Travaux dirigés avec SAGE (partie II)

Math 3 — Année 2010-2011

Sommaire

Conseils :
– *en fin de séance, enregistrez votre feuille de calcul en sélectionnant "Save worksheet to a file",*
– *prenez l'habitude de compléter vos feuilles avec des textes (titres, commentaires etc.) ; pour insérer une cellule de texte, il faut cliquer sur la ligne bleue tout en appuyant sur la touche* `<MAJ>`*, saisir le texte dans la cellule puis cliquer sur le bouton "save changes" situé en bas.*

1 Séries de Fourier

1.1 Fonctions définies par morceaux

On les construit par la commande `piecewise` (consultez l'aide). Pour définir la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $T = 2$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{pour} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

entrez :

```
var('x')
f1(x) = 0 ; f2(x) = x-1
f = piecewise([[(0,1),f1],[(1,2),f2]])
```

Essayez de tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0, 2]$: que constatez-vous ? Le mieux est de programmer une fonction qui prolonge f à $\mathbb{R}$ tout entier :

```
def fp(x) :
    if x < 0 :
        return fp(x+2)
    elif x > 2 :
        return fp(x-2)
    else :
        return f(x)
```

Entrez cette fonction, puis la commande :

```
plot(fp,-2,4)
```

La fonction `fp` est *récursive*, c'est-à-dire que dans sa définition elle fait appel à elle-même. Comprenez-vous comment elle fonctionne ? (imaginez par exemple le calcul de `fp(5)`).

Faites apparaître les noms des méthodes qui s'appliquent à `f`. Trois d'entre-elles vous serviront pour la suite :

`fourier_series_cosine_coefficient`
`fourier_series_sine_coefficient`
`fourier_series_partial_sum`

Voyez dans l'aide à quoi servent ces méthodes.

Remarque.— Il est possible d'utiliser des fonctions anonymes, par la syntaxe :

`lambda` *variables* `:` *valeur*

Ainsi vous auriez pu définir directement `f` sans avoir à définir `f1` et `f2`, par la commande :

```
f = piecewise([[(0,1),lambda x : 0],[(1,2),lambda x : x-1]])
```

1.2 Coefficients de Fourier et sommes partielles

Rappelons que le développement en série de Fourier de f en x est de la forme :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On prend pour f la fonction définie au paragraphe précédent.

1. Calculez a_0 (utilisez `integrate`).
2. Donnez l'expression de a_n et b_n pour $n \geqslant 1$. Simplifiez ces expressions en imposant n entier par la commande `assume(n,'integer')`.
3. Calculez la somme partielle de la série de Fourier de f en x à l'ordre 5 (i.e. jusqu'à l'indice $n = 5$).

1.3 Exercice

1. Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction périodique de période 2, définie par :

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour} \quad -1 \leqslant x < 0 \\ 1 & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

   Définissez f_1, puis représentez son graphe sur l'intervalle $[-2, 2]$.
2. Calculez formellement les coefficients de Fourier a_n et b_n.
3. Sur l'intervalle $[-2, 2]$, tracez en superposition le graphe de f_1 et celui de sa somme partielle de Fourier à l'ordre 5, puis aux ordres 15, 25, 35. Remarquez l'allure du graphe au voisinage des points de discontinuité (*phénomène de Gibbs*).

4. Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_2(x) = \cos^4(x).$$

   Tracez son graphe sur l'intervalle $[-6, 6]$.
5. Montrez que f_2 est périodique de période π. Que vaut ω ?
6. Calculez la somme partielle de sa série de Fourier à l'ordre 2 (le dernier terme est en $\cos(4x)$).
7. Démontrez que cette somme partielle est égale à f_2.
8. En vous inspirant de ce qui précède, programmez une fonction `trig_linearize` permettant de linéariser une expression qui est une puissance de $\sin(x)$ ou de $\cos(x)$. Par exemple la commande :

```
trig_linearize(sin(x)^5)
```

   doit rendre le résultat : `-5/16*sin(3*x) + 1/16*sin(5*x) + 5/8*sin(x)`.

2 Equations différentielles ordinaires

2.1 Résolution exacte

La commande `desolve` permet de résoudre les équations différentielles d'ordre 1 et 2. Soit par exemple à résoudre :

$$y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

Entrez :

```
var('x')
function('y',x)       # déclare y comme fonction de x
```

puis l'équation différentielle :

```
deq = diff(y(x),x) + y(x) - e^(-x) ; deq
```

Notez que `deq` est une simple expression. Dans un tel cas, l'équation à résoudre sera automatiquement comprise comme `deq == 0` par la commande `desolve` :

```
desolve(deq,y(x))     # ou bien : desolve(deq,[y(x),x])
```

qui rend une expression. Pour obtenir la solution comme fonction de x, entrez plutôt :

```
sol(x) = desolve(deq,y(x)) ; sol
```

Vérifiez enfin que cette fonction est bien solution de l'équation différentielle. Pour cela, remplacez dans `deq` la fonction `y` par la fonction `sol` :

```
deq.substitute_function(y,sol)
```

Vous pouvez obtenir la solution particulière vérifiant $y(0) = 1$ avec la commande :

```
desolve(deq,y(x),[0,1])
```

Remarque.— Pour déclarer y comme fonction de x, évitez d'écrire l'assignation `y = function('y',x)` car alors `y` désignerait l'expression `y(x)` et non la fonction ! (voir la remarque du §1.4 de la planche précédente).

