Глава 12

Особые сыновья, последовательности Морли

Un chant mystérieux tombe des astres d'or.

A. R.

12.a Особые сыновья

Пусть M – модель T, p – тип над M и N – элементарное расширение M, которое для всех n реализует все типы из $S_n(M)$; сын q типа p над N называется *особым*, если для любой формулы $f(x,\bar{y})$ и любых кортежей $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из N одного типа над M, если $q \vdash f(x,\bar{a})$, тогда $q \vdash f(x,\bar{b})$; другими словами, что $q \vdash f(x,\bar{a})$ зависит только от типа $\bar{a}$ над M. Говорят также, что тип q *M-особый*, если он особый сын своего ограничения M; и в этом случае *бесконечным определением q над M* называют функцию, которая каждой формуле $f(x,\bar{y})$ сопоставляет множество типов над M кортежей $\bar{a}$ из N, таких, что $q \vdash f(x,\bar{a})$.

В более общих терминах, если N является каким-нибудь элементарным расширением M (или даже просто множеством параметров, содержащим M), скажем, что q из $S_1(N)$ является *особым сыном* p, если существует сын q_1 типа q над элементарным расширением N_1 модели N, реализующим для всех n все n-типы над M, и q_1 – особый в предыдущем смысле. Очевидно, может существовать несколько возможностей для q_1; и мы не можем говорить о бесконечном определении q, так как все типы кортежей параметров могут еще не появляться в N.

Мы видим также, что вышеприведенное определение M-особых сыновей становится бессмысленным, если мы позволим модели N опускать некоторые типы из $S_n(M)$; возьмем модель M теории T бесконечных множеств (язык сведен к равенству), и пусть p не реализованный тип над M; пусть N – элементарное расширение M, полученное из неё добавлением единственной точки a. Сын q типа p, реализованный элементом a имеет такое свойство, что для каждой формулы $f(x,\bar{y})$ и каждого b из N выводимость $q \vdash f(x,\bar{b})$ зависит только от типа $\bar{b}$ над M; действительно, так как есть элиминация кванторов, $x = y$, $x \neq y$ – единственные формулы, которые нужно рассмотреть, и a – единственная реализация p в N. Но, конечно, q не особый сын p: как только добавляется вторая точка b, a и b имеют один и тот же тип над M и единственный сын q_1 типа q уже не обладает этим свойством.

Сделав эти замечания, начнем с нескольких лемм:

Лемма 12.1 *Каждый тип p является особым сыном самого себя.*

Доказательство. Пусть $p \in S_1(M)$ и N является элементарным расширением M. Я покажу, что существует сын q типа p над N, такой, что $q \vdash f(x,\bar{a})$ зависит только от типа $\bar{a}$ над M: беря N достаточно насыщенной, мы получаем результат. Рассмотрим множество формул образованное из p, $T(N)$ и аксиом $f(x,\bar{a}) \leftrightarrow f(x,\bar{b})$ для всех $\bar{a}$, $\bar{b}$ одного типа над M; конечный фрагмент этого семейства содержит только конечный фрагмент p , удовлетворяющегося элементом α из M: если интерпретировать x как α, все другие аксиомы удовлетворяются! Следовательно, это множество совместно, и любое его пополнение дает нужный тип q.

□

Лемма 12.2 *Пусть $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$ – особый сын p, и P – элементарное расширение N; тогда q имеет M-особого сына над P; кроме того, если N реализует все n-типы над M, то этот M-особый сын – единственный.*

Доказательство. Пусть N_1 – расширение N, реализующее все n-типы над M, над которым q имеет M-особого сына q_1. Нам остается только использовать бесконечное определение q_1 чтобы образовать тип над P: множество формул $\{f(x, \bar{a})$: существует $\bar{a}'$ в N_1 того же типа над M, что $\bar{a}$, такой, что $q_1 \vdash f(x, \bar{a}')\}$ совместно, так как любое конечное множество параметров из P имеет тип над M, реализующийся в N_1; эти формулы определяют, очевидно, M-особый тип r над P, являющийся сыном q. Если N реализует все n-типы над M, то имеется только одна возможность для бесконечного определения r.

□

Перед нами открывается такой пейзаж: если модель N недостаточно насыщенна, то M-особые типы могут разветвляться, но как только N реализует все типы из $S_n(M)$, имеется единственность M-особого расширения. Я имею в виду именно этих "сложившихся" особых сыновей, когда говорю о числе особых сыновей типа.

Лемма 12.3 *Если $|M| = \lambda \geq |T|$, то число M-особых типов не больше $2^{(2^\lambda)}$.*

Доказательство. M-особых сыновей не больше чем число возможных бесконечных определений ; бесконечное определение является функцией, которая формуле сопоставляет множество типов над M; имеется $|T|$ формул, имеется не более 2^λ типов над M, и число бесконечных определений ограничено числом $(2^{(2^\lambda)})^{|T|} = 2^{(2^\lambda \times |T|)} = 2^{(2^\lambda)}$.

□

Теперь, одна маленькая лемма теории моделей:

Лемма 12.4 *Пусть множество A параметров и кортеж $\bar{b}$ параметров содержатся в модели M теории T; если выполнимость формулы $f(x, \bar{b})$ (для x из любого элементарного расширения M) зависит только от типа x над A, тогда эта формула эквивалентна формуле $g(x, \bar{a})$ с параметрами $\bar{a}$ из A.*

Доказательство. Рассмотрим отображение ограничения $S_1(A \cup \{\bar{b}\})$ на $S_1(A)$; по непрерывности образы компактов $\langle f(x, \bar{b})\rangle$ и $\langle \neg f(x, \bar{b})\rangle$ – компакты, значит, замкнутые подмножества $S_1(A)$; их объединение – весь $S_1(A)$ целиком; и гипотеза нам говорит, что эти два образа дизъюнктны, то есть, что они являются дополнениями друг друга: значит, они оба являются открыто-замкнутыми подмножествами $S_1(A)$.

□

Теорема 12.5 *Пусть $p \in S_1(M)$ и q – особый сын p над элементарным расширением N модели M, имеющим следующее свойство: для всех $\bar{a}$ из N , любой тип над $M \cup \{\bar{a}\}$ реализован в N; тогда, если q определим, то p определим и q является его наследником.*

Доказательство. Рассмотрим формулу $f(x, \bar{y})$ и (финитарное!) определение d типа q для этой формулы; $df(\bar{y})$ использует параметры $\bar{a}$ из N, но, поскольку любой n-тип над $M \cup \{\bar{a}\}$ реализован в N и q является M-особым, тот факт, что $\bar{y}$ удовлетворяет $df(\bar{y})$ зависит только от типа $\bar{y}$ над M; по предыдущей лемме $df(\bar{y})$ можно заменить формулой с параметрами из M, которая таким образом будет также определением для p.

□

Следствие 12.6 *Стабильный тип имеет только единственного особого сына – своего наследника.*

Доказательство. Пусть p – стабильный тип над M, q – особый сын p над N и q_1 – M-особый сын q над моделью N_1, имеющий свойство насыщенности как в гипотезе предыдущей теоремы; так как q_1 определим, то он – наследник p над N_1, и q является наследником p над N.

□

Очевидно, наследник определимого типа – особый; но неопределимый тип, имеющий над достаточно большой моделью сколько угодно наследников (см. доказательство теоремы 11.11), имеет среди них неособые; или еще, по 11.7 (см. доказательство), он имеет сильного наследника, которого можно сдвинуть M-автоморфизмом: этот наследник, очевидно, не M-особый.

Отметим также что особый сын нестабильного типа нестабилен; действительно, если p имеет стабильного особого сына q, то q определим так же, как и все его сыновья, значит q – единственный наследник p, и мы знаем, что тогда p стабилен (наследник нестабильного типа нестабилен: см. конец 11.d).

Конец этого параграфа имеет целью прояснение понятия особого сына и не содержит ничего существенного для последующего материала. Сделаем следующее соглашение: если $M \subset A$, то q из $S_1(A)$ назовем M-особым, если он имеет M-особого сына, в предыдущем смысле, над моделью N, содержащей A.

