$u_n = 10\, u_{n-1} + 10^{n-2} - u_{n-2}$$

(remarquer que si $N \in E_n$ est porte-bonheur, 13 apparaît ou non parmi les $n-1$ premiers chiffres de N).

3. Résoudre la récurrence précédente et donner l'expression de u_n. Calculer u_{20}.

4. Déterminer la série génératrice de la suite (u_n). Vérifier avec u_{20}.

2.— Problème de vases

On dispose de n vases de contenances respectives $c_1, \ldots, c_n$ litres (c_i entiers > 0). L'un des vases est plein, les autres sont vides. On envisage d'effectuer des transvasements successifs d'un vase à un autre.

Une configuration des n vases sera représentée par un monôme $X_1^{e_1} \ldots X_n^{e_n}$, où e_i est le nombre de litres contenus dans le $i^{\text{ème}}$ vase. Un ensemble de configurations sera représenté par une somme de tels monômes.

1. Un *transvasement* consiste à choisir un vase de départ non vide et un vase d'arrivée non plein, et vider le contenu du vase de départ dans le vase d'arrivée, soit en totalité, soit en s'arrêtant dès que le vase d'arrivée est plein (on ne renverse pas de liquide).

Ecrire une procédure `transvase(M)` qui renvoie l'ensemble des configurations obtenues à partir du monôme M en appliquant tous les transvasements possibles.

2. En déduire un programme qui, à partir d'une configuration initiale donnée, calcule toutes les configurations qu'il est possible d'obtenir après k transvasements successifs, ainsi que leurs probabilités d'occurrence (on suppose que tous les transvasements sont équiprobables). Principe : parcourir l'arbre de tous les transvasements possibles jusqu'à la profondeur k et totaliser les monômes obtenus (feuilles) dans un polynôme en les X_i.

Application numérique : on a trois vases de contenances respectives 50, 33 et 19 litres, le vase de 50 litres est plein, les deux autres sont vides. Montrer qu'après 5 transvasements, on peut obtenir au plus 17 configurations différentes, qu'on déterminera ainsi que leur chance d'apparaître.

3. Ecrire un programme qui, à partir d'une configuration initiale donnée et un nombre p de litres (p entier > 0), cherche une suite de transvasements permettant d'obtenir p litres dans l'un des vases. Principe : parcourir l'arbre précédent en conservant dans un polynôme en les X_i le chemin depuis la racine de l'arbre, et éviter les cycles. On fixera une profondeur maximale d'exploration.

Application numérique : avec les trois vases de contenances respectives 50, 33 et 19 litres, le vase de 50 litres étant plein et les autres vides, comment, par des transvasements successifs, obtenir 1 litre dans l'un des vases ? (solution optimale en 20 coups)

***