2.2 Exercice

1. Résolvez l'équation différentielle $y' - \frac{2y}{x+1} = (x + 1)^3$.
2. Déterminez la solution particulière vérifiant $y(0) = -1$.
3. Tracez sur un même dessin le graphe de cette solution particulière ainsi que le champ de directions défini par l'équation différentielle (utiliser `plot_vector_field`).

3 Equations aux dérivées partielles

3.1 Résolution exacte

Illustrons la méthode de séparation des variables sur un problème de diffusion de la chaleur en dimension 1. Il faut résoudre l'EDP :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - c\,\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t) = 0 \tag{1}$$

où $u(x,t)$ est une fonction de la variable espace x et de la variable temps t, et c est une constante > 0. Commencez par saisir l'EDP :

```
var('x,t,c') ; function('u',x,t)
EDP1 = diff(u(x,t),t) == c*diff(u(x,t),x,2) ; EDP1
```

On cherche une solution de la forme $u(x,t) = f_1(x)f_2(t)$. Pour cela, entrez :

```
function('f1',x) ; function('f2',t)
v(x,t) = f1(x)*f2(t)
```

Remplacez u par v dans l'EDP, divisez par $f_1(x)f_2(t)$ puis simplifiez :

```
EDP2 = EDP1.substitute_function(u,v)/v(x,t)
EDP3 = EDP2.simplify() ; EDP3
```

Le membre de gauche ne dépend que de t, celui de droite que de x : ils sont donc égaux à une même constante k. Pour trouver f_1 et f_2, on est ramené à résoudre deux équations différentielles ordinaires :

```
var('k')
ff2(t) = desolve(EDP3.lhs()==k,[f2(t),t]) ; ff2
```

```
assume(c>0) ; assume(k<0)
ff1(x) = desolve(EDP3.rhs()==k,[f1(x),x]) ; ff1
```

Il reste à jouer sur les constantes d'intégration pour obtenir une solution réelle de forme sympathique :

```
h1 = ff1(x)*ff2(t) ; h1
```

```
var('alpha')
h2 = h1.subs_expr(sqrt(k)==I*sqrt(c)*alpha).subs_expr(k==-c*alpha^2) ; h2
```

```
var('C1,C2')
h3 = h2(k1=-I*C1/c,k2=C2/c).expand() ; h3
```

d'où la solution cherchée :

```
w(x,t) = h3.simplify_exp()(C1=-I*C1) ; w.show()
```

qui est de la forme :

$$(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-c\alpha^2 t}(C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x)) \tag{2}$$

Vérifiez :

```
bool(EDP1.substitute_function(u,w))
```

Remarques :

- L'équation (1) étant linéaire, toute somme de fonctions du type (2) est également solution (principe de superposition).
- La donnée de conditions aux limites (sur x) impose des conditions sur les constantes C_1, C_2 et α. Si de plus il faut tenir compte d'une condition initiale (pour $t = 0$), l'idée est de chercher une solution sous forme d'une somme infinie de fonctions du type (2) : voir le problème suivant.

3.2 Diffusion de la chaleur dans un barreau

Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $t \geqslant 0$, soit $u(x,t)$ la température au point x, à l'instant t, d'un barreau de longueur unité. On suppose que u est solution de l'EDP :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \tag{3}$$

avec les conditions aux limites :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \tag{4}$$

et la condition initiale :

$$u(x,0) = f(x) \tag{5}$$

(f supposée connue). On veut décrire l'évolution de la température dans le barreau au cours du temps.

1. Entrez l'EDP (3).
2. Définissez une fonction u_1 de la forme (2) avec $c = 1$:

   $$u_1(x,t) = \mathrm{e}^{-\alpha^2 t}(C_1 \sin(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x))$$

   (où α, C_1, C_2 sont des constantes arbitraires) et montrez qu'elle est solution de (3).
3. Calculez $u_1(0,t)$. Pourquoi a-t-on nécessairement $C_2 = 0$?
4. Remplacez C_2 par 0 dans la définition de u_1, puis calculez $u_1(1,t)$. Pourquoi α est-il nécessairement de la forme $k\pi$ avec k entier ?
5. Remplacez α par $k\pi$ dans la définition de u_1 et imposez k entier. Vérifiez que u_1 satisfait alors (3) et (4), puis calculez $u_1(x,0)$.
6. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ on pose $f(x) = x^2(1-x^2)$. Afin de satisfaire la condition initiale (5), on envisage une solution de la forme :

   $$u_2(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \, \mathrm{e}^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x) \tag{6}$$