Лемма 12.7 *Пусть M – модель T, $|M| < \lambda$ и N – элементарное λ-насыщенное и λ-сильно однородное расширение M; пусть A – подмножество N, $M \subset A \subset N$, $|A| < \lambda$, и пусть p и q – два различных типа из $S_1(A)$, имеющие одно и то же ограничение на M, и p – M-особый. Пусть X – подмножество N, содержащее все реализации p из N и никакую реализацию q, и Y – подмножество N, содержащее все реализации q из N и никакую реализацию p; тогда каждое из X и Y имеют по крайней мере λ различных образов при M-автоморфизмах N.*

Доказательство. Выберем бесконечное определение d M-особого сына p над N; индукцией по $\alpha < \lambda$ построим последовательность a_α элементов N и последовательность A_α подмножеств N следующим образом: $A_0 = A$, a_0 является реализацией q; a_α реализует над $\cup_{\beta<\alpha} A_\beta$ тип, полученный применением определения d, так как тип a_α над M является ограничением q над M, существует A_α того же типа над M, что и A, такое, что тип a_α над A_α соответствует q (т.е. $A_\alpha a_\alpha$ и $A_0 a_0$ имеют один и тот же тип над M). Так как N достаточно насыщенна, это построение можно проводить в N, и так как она однородна, существует M-автоморфизм s_α модели N, переводящий A на A_α; если $\beta < \alpha$, то $a_\alpha \in s_\beta X$, $a_\alpha \notin s_\alpha X$, $a_\alpha \in s_\alpha Y$, $a_\alpha \notin s_\beta Y$.

□

Теорема 12.8 *Пусть M – модель T, $|M| < \lambda$ и N – элементарное λ-насыщенное и λ-сильно однородное расширение M; пусть X подмножество N, которое можно сдвинуть M-автоморфизмом N (т.е. принадлежность x множеству X не зависит от типа x над M): тогда X имеет по крайней мере λ различных образов при M-автоморфизмах N.*

Доказательство. 1-ый случай. Существует множество A, $M \subset A \subset N$, $|A| < \lambda$, такое что принадлежность элемента множеству X зависит только от его типа над A; так как X не выдерживает все M-автоморфизмы, эта принадлежность не зависит только от его типа над M, и существуют p и q из $S_1(A)$, имеющие одно и то же ограничение над M и такие, что X содержит все реализации p, но не содержит ни одну реализацию q; мы можем очевидно считать, что один из этих типов – особый, и применить 12.7.

2-ой случай. Иначе, мы можем построить две последовательности a_α, b_α , $\alpha < \lambda$ так, что a_α и b_α имеют одни и те же типы над $M \cup \{\dots a_\beta \dots\}_{\beta<\alpha}$ и $a_\alpha \in X$, $b_\alpha \notin X$. По однородности существует автоморфизм s_α модели N, оставляющий неподвижным M и a_β для $\beta < \alpha$ и переводящее a_α на b_α; и для $\beta < \alpha$ имеем $a_\beta \notin s_\beta X$, $a_\beta \in s_\alpha X$.

□

Теорема 12.9 *Пусть M – модель T, $|M| < \lambda$ и N – элементарное λ-насыщенное и λ-сильно однородное расширение M; если тип из $S_1(N)$ не M-особый, то он имеет по крайней мере λ различных сопряженных ему типов относительно M-автоморфизмов N.*

Доказательство. Получается обобщением 12.8 для подмножеств X из N^n.

□

Очевидно, особый сын выдерживает M-автоморфизмы; теорема 12.9 подтверждает обратное про это свойство: p из $S_1(N)$ – M-особый, если и только, если над каждым элементарным расширением N он имеет сына, выдерживающего все M-автоморфизмы; и когда он не M-особый, мы можем найти некоторое элементарное расширение N, над которым каждый сын типа p имеет сколько угодно сопряженных ему типов относительно M-автоморфизмов N.

12.b Конаследники

Мы знаем, что тип p из $S_1(M)$ конечно выполним в M: каждый раз когда $p \vdash f(x, \bar{a})$, где $\bar{a} \in M$, тогда, так как $T(M) \vdash (\exists x) f(x, \bar{a})$, существует b в M, такой, что $M \vdash f(b, \bar{a})$. Это означает, что типы элементов M образуют плотное множество в $S_1(M)$ (Кстати, это свойство характеризует множества параметров, которые являются моделями, так как оно равносильно тесту Тарского: см. раздел 5.a).

Если теперь q является типом над элементарным расширением N модели M, то говорят, что q является *конаследником* своего ограничения p на M, если он конечно выполним в M, т.е. если он принадлежит замыканию в $S_1(N)$ типов элементов M; иначе говоря, каждый раз, когда $q \vdash f(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in N$, существует b в M, такой, что $N \vdash f(b, \bar{a})$.

Почему говорят конаследник? Мы обобщим немного понятие наследника: если $M \subset A$ и $p \in S_1(A)$, то мы говорим, даже если A не является моделью (но существенно, что M – модель!), что p наследует своему ограничению на M, если каждый раз когда $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in A$, существует $\bar{b}'$ в M, такой, что $p \vdash f(x, \bar{a}, \bar{b}')$. По теореме 11.2 это означает, что над каждой моделью, содержащей A, p продолжается до наследника в обычном смысле. Точно так же, мы обобщим понятие конаследника, говоря, что $p \in S_1(A)$ конаследует своему ограничению на M, если он конечно выполним в M. Очень скоро мы увидим, что это означает равным образом, что он продолжается до некоторой модели, содержащей A, в качестве конаследника своего ограничения на M. И эти понятия имеют смысл не только для 1-типов, а также для n-типов и даже для α-типов.

После этого, мы заметим, что то, что тип $\bar{a}$ над $M \cup \{\bar{b}\}$ наследует своему ограничению на N, значит, что тип $\bar{b}$ над $M \cup \{\bar{a}\}$ конаследует своему ограничению на M; действительно, в обеих случаях это означает, что каждый раз как только $f(\bar{a}, \bar{b})$ истинно, где $f(\bar{x}, \bar{y})$ является формулой с параметрами из M, то существует $\bar{b}'$ в M такой, что $f(\bar{a}, \bar{b}')$ истинно. Точно также, если число переменных типов бесконечно, то тип A над $M \cup B$ наследует своему ограничению над $M \iff$ тип B над $M \cup A$ конаследует своему ограничению на M.

Понятие конаследника в некотором роде дуально понятию наследника: обмениваются ролями переменные типа и переменные параметров. Эта двойственность позволила бы сэкономить несколько лемм, которые сейчас последуют, поскольку каждое свойство наследника переносится на конаследника; например, существование наследника влечет существование конаследника, так как если типы A и B над M известны, то помещать $A^\frown B$ по отношению к M (т.е. дополнить объединение типа A и типа B над M до полного типа над M) так, чтобы тип A над $M \cup B$ наследовал своему ограничению на M, – это размещать A и B относительно друг друга над M так, чтобы тип B над $M \cup A$ конаследовал своему ограничению на M! Но, так как этот способ умозаключений – немного бессмыслен, а излишество нас совсем не пугает, мы собираемся доказать эти леммы:

Лемма 12.10 *Пусть N – элементарное расширение M и π – неполный тип над N (т.е. замкнутое множество в $S_1(N)$), который конечно выполним в M; тогда π дополняется до полного типа p над N, конаследующего своему ограничению на M.*

Доказательство. Рассмотрим в $S_1(N)$ замкнутое множество $\overline{M}$, образованное замыканием в $S_1(N)$ типов элементов M, и открыто-замкнутые множества, определенные конечными фрагментами π; по предположению это семейство замкнутых множеств имеет свойство конечного пересечения; по компактности их общее пересечение не пусто.

□

Лемма 12.11 *Каждый тип (над моделью T) имеет конаследника; более точно, если p из $S_1(M)$, q является конаследником p над элементарным расширением N модели M и P является элементарным расширением N, тогда q имеет сына над $S_1(P)$, который является конаследником p.*

Доказательство. Рассмотрим q как неполный тип над P, и применим предыдущую лемму.

$\square$

Так как p – свой собственный конаследник, лемма влечет, что он имеет конаследников над каждым элементарным расширением своей модели. Другой очевидный результат: если $p \subset q \subset r$, и если r является конаследником p, то r конаследует q и q конаследует p.

Лемма 12.12 *Если $|M| = \lambda$, то число типов, которые конаследуют свои ограничения над M, не больше $2^{(2^\lambda)}$.*

Доказательство. В $S_1(N)$ точка из $\overline{M}$ определена следом на M фильтра своих окрестностей, и имеется не более $2^{(2^\lambda)}$ возможностей для этого множества подмножеств M.

$\square$

И вот ожидаемый всеми результат:

Теорема 12.13 *Конаследник является особым.*

Доказательство. Пусть $p \in S_1(N)$, q – конаследник p над N, и N_1 – элементарное расширение N, реализующее все типы над M; по 12.11 q имеет сына q_1 над N_1, являющегося конаследником p; и если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из N_1 и имеют один и тот же тип над M, то не существует элемента x в M, удовлетворяющего $f(x,\bar{a}) \wedge \neg f(x,\bar{b})$; следовательно, q_1 так же, как и q, является M-особым.

$\square$

Отметим, что особый тип из 12.1 – конаследник.

Возвращаемся к нашему примеру, где T – теория плотных порядков без концевых точек. Если p – реализованный, то он имеет только единственного сына над N, который будет его единственным наследником и его единственным особым сыном. Если p – тип вида a^+, то его двумя особыми сыновьями будут его наследник, тип a^+ над N, и его конаследник, мажорирующий все реализации p в N (другие сыновья q типа p неособые, так как можно найти в N две реализации b_1 и b_2 типа p, такие, что $q \vdash b_1 < x < b_2$); точно так же, если p имеет вид a^-, то он имеет двух особых сыновей – наследника, мажорирующего все реализации p в N, и конаследника, минорирущего их всех. Иррациональный тип p имеет также двух особых сыновей – конаследников, являющихся одновременно наследниками: один примыкает к M справа и минорирует все реализации p, а другой, который примыкает слева, мажорирует все эти реализации. Тип $+\infty$ имеет также двух особых сыновей – наследника и единственного конаследника, минорирущего все реализации p в M; точно так же тип $-\infty$ имеет двух особых сыновей – наследника и конаследника.

Чтобы получить особого сына, не являющегося ни наследником и ни конаследником, рассмотрим следующий битип, имеющий свои две переменные в одном сечении a^+: $p \vdash b < x_1 < x_2 < c$ для всех $b \leq a < c$ из M; p имеет трех особых сыновей : p_1, для которого все реализации p в N минорированы x_2 и который является наследником p; p_2, для которого все реализации p в N меньше x_1 и который является единственным конаследником p; и, наконец, p_3, для которого все эти реализации находятся между x_1 и x_2. Этот тип p_3, являющийся наследником со стороны x_1 и конаследником со стороны x_2, не является ни наследником, ни конаследником p; этот пример битипа легко превращается в пример 1-типа (рассмотрите структуру, образованную цепью $Q \times Q$ и с двумя проекциями в языке).

Так как конаследник – особый, то по следствию 12.6 *стабильный тип имеет только единственного конаследника, который является его наследником*; если тип $\bar{a}$ над M стабилен, то тип $\bar{a}$ над $M \cup \{\bar{b}\}$ наследует своему ограничению над M, если и только если он ему конаследует, т.е. если и только если тип $\bar{b}$ над $M \cup \{\bar{a}\}$ наследует (или конаследует!) своему ограничению над M.

Вот это и есть очень фундаментальное свойство, связанное со стабильностью и называемое *"симметричностью ответвления"*, доказанное здесь для типов над моделью N, но которое позднее будет обобщено для типов над произвольным множеством параметров; если T стабильна, то говорят, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ *расположены независимо*, или просто *независимы* над M, если тип $\bar{a}$ над $M \cup \{\bar{b}\}$ наследует своему ограничению на M, либо еще если тип $\bar{b}$ над $M \cup \{\bar{a}\}$ наследует своему ограничению на M. Таким образом, это понятие независимости, существенное в теории стабильности, симметрично относительно $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Отметим наконец, что почти очевидно, что в стабильной теории мы имеем единственность конаследника : то, что тип A над M имеет только единственного конаследника над $M \cup B$, значит, что тип B над M имеет только единственного наследника над $M \cup A$.

Или еще: тип p из $S_1(M)$ определяется следами над M своих окрестностей $\langle f(x, \bar{a}) \rangle$, являющихся определимыми множествами с параметрами из M; если T нестабильна, N расширяет модель M и $g(x, \bar{b})$ – формула с параметрами из N, то ее след на M может быть новым множеством и фильтр окрестностей p может расшириться до двух новых фильтров, один из которых содержит $\langle g(x, \bar{b}) \rangle$, а другой $\langle \neg g(x, \bar{b}) \rangle$, откуда следует существование нескольких конаследников для p. Но это невозможно, если T стабильна, поскольку, как мы уже отметили, тип $\bar{b}$ над M определим, след $g(x, \bar{b})$ на M определим в M: тип p из $S_1(M)$ имеет единственного конаследника, так как мы не можем больше рафинировать фильтр следов его окрестностей на M.

Но естественно, надо еще доказать, что в стабильном случае этот единственный конаследник p является его наследником.

12.c Последовательности Морли

Рассмотрим последовательность a_i элементов модели M теории T, индексированную линейно упорядоченным множеством I ("последовательность", собственно говоря, это отображение ω в M; здесь мы используем этот термин в чуть более общем смысле и у нас I-последовательность является отображением I в M). Отметим также, что порядок $\leq$ на I не имеет ничего общего с языком L теории T.

Мы говорим что эта последовательность *неразличима* (относительно порядка) если для любого натурального n и любых двух наборов $i_1 < \cdots < i_n$ и $j_1 < \cdots < j_n$ элементов, которые являются двумя строго возрастающими n-ками из I, n-ки $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ и $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$ имеют один и тот же тип; иначе говоря, эта последовательность удовлетворяет аксиомам $f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \leftrightarrow f(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$ каждый раз когда $i_1 < \cdots < i_n$ и $j_1 < \cdots < j_n$.

Если, кроме того, эти n-ки имеют один и тот же тип над множеством параметров A, т.е. если последовательность *неразличима* в теории $T(A)$, то говорят что она *неразличима над* A, или еще A-*неразличима*.

Назовем *множеством Эренфойхта* неразличимой последовательности s множество формул $f(x_1, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяются кортежами из s с возрастающими последовательностями индексов; если известно, что I-последовательность s неразличима, то указывая ее множество Эренфойхта, определяем полностью тип s (над $\emptyset$; или над A, когда имеем неразличимость над A и, естественно, множество Эренфойхта состоит из формул с параметрами из A, удовлетворяющиеся возрастающими последовательностями кортежей). Говорят, что две неразличимые последовательности *подобны*, если они имеют одно и то же множество Эренфойхта.

Отметим, что если существует бесконечная неразличимая последовательность с множеством Эренфойхта E, или даже только произвольно длинные конечные неразличимые последовательности с множеством Эренфойхта E, тогда для каждой цепи I существует неразличимая I-последовательность с множеством Эренфойхта E: действительно, пишем аксиомы, утверждающие, что a_i образуют неразличимую последовательность с множеством Эренфойхта E; конечный фрагмент этого множества предложений содержит только конечное число индексов $i_1 < \cdots < i_n$, и он интерпретируем в любой неразличимой последовательности с множеством Эренфойхта E, имеющей длину $\geq n$; следовательно, эти аксиомы имеют модель. Мы всегда должны помнить, что утверждать существование неразличимой последовательности в некоторой модели T значит утверждать непротиворечивость некоторой теории, некоторого типа I-последовательности.