   Calculez le coefficient c_k (*indication* : remarquez que $u_2(x,0)$ n'est autre que le développement en série de Fourier de la fonction f prolongée par imparité sur $[-1,1]$ puis par périodicité sur $\mathbb{R}$). Vous devriez trouver :

   $$c_k = -4 \, \frac{\pi^2 k^2 + (5\,\pi^2 k^2 - 12)\,(-1)^k + 12}{\pi^5 k^5}$$

7. On considère qu'en tronquant la somme (6) à l'indice $k = 10$, on a une bonne approximation de la solution exacte. Définissez la fonction u_2 correspondante.
8. Représentez graphiquement l'évolution de la distribution de température entre les instants $t = 0$ et $t = 0.2$ de trois manières différentes :
   – en traçant le graphe en 3D de la fonction u_2,
   – en traçant une famille de courbes isothermes dans le plan (x,t) (utiliser `contour_plot`),
   – en réalisant une animation.

3.3 Ondes progressives

On considère l'équation de propagation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \tag{7}$$

où u est une fonction $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et c est une constante (*célérité*).

1. Montrez que :

   $$u(x,t) = f_1(ct + x) + f_2(ct - x)$$

   où f_1 et f_2 sont deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposées deux fois dérivables, est solution de (7).
2. On prend $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = \mathrm{e}^{-10x^2}$ et $c = 30$. Représentez graphiquement l'évolution de l'onde sur l'intervalle $[-1,3]$ pour t variant de 0 à 0.1 (utiliser `animate`).

3.4 Ondes stationnaires : corde de piano, corde de clavecin

Il s'agit d'un problème d'évolution en dimension 1, sur un domaine fini.

La forme d'une corde vibrante de longueur L tendue entre ses deux extrémités est donnée, pour $0 \leqslant x \leqslant L$ et $t \geqslant 0$, par une fonction $u(x,t)$ solution de l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \tag{8}$$

avec les conditions aux limites :

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \tag{9}$$

et des conditions initiales de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u(x,0) & = & f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & g(x) \end{array}\right. \tag{10}$$

On peut montrer que la célérité c est égale à $\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$, où τ est la tension de la corde et μ sa masse linéique.

Il s'agit de décrire l'évolution de la corde au cours du temps.

1. Entrez la fonction :

$$u_k(x,t) = \sin\big(\frac{k\pi x}{L}\big)\big(a_k\cos\big(\frac{k\pi ct}{L}\big) + b_k\sin\big(\frac{k\pi ct}{L}\big)\big)$$

   où a_k, b_k sont des constantes, et montrez qu'en supposant k entier, cette fonction vérifie (8) et (9) (notez que pour trouver la forme de u_k, on pourrait procéder comme en 3.1).
2. Calculez $u_k(x,0)$ et $\frac{\partial u_k}{\partial t}(x,0)$.
3. Pour satisfaire les conditions initiales (10), on cherche une solution du type :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,t) \tag{11}$$

   Avec la question 2, remarquez que les coefficients a_k et b_k se déduisent des coefficients des développements en série de Fourier de f et g, prolongées par imparité sur $[-L,L]$ puis par périodicité sur $\mathbb{R}$. D'où les formules :

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{k\pi x}{L})\,dx\ ,\ b_k = \frac{2}{k\pi c}\int_0^L g(x)\sin(\frac{k\pi x}{L})\,dx \tag{12}$$

4. On suppose que la corde est fixée dans un piano et entre en vibration après avoir été frappée en son milieu par un marteau de largeur ε, avec une vitesse v_0. Calculez les expressions correspondantes de a_k et b_k en utilisant (12) (*indication* : prendre f nulle et g constante par morceaux).
5. On suppose maintenant qu'elle est fixée dans un clavecin et entre en vibration après avoir été pincée en son milieu et déplacée d'une distance α, puis lâchée. Calculez les expressions correspondantes de a_k et b_k avec (12) (*indication* : prendre g nulle et f affine par morceaux).
6. *Application numérique* :
   (a) Les caractéristiques de la corde sont : longueur $L = 0,55$ m, masse linéique $\mu = 7,5\,.\,10^{-3}$ kg/m, tension $\tau = 1757$ Newtons. Calculez c. Quelle note cette corde émet-elle en vibrant ?
   (b) Cas du piano : on prend $\varepsilon = 0,02$ m et $v_0 = 10$ m/s et on considère qu'en tronquant la somme (11) à l'indice $k = 40$, on a une bonne approximation de la solution exacte. Réalisez une animation de la corde sur une durée de plusieurs périodes.
   (c) Cas du clavecin : on prend $\alpha = 0,0002$ m. Comme pour la question 6b, réalisez une animation de la corde sur une durée de plusieurs périodes.
7. Au vu de ce travail, comment expliquez-vous la différence de timbre entre un piano et un clavecin ?
8. Cas du piano : à quel endroit le marteau devrait-il frapper la corde pour minimiser l'amplitude de la 7$^{\text{e}}$harmonique (qui est dissonante) ?