Можно понять тем же способом, что если s – бесконечная неразличимая I-последовательность, и если цепь J является расширением I, тогда s продолжается до неразличимой J-последовательности t, очевидно подобной s; действительно, так как I бесконечна, существует неразличимая J-последовательность $t' = (\ldots a'_j \ldots)$, подобная s; последовательность s и последовательность $s' = (\ldots a'_i \ldots)_{i \in I}$ имеют один и тот же тип, поскольку они подобны, и имеют одно и то же множество индексов I, откуда следует существование t.

Мы говорим, что последовательность s *тотально неразличима*, если она такова для любого порядка своих индексов; иначе говоря, каждый раз, когда $i_1, \ldots, i_n$ различны так же, как и $j_1, \ldots, j_n$, последовательность удовлетворяет аксиомам $f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \leftrightarrow f(a_{j_1}, \ldots, a_{j_n})$. Это означает, что если множество Эренфойхта содержит $f(x_1, \ldots, x_n)$, то оно содержит также каждую формулу, полученную из нее перестановкой переменных x_i: последовательность, подобная тотально неразличимой последовательности, сама тотально неразличима.

Кроме тривиального случая, когда в последовательности повторяется один и тот же элемент, элементы a_i неразличимой последовательности – попарно различные; в случае тотально неразличимости мы будем говорить лучше (тотально) *неразличимое множество*, так как определение тотальной неразличимости в действительности не использует какое-либо упорядочивание индексов. Наконец, мы ограничимся определением неразличимой последовательности элементов; можно определять тем же способом неразличимые последовательности n-ок, или даже α-последовательностей.

Эти неразличимые последовательности играют очень важную роль в конструкции моделей стабильной теории; эта роль была выявлена в первой статье Майкла Морли, которая заложила основы изучения стабильности. Отсюда и возникло название *последовательность Морли*, данное неразличимой последовательности, присоединенной к особому типу следующим образом.

Рассмотрим модель M теории T, расширение N модели M, реализующее все n-типы над M, и M-особый тип p над N. Пусть задано также множество A параметров, содержащее M; A и N лежат в некоторой большой модели T. Тогда называют *последовательностью Морли пары* (p, M) *над* A последовательность (или, более точно, тип последовательности над A) построенную таким образом : реализуют элементом a_0 единственного M-особого сына p над $N \cup A$, затем элементом a_1 единственного M-особого сына p над $N \cup A \cup \{a_0\}$, ... , a_{n+1} единственного M-особого сына p над $N \cup A \cup \{a_0, \ldots, a_n\}$ и т.д.

Если вы находите модель N слишком громоздкой, то можете действовать более экономно, так как достаточно знать только бесконечное определение p над M: на $n+1$-ом этапе, реализуем элементом a_{n+1} тип, полученный с помощью этого бесконечного определения над $A \cup \{a_0, \ldots, a_n\}$; элемент a_{n+1} удовлетворяет формуле $f(x, \bar{a}, a_0, \ldots, a_n)$, где $\bar{a} \in A$, тогда и только тогда, когда кортеж $(\bar{a}, a_0, \ldots, a_n)$ имеет над M тип, подходящий бесконечному определению p над M. Например, если тип p из $S_1(M)$ определим, то последовательность Морли его наследника получается применением (финитарного!) определения p: реализуем элементом a_0 единственного наследника p над A, затем элементом a_1 единственного наследника p над $A \cup \{a_0\}, \ldots$, элементом a_{n+1} наследника p над $A \cup \{a_0, \ldots, a_n\}$ и т.д.

Если p является стабильным типом, то будем говорить о *последовательности Морли типа* p, вместо последовательности Морли наследника p, так как p имеет только единственного особого сына, являющегося его наследником; но когда тип имеет нескольких особых сыновей, то он может породить столько последовательностей Морли, сколько он имеет особых сыновей, и надо уточнить, о котором из них идет речь.

Неинтересный случай последовательности Морли, это когда M-особый тип является типом некоторого элемента из M: последовательность только повторяет этот элемент. Иначе, последовательность образована из различных элементов, поскольку особый сын не реализованного типа также не реализован (если p является нереализованным типом над M, то можно найти некоторое элементарное расширение N модели M, где он имеет сколько угодно реализаций, и если $a \neq b$, то невозможно иметь $q \vdash x = a$ и $q \vdash x = b$!)

Теорема 12.14 *Последовательность Морли над A особого типа является A-неразличимой.*

Доказательство. Покажем индукцией по n, что если $m_0 < \dots < m_n$, тогда $(a_0, \dots, a_n)$ и $(a_{m_0}, \dots, a_{m_n})$ имеют один и тот же тип над A; если $f(\bar{a}, a_0, \dots, a_n)$ истинна, то это потому, что $(\bar{a}, a_0, \dots, a_{n-1})$ имеет над N тип, подходящий бесконечному определению p; так как по гипотезе индукции $(\bar{a}, a_0, \dots, a_{n-1})$ и $(\bar{a}, a_{m_0}, \dots, a_{m_{n-1}})$ имеют один и тот же тип над M, формула $f(\bar{a}, a_{m_0}, \dots, a_{m_n})$ также истинна.

□

Таким образом, особые сыновья позволяют породить неразличимые последовательности; например, если $f(x)$ является формулой, удовлетворяющейся бесконечным числом элементов модели M теории T, то она имеет в элементарном расширении N бесконечную неразличимую последовательность (различных!) элементов : возьмите последовательность Морли M-особого сына не реализованного типа над M, удовлетворящего $f(x)$.

Теорема 12.15 *Последовательность Морли над A стабильного типа тотально неразличима над A.*

Доказательство. Докажем сначала, что для всех i, $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1})$ и $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i)$ (два последних элемента меняются местами) имеют один и тот же тип над A; для этого, рассмотрим модель N, содержащую $A \cup \{a_0, \dots, a_{i-1}\}$, и элемент a'_i, реализующий наследника q типа p над N, и элемент a_{i+1}, реализующий наследника q (а также типа p) над $N \cup \{a'_i\}$; ясно, что $(a_0, \dots, a_{i-1}, a'_i, a'_{i+1})$ и $(a_0, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1})$ имеют один и тот же тип над A: рассмотрите, например, определения типов. Итак, тип (a'_i, a'_{i+1}) над N получен реализацией сначала q, затем его наследника, в то время как тип (a'_{i+1}, a'_i) получен реализацией сначала q, затем его конаследника; так как для стабильного типа наследник и конаследник совпадают, (a'_i, a'_{i+1}) и (a'_{i+1}, a'_i) имеют один и тот же тип над N, откуда следует заключение теоремы.

Докажем теперь индукцией по $n > i + 1$, что $(a_0, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ и $(a_0, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n)$ имеют один и тот же тип над A; если a_n удовлетворяет формуле $f(a_0, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, x)$, то он удовлетворяет также формуле $f(a_0, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_{n-1}, x)$, так как множества параметров этих формул имеют один и тот же тип над A. Теперь теорема следует из того, что транспозиции двух последовательных элементов достаточны для порождения группы всех перестановок n элементов.

□

Мы определили только ω-последовательность Морли особого типа, но естественно можно продолжать построение и определить α-последовательность Морли этого типа для каждого ординала α, и даже его I-последовательность Морли для какой-нибудь цепи I. Речь идет о неразличимых последовательностях, подобных ω-последовательности Морли.

Способ построения последовательности Морли, который больше похож на то, что делал Морли, является следующим: рассмотрим модель M теории T и элементарное $|A|^+$-насыщенное расширение N модели M, $M \subset A \subset N$; теперь, пусть p из $S_1(N)$ – M-особый тип; мы получаем в N копии последовательности Морли типа p над A реализуя элементом a_0 ограничение p над A, затем элементом a_1 ограничение p над $A \cup \{a_0\}$, ... , элементом a_{n+1} ограничение p над $A \cup \{a_0, \ldots, a_n\}$ и т.д.

12.d Свойство независимости

Пусть, как всегда, T – полная теория; говорят, что формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ имеет *свойство независимости*, если все следующие аксиомы I_n, где $\bar{x}$ индексированы множеством $n = \{0, \ldots, n-1\}$, а $\bar{y}$ – множеством подмножеств n, которым является 2^n, являются следствиями T:

$$\exists \bar{x}_0 \ldots \exists \bar{x}_i \ldots \exists \bar{x}_{n-1} \exists \bar{y}_\emptyset \ldots \exists \bar{y}_w \ldots \exists \bar{y}_{2^n} [\bigwedge_{i \in w} f(\bar{x}_i, \bar{y}_w) \wedge \bigwedge_{i \notin w} \neg f(\bar{x}_i, \bar{y}_w)] \; .$$

По компактности, это означает, что если индексировать $\bar{a}_i$ кардиналом λ, а $\bar{b}_w$ множеством 2^λ подмножеств λ, множество I_λ, состоящее из формул $f(\bar{a}_i, \bar{b}_w)$, $i \in w$, и формул $\neg f(\bar{a}_i, \bar{b}_w)$, $i \notin w$, совместно с T. Мы видим, что $\bar{a}_i$ могут разделяться как угодно посредством формулы f, что оправдывает термин "свойство независимости".

Например, в арифметике формула "x делит y" имеет свойство независимости: достаточно брать элементы x_i взаимно простыми. В каждой теории T бесконечной булевой алгебры, формула $x \leq y$ имеет свойство независимости, так как легко видеть, что в такой алгебре можно найти ненулевые и попарно дизъюнктные элементы $x_0, \ldots, x_n$: в качестве y_w можно брать верхнюю грань x_i, $i \in w$.

Лемма 12.16 *Свойство независимости симметрично относительно $\bar{x}$ и $\bar{y}$: если $f(\bar{x}, \bar{y})$ имеет свойство независимости, то формула $g(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = f(\bar{y}_1, \bar{x}_1)$ также имеет это свойство.*

Доказательство. Докажем, что $I_{2^n}(f)$ влечет $I_n(g)$; в I_{2^n}, $\bar{x}$ индексированы подмножествами w множества n, а $\bar{y}$ – подмножествами W множества 2^n; таким образом, имеем:

$$\bigwedge_{w \in W} f(\bar{x}_w, \bar{y}_W) \wedge \bigwedge_{w \notin W} \neg f(\bar{x}_w, \bar{y}_W) \; .$$

Достаточно оставить только те W, что являются ультрафильтрами, и если W_i – (главный!) ультрафильтр, порожденный i, то $w \in W_i$ значит, что $i \in w$.

$\square$

Еще одно определение: пусть $s = (\ldots \bar{a}_i, \ldots)$ – I-последовательность, где I является цепью n-ок из модели M теории T; мы говорим, что эта последовательность *делима*, если существует $\bar{b}$ в элементарном расширении модели M и формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ такие, что индексы тех $\bar{a}_i$, что удовлетворяют $f(\bar{x}, \bar{b})$, образуют конфинальное в I множество так же, как индексы тех $\bar{a}_i$, что удовлетворяют $\neg f(\bar{x}, \bar{b})$. Чтобы последовательность была делимой, надо, конечно, чтобы цепь I была бесконечной и даже без наибольшего элемента.

Если последовательность s *неделима*, и A является подмножеством элементарного расширения M, то *предельным типом* s над A называется множество $t(s/A)$ формул $f(\bar{x}, \bar{b})$ с параметрами $\bar{b}$ из A, удовлетворяющиеся всеми $\bar{a}_i$ начиная с некоторого индекса; поскольку оно конечно выполнимо в s и s неделима, это полное, совместное множество формул, т.е. тип. Если в s существует элемент a наибольшего индекса, то это просто тип a над A: случай – неинтересный; иначе, если I не имеет наибольшего элемента и если все $\bar{a}_i$ – различные, то предельный тип над множеством A не реализуется в A.

Отметим, что свойство делимости или неделимости последовательности является свойством его типа над $\emptyset$. Связь со свойством независимости дается следующей теоремой:

Теорема 12.17 *Формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ имеет в T свойство независимости, если и только если существует неразличимая последовательность кортежей $\bar{a}_i$ той же длины, что и $\bar{x}$, делящаяся на два конфинальных подмножества некоторой формулой $f(\bar{x}, \bar{b})$.*

Доказательство. Предположим, что f имеет свойство независимости, и пусть M – модель T, содержащая реализацию I_ω:

$$A = \{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n, \ldots\}_{n \in \omega}, \quad B = \{\bar{b}_\emptyset, \ldots, \bar{b}_w, \ldots\}_{w \in 2^\omega},$$

$$M \vdash f(\bar{a}_n, \bar{b}_w) \text{ если } n \in w, \quad M \vdash \neg f(\bar{a}_n, \bar{b}_w) \text{ если } n \notin w\ .$$

Пусть U – неглавный ультрафильтр подмножеств ω, и N – достаточно насыщенное расширение M; обозначим через p_U тип над N, определенный таким образом : $p_U \vdash g(\bar{x}, \bar{c})$, где $\bar{c} \in N$, если $\{n : N \vdash f(\bar{a}_n, \bar{c})\} \in U$; мы видим, что этот тип – M-особый и, так как он конечно выполним в A, он конаследует своему ограничению на M.

Строим тогда последовательность Морли типа p_U над M, пусть $\bar{a}'_0, \ldots, \bar{a}'_n, \ldots$, где по определению $\bar{a}'_{n+1}$ удовлетворяет некоторой формуле с параметрами из $M \cup \{\bar{a}'_0, \ldots, \bar{a}'_n\}$ тогда и только тогда, когда эта формула выполняется почти для всех a_i по-модулю U; мы отметим, что ввиду того, что ультрафильтр U – неглавный, все $\bar{a}'_i$ – различные. Мы знаем, что эта последовательность $\bar{a}'_n$ неразличима, и собираемся показать, что она делима способом, указанным в гипотезе теоремы.

Я утверждаю, что каждая формула $g(\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n)$, удовлетворяющаяся кортежом $(\bar{a}'_0, \ldots, \bar{a}'_n)$, удовлетворяется n-кой кортежей $\bar{a}_i$, и даже попарно различных, поскольку можно включить в эту формулу тот факт, что $\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n$ различны; действительно, существует $\bar{a}_{i_n}$ такой, что $\bar{a}'_0{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}'_{n-1}{}^\frown \bar{a}_{i_n}$ удовлетворяет g, затем $\bar{a}_{i_{n-1}}$ такой, что $\bar{a}'_0{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}'_{n-2}{}^\frown a_{i_{n-1}}{}^\frown \bar{a}_{i_n}$ удовлетворяет g, и т.д. Это влечет, что кортеж $(\bar{a}'_0, \bar{a}'_1, \ldots, \bar{a}'_{2n}, \bar{a}'_{2n+1})$ удовлетворяет формуле:

$$\exists \bar{y}[\bigwedge f(\bar{x}_{2i}, \bar{y}) \wedge \bigwedge \neg f(\bar{x}_{2i+1}, \bar{y})]\ ,$$

Действительно, все кортежи, образованные из $2n + 1$ различных элементов A , удовлетворяют этой формуле : возьмите в качестве $\bar{y}$ подходящий $\bar{b}_w$; так что наш кортеж не может удовлетворять отрицанию этой формулы. Следовательно, по компактности существует $\bar{b}$ такой, что $f(\bar{a}'_n, \bar{b})$ истинна для четных n и ложна для нечетных n, и последовательность имеет указанное свойство делимости.

Обратно, предположим, что мы имеем делимую неразличимую последовательность $\bar{a}_i$, и пусть эта последовательность делится формулой $f(\bar{x}, \bar{b})$ на два конфинальных подмножества. Начиная с элемента $\bar{a}_0$, удовлетворяющего $f(\bar{x}, \bar{b})$, выберем $\bar{a}_1$ большего индекса, удовлетворяющего $\neg f(\bar{x}, \bar{b})$, затем $\bar{a}_2$ большего индекса, удовлетворяющего $f(\bar{x}, \bar{b})$, и т.д. ; таким образом, мы выделяем из нашей последовательности подпоследовательность $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$, которая очевидно также неразличима, такую, что $f(\bar{a}_n, \bar{b})$ истинна тогда и только тогда, когда n четно. Теперь я утверждаю, что для каждого подмножества w отрезка $[0, n]$ верна следующая формула :

$$\exists \bar{y}_w [\bigwedge_{i \in w} f(\bar{a}_i, \bar{y}_w) \wedge \bigwedge_{i \notin w} \neg f(\bar{a}_i, \bar{y}_w)] \ .$$

Действительно, выберем возрастающую последовательность индексов $m_0, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ так, чтобы m_i было четно если и только, если $i \in w$; кортеж $\bar{a}_{m_0}{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_{m_n}$ удовлетворяет этой формуле: возьмите $\bar{y}_w = \bar{b}$; и, значит, кортеж $\bar{a}_0{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_n$, имеющий тот же тип, также ей удовлетворяет. Следовательно, формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ имеет свойство независимости.

□

Запомним принцип, который использовался в доказательстве первой части этой теоремы, а именно, что последовательность Морли M-конаследника имеет конечно выполнимый тип в M.

Теорема 12.18 *Если в T имеется формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ со свойством независимости, то существует формула $g(x, \bar{y})$ со свойством независимости.*

Доказательство. Итак, пусть формула $f(x_1\bar{x}, \bar{y})$ имеет свойство независимости. По симметрии (лемма 12.16) и по предыдущей теореме можно найти неразличимую последовательность кортежей $\bar{a}_0, \ldots \bar{a}_n, \ldots$, и кортеж $b^\frown \bar{c}$ так, чтобы $f(b, \bar{c}, \bar{a}_n)$ была истинной когда n четно, и ложной когда n нечетно. Так как мы пытаемся строить такую формулу, где $\bar{x}$ имеет минимальную длину, то мы можем предполагать, что никакая формула $g(\bar{c}, \bar{z})$, какова бы ни была длина k кортежа $\bar{z}$, не может разделить на два конфинальных подмножества неразличимую последовательность k-кортежей: иначе, мы нашли бы формулу со свойством независимости, имеющую более короткий кортеж $\bar{x}$, и могли бы продолжить спуск.

Я утверждаю, что в этих условиях можно, кроме того, предполагать, что $\bar{a}_n$ образуют неразличимую последовательность над $\bar{c}$. Для этого я покажу индукцией по m совместность теории, включающей следующие аксиомы:

- аксиомы $g(\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n) \leftrightarrow g(\bar{a}_{i_0}, \ldots, \bar{a}_{i_n})$, где $i_0 < \cdots < i_n$, выражающие, что последовательность $\bar{a}_n$ неразличима над $\emptyset$
- аксиомы $f(b, \bar{c}, \bar{a}_{2n})$, $\neg f(b, \bar{c}, \bar{a}_{2n+1})$

– аксиомы, утверждающие, что набор k кортежей $\bar{a}_i$ возрастающих индексов имеет тот же тип над $\bar{c}$, что и $\bar{a}_0 \dots \bar{a}_{k-1}$, для каждого $k \leq m$.

Итак, предположим, что имеем модель этих аксиом для m; с помощью этих a_i можно интерпретировать каждый конечный фрагмент системы аксиом для $m+1$; откуда будет следовать совместность этого множества аксиом. Мы поступаем следующим образом.

Если мы зафиксируем кортеж индексов $i_0, \dots, i_{m-1}$, расположенных в возрастающем порядке, то последовательность $\{\bar{a}_{i_0} \dots \bar{a}_{i_{m-1}} \bar{a}_n : n > i_{m-1}\}$, неразличима. Значит, она не может быть разрезана на два конфинальных подмножества некоторой формулой с параметрами $\bar{c}$. Таким образом, для достаточно больших n либо все a_n удовлетворяют $g(\bar{c}, \bar{a}_{i_0}, \dots, \bar{a}_{i_{m-1}}, \bar{y})$, либо все удовлетворяют ее отрицанию.

Непротиворечиво предполагать, что это происходит как только $n > i_{m-1}$; действительно, достаточно извлечь подпоследовательность следующим образом: начинаем с $A_0 = \{\bar{a}_0, \dots \bar{a}_{m-1}\}$; добавим $\bar{a}_n$ к A_0, где n имеет ту же четность, что и m, начиная с которого истинностное значение $g(\bar{c}, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{m-1}, \bar{y})$ остается постоянным, и образуем таким образом множество A_1 ; затем добавляем некоторый $\bar{a}_n$, большего индекса чем у каждого из элементов A_1 и той же четности, что и $m+1$, и такого, чтобы мы имели постоянство истинностных значений формул g для всех m-ок кортежей из A_1, и т.д. Когда эта процедура завершится, достаточно перенумеровать извлеченную последовательность.

Эту манипуляцию, которую мы проделали для единственной формулы g, мы можем также проделать для конечного числа формул $g_1, \dots, g_k$, и тогда, по компактности, непротиворечиво предполагать, что каждой возрастающей m-ке $s = (i_0, \dots, i_{m-1})$ соответствует тип p_s над $\bar{c}$, который реализуется всеми $\bar{a}_s {}^\frown \bar{a}_n$, где $\bar{a}_s$ обозначает сочленение $\bar{a}_{i_0} {}^\frown \bar{a}_{i_1} {}^\frown \dots {}^\frown \bar{a}_{i_{m-1}}$, как только $n > i_{m-1}$.

Кроме того, мы можем предполагать, что существует $\bar{a}_\omega$, такой, что последовательность $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n, \dots a_\omega$ была неразличима (над $\emptyset$), и такой, что для каждой возрастающей m-ки индексов s $\bar{a}_s \bar{a}_\omega$ реализует p_s; действительно, в конечном фрагменте теории, утверждающей это, $\bar{a}_\omega$ может интерпретироваться как $\bar{a}_n$, для достаточно большого n.

Я утверждаю, что для данной формулы $h(\bar{c}, \bar{y}_0, \dots, \bar{y}_m)$ существует натуральное N такое, что для типов p_s, соответствующих последовательности s, у которой наименьший элемент больше N, либо все они содержат h, либо все содержат $\neg h$. Действительно, если бы это было не так, то мы могли бы найти последовательность $s_0 < s_1 < \dots < s_n < \dots$, где $s_i < s_j$ означает, что наименьший элемент s_i строго больше наибольшего элемента s_j , такую, что тип p_{s_n} содержит h, если n четно, и $\neg h$, если n нечетно. Однако последовательность $\bar{a}_{s_n} {}^\frown \bar{a}_\omega$ неразличима и она разрезается на два конфинальных подмножества формулой h , что противоречит гипотезе.

Следовательно, стерев четное число элементов в начале последовательности и перенумеровав её, мы видим, что можно предполагать, что все типы p_s содержат h или все содержат $\neg h$; это можно проделать также для конечного числа $h_1, \dots, h_k$ формул; по компактности можно предполагать, что все типы p_s равны; это в точности то, что мы хотели доказать.

Таким образом, мы можем предполагать, что последовательность $\bar{a}_0, \dots,$

$\bar{a}_n, \ldots$ неразличима над $\bar{c}$, т.е. что последовательность $\bar{c}^\frown\bar{a}_0, \ldots, \bar{c}^\frown\bar{a}_n, \ldots$ неразличима; она разделяется на два конфинальных подмножества формулой $f(b, \bar{x}, \bar{y})$. Достаточно прибавить $\bar{x}$ к параметру $\bar{y}$, чтобы получить формулу с единственной переменной x_1, имеющую свойство независимости.

□

Мы говорим, что T *имеет свойство независимости*, если одна из ее формул имеет это свойство; по предыдущей теореме, это означает, что существует формула $f(x, \bar{y})$, где x – переменная, имеющая в T свойство независимости. Другими словами, T не имеет свойство независимости, если и только если она удовлетворяет одному из двух следующих эквивалентных условий:

– каждая неразличимая последовательность элементов неделима ;

– каждая неразличимая последовательность n-ок неделима для любого n.

Если T имеет свойство независимости, то она нестабильна: реализуем множество I_λ для симметричной формулы к f, a_w индексируются множеством 2^λ , а $\bar{b}_i$ – множеством λ; все a имеют различные типы над множеством B всех $\bar{b}_i$, имеющим мощности λ. Следовательно, эта теория нестабильна во всех мощностях λ; это нестабильность даже в некотором роде максимальна, так как, если $\lambda > |T|$, то мы не можем иметь больше 2^λ типов над множеством мощности λ.

Мимоходом отметим, что теории T и $T(A)$ одновременно имеют или не имеют свойство независимости и что, если T' интерпретируема в T и имеет свойство независимости, тогда T также имеет это свойство. После этого, рассмотрим некоторые свойства неразличимых последовательностей, делимых и, главным образом, неделимых.

Сначала отметим, что если s является неразличимой делимой последовательностью, то каждая подобная ей неразличимая последовательность без наибольшего индекса делима: действительно, если разбить множество индексов этой последовательности на два конфинальных подмножества X и Y, то существование элемента $\bar{b}$, удовлетворяющего $f(a_i, \bar{b})$, если $i \in X$ и $\neg f(a_i, \bar{b})$, если $i \in Y$ непротиворечиво, так как каждый конечный фрагмент соответствующей теории может интерпретироваться посредством последовательности s. Если исключить тривиальный случай множества индексов, имеющего наибольший элемент, мы видим, что свойство делимости или неделимости неразличимой последовательности зависит только от ее множества Эренфойхта.

Рассмотрим неразличимую и неделимую ω-последовательность s (так же, как по ходу изложения мы рассматриваем только 1-типы, чтобы не усложнять попусту обозначения, мы ограничимся отныне неразличимыми последовательностями элементов, а не кортежей). Если $f(x, \bar{b})$ – формулой с параметрами $\bar{b}$ из элементарного расширения модели, из которой взята s, то поскольку начиная с некоторого номера n все a_n удовлетворяют $f(x, \bar{b})$, или все удовлетворяют $\neg f(x, \bar{b})$, эта формула разбивает последовательность s на конечное число сегментов $s_1, \ldots, s_k$, таких, что элементы каждого сегмента дают одно и то же значение истинности для $f(x, \bar{b})$ и $f(x, \bar{b})$ принимает противоположные значения истинности на последовательных сегментах. Это число k будет называться *числом чередования* формулы $f(x, \bar{b})$ на s.

Докажем, что это число чередования мажорировано независимо от $\bar{b}$; действительно, если бы для каждого k существовал $\bar{b}_k$ такой, что $f(x, \bar{b}_k)$ чередуется по крайней мере k раз, то мы показали бы совместность с типом s множества предложений $\neg f(a_{2n}, \bar{b})$, $\neg f(a_{2n+1}, \bar{b})$, т.е. делимость s. Назовем *числом чередования* $f(x, \bar{y})$ над s максимум чисел чередований $f(x, \bar{b})$ над s.

Если $f(x, \bar{y})$ не имеет свойства независимости, то это число чередования может быть мажорировано только в зависимости от $f(x, \bar{y})$, независимо от s ; если это было бы не так, то мы показали бы совместность с T теории, выражающей что s является неразличимой последовательностью, делимой формулой $f(x, \bar{y})$. Естественно, число чередования последовательности s, лишь бы только она была бесконечной, зависит только от ее множества Эренфойхта: на другой подобной последовательности, $f(x, \bar{y})$ не чередуется больше.

Что теперь происходит, если последовательность s тотально неразличима и неделима ? Тогда я утверждаю, что для каждой формулы $f(x, \bar{y})$, существует число n такое, что для всех $\bar{b}$, все элементы s, за исключением не более n, удовлетворяют $f(x, \bar{b})$, или все элементы s, за исключением не более n, удовлетворяют $\neg f(x, \bar{b})$; действительно, если бы мы имели k элементов, удовлетворяющих $f(x, \bar{b})$, и k элементов, удовлетворяющих $\neg f(x, \bar{b})$, то перенумеровав последовательность (что не меняет ее тип из-за тотальной неразличимости) заставили бы чередоваться $f(x, \bar{b})$, по крайней мере, $2k$ раз.

Итак, мы видим, что если s является тотально неразличимым и неделимым множеством, то его предельным типом над A является множество формул с параметрами из A, которые удовлетворяются всеми элементами s, за исключением конечного числа; и некоторые говорят о *среднем типе над* A вместо предельного типа s над A.

Лемма 12.19 *Если модель M содержит тотально неразличимое и неделимое множество s (или даже если M содержит только бесконечное подмножество s !), средний тип s над M определим.*

Доказательство. Пусть n натуральное число такое, что для всех $\bar{b}$ все элементы s, за исключением не более n, удовлетворяют $f(x, \bar{b})$, или все, за исключением не более n, удовлетворяют $\neg f(x, \bar{b})$. Тогда формула:

$$g(\bar{y}, a_0, \ldots, a_{2n}) = \bigvee\!\!\!\bigvee_{i_0 < \ldots i_n \leq 2n} f(a_{i_0}, \bar{y}) \wedge \cdots \wedge f(a_{i_n}, \bar{y})$$

является определением $df(\bar{y})$ для среднего типа s над M; действительно $f(x, \bar{b})$ истинна для всех a_i , за исключением не более n, как только она истинна для $n+1$ из $2n+1$ первых a_i .

□

12.e Неделимые последовательности Морли

Теорема 12.20 *Если последовательность Морли особого сына q типа p тотально неразличима и неделима, то p определим и q является его наследником.*

Доказательство. Пусть $p \in S_1(M)$ – такой тип, и q – особый сын p над моделью N, реализующей все типы с параметрами из M; реализуем q элементом a_0 в модели N_0, реализующей все типы над N, и повторяем так ω раз: a_{n+1} реализует в модели N_{n+1}, которая реализует все типы над N_n, единственное M-особое расширение q над N_n. Последовательность $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ является копией последовательности Морли типа q; модель N_ω , являющаяся пределом всех N_n , реализует все типы над $M \cup \{\bar{b}\}$, для каждого $\bar{b}$ из N; кроме того, единственный M-особый сын типа q над N_ω , очевидно, является предельным типом последовательности a_n над N_ω ; по лемме 12.19 этот тип определим, и заключение следует из 12.5.

□

Следствие 12.21 *Если T нестабильна, но без свойства независимости, то существует бесконечная последовательность элементов, которая неразличима, но не тотально неразличима.*

Доказательство. Если T нестабильна, существует неопределимый тип p (т.е. 1-тип); последовательность Морли особого сына p, которая неделима, не может быть тотально неразличимой.

□

Существуют нестабильные теории для которых каждая неразличимая последовательность элементов тотально неразличима (они имеют таким образом свойство независимости). Рассмотрим следующий пример, принадлежащий Шелаху : язык состоит из унарного символа X и бинарного символа $\in$; рассмотрим универсальную аксиому $\forall u \forall v(u \in v \to X(u) \wedge \neg X(v))$, и берем ее модельное пополнение T; оставляем читателю проверку того, что T существует и что она аксиоматизируется следующими аксиомами:

$$\forall u_1 \ldots \forall u_n \forall v_1 \ldots \forall v_n \exists y [\bigwedge\!\!\!\bigwedge (u_i \neq v_j) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge X(u_i) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge X(v_j) \to$$

$$\to \bigwedge\!\!\!\bigwedge (u_i \in y) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge (v_j \notin y)]$$

$$\forall u_1 \ldots \forall u_n \forall v_1 \ldots \forall v_n \exists x [\bigwedge\!\!\!\bigwedge (u_i \neq v_j) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \neg X(u_i) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge \neg X(v_j) \to$$

$$\to \bigwedge\!\!\!\bigwedge (x \in u_i) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge (x \notin v_j)]$$

Речь идет о ω-категоричной теории с элиминацией кванторов; мы видим, что над каждым множеством параметров A, неразличимая последовательность элементов тотально неразличима: если эти элементы удовлетворяют X, то единственное, что можно сказать про них, – это то, что они все различны между собой и что они все отличны от элементов A и что они все принадлежат одному тому же элементу A; если они удовлетворяют $\neg X$, то можно сказать только, что они различны между собой, отличны от элементов A и все содержат одни и те же элементы A.

Формула $x \in y$ в T имеет свойство независимости, и даже в очень сильном смысле, так как любое множество элементов, удовлетворяющих X, можно разбить этой формулой как угодно. Отметим следующую симметрию: из одной модели T получим другую если поменяем местами X и $\neg X$ и направление отношения $\in$.

Лемма 12.22 *Последовательность Морли стабильного типа тотально неразличима и неделима.*

Доказательство. Мы увидели в 12.15, что она тотально неразличима; если бы она была делима формулой $f(x, \bar{y})$, то для всех λ этот тип p был бы совместен с множеством $I_\lambda(f)$ (см. 12.d), и имели бы нестабильность во всех λ для сыновей p. Можно еще поступать таким образом: элементом a_0 модели M_0 реализуем p, затем элементом a_1 модели M_1 – наследника p над $M_0, \ldots$, реализуем элементом a_{n+1} элементарного расширения M_{n+1} модели M_n – наследника p над $M_n, \ldots$. Наследник q типа p над пределом M_ω моделей M_n является предельным типом последовательности $a_0, \ldots, a_n, \ldots$, являющейся реализацией последовательности Морли типа p . Предположим, что эта последовательность делима: таким образом, существует $\bar{b}$, в элементарном расширении N модели M_ω и формула $f(x, \bar{b})$, истинная конфинально на этой последовательности так же, как её отрицание. Следовательно, обе формулы $q \wedge f(x, \bar{b})$ и $q \wedge \neg f(x, \bar{b})$, конечно выполнимы в M; по 12.10, это означает, что q имеет по крайней мере двух конаследников над N, что противоречит его стабильности.

□

Лемма 12.23 *Если теория T стабильна, то каждая неразличимая бесконечная последовательность имеет тот же тип (над $\emptyset$), что последовательность Морли некоторого типа над моделью T.*

Доказательство. Пусть M – модель, содержащая неразличимую последовательность $s = (a_0, \ldots, a_n, \ldots$, которая неделима, поскольку T не имеет свойства независимости. Пусть p – предельный тип s над M; если N – элементарное расширение M, то предельный тип s над N является сыном p, конечно выполнимым в M; значит он является конаследником и также наследником.

Пусть тогда $b_0, \ldots, b_n, \ldots$ – последовательность Морли типа p над M; так как она последовательность Морли конаследника, то, как мы уже отметили, его тип конечно выполним в M; более точно, если формула $f(b_0, \ldots, b_n)$ истинна, то можно найти i_n такой, чтобы $f(b_0, \ldots, b_{n-1}, a_{i_n})$ была истинной, затем $i_{n-1} > i_n$ такой, чтобы $f(b_0, \ldots, b_{n-2}, a_{i_{n-1}}, a_{i_n})$ была истинной, и т.д. В конце концов, находим $i_n < i_{n-1} < \cdots < i_0$ такие, что $f(a_{i_0}, \ldots, a_{i_n})$ будет истинной; если формула f не содержит параметров из M, то так как последовательность s неразличима над $\emptyset$, это значит, что $f(a_n, \ldots, a_0)$ истинна. Таким образом, $(b_0, \ldots, b_n)$ имеет тот же тип, что $(a_n, \ldots, a_0)$; но так как последовательность b_n тотально неразличима, $(b_0, \ldots, b_n)$ имеет тот же тип, что $(b_n, \ldots, b_0)$, и, значит, последовательности b_n и a_n подобные неразличимые последовательности одного типа (отметим, что, в действительности, $(a_0, \ldots, a_n, \ldots, b_0, \ldots, b_n, \ldots)$ является неразличимым множеством).

□

Следствие 12.24 *Теория T стабильна если и только если каждая бесконечная неразличимая последовательность элементов из модели M теории T, тотально неразличима и неделима.*

Доказательство. По 12.21, если T нестабильна, то она имеет последовательность Морли, которая либо делима, либо не тотально неразличима; если T стабильна, то по двум предыдущим леммам, бесконечная неразличимая последовательность изоморфна некоторой последовательности Морли, следовательно она тотально неразличима и неделима.

Мы можем также достаточно легко доказать, что если бы располагали неразличимой, но не тотально неразличимой последовательностью, то для каждого кардинала λ построили бы множество A параметров мощности λ, порождающее по крайней мере столько типов, сколько сечений может иметь порядок мощности λ: тогда мы будем иметь нестабильность рассматриваемой теории во всех λ.

□

Теорема 12.25 (об однородной определимости) *Пусть T – стабильная теория, $f(x,\bar{y})$ – формула языка T и n – наименьшее натуральное число, такое, что для каждого неразличимого множества A и всех $\bar{b}$, либо все элементы A, за исключением не более n, удовлетворяют $f(x,\bar{b})$, либо все, за исключением не более n, удовлетворяют $\neg f(x,\bar{b})$. Пусть $g(\bar{y}, z_0, \ldots, z_{2n})$ обозначает формулу*

$$\bigvee\!\!\!\bigvee_{i_0<\cdots<i_n\le 2n} f(z_{i_0},\bar{y}) \wedge \cdots \wedge f(z_{i_n},\bar{y}) \ .$$

Тогда, для каждого типа p над моделью M теории T, содержащего формулу $h(x,\bar{b})$, определение $df(\bar{y})$, соответствующее типу p, может быть взято в виде $g(\bar{y},\bar{a})$ для некоторого $\bar{a}$ из M, все элементы которого удовлетворяют, кроме того, $h(x,b)$.

Доказательство. Реализуем тип p элементом a_0 элементарного расширения M_0 модели M, затем реализуем наследника p над M_0 элементом a_1 элементарного расширения M_1 модели M_0 и т.д. Пусть N – предел моделей M_n : наследник q типа p над N является предельным типом последовательности a_n , которая тотально неразличима и неделима, как мы знаем, $g(\bar{y}, a_0, \ldots, a_{2n})$ является определением q (см. 12.19). Следовательно,

$$(N, dq) \vdash \exists z_1 \ldots \exists z_{2n} \{h(z_1,\bar{b}) \wedge \cdots \wedge h(z_{2n},\bar{b}) \wedge \forall \bar{y}[df(\bar{y}) \leftrightarrow g(\bar{y},\bar{z})]\} \ ;$$

это верно так же и в модели (M, dp), для которой (N, dq) является элементарным расширением.

□

Предыдущая теорема в частности говорит, что в стабильной теории (на самом деле, легко видеть, что достаточно, чтобы тип p был стабильным), если $p \vdash h(x,\bar{b})$, то данное определение p использует в действительности только те параметры из M, что удовлетворяют этой формуле; в противоположность этому, если T является теорией плотного порядка без концевых точек, то тип a^+ не может определиться с параметрами, удовлетворяющими $x > a$.

Лемма 12.26 *Пусть p – тип над M и p_1, p_2 – два особых сына p, последовательности Морли которых имеют один и тот же тип над M и неделимы; тогда $p_1 = p_2$.*

Доказательство. Пусть N – достаточно насыщенное элементарное расширение M, над которым определены p_1 и p_2. Пусть $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ – последовательность Морли типа p_1 над N, а $b_0, \ldots, b_n, \ldots$ – типа p_2. Я построю третью последовательность $c_0, \ldots, c_n, \ldots$ над N, используя бесконечные определения p_1 и p_2 поочередно : c_{2n+1} реализует единственного M-особого сына p_1 над $N \cup \{c_0, \ldots, c_{2n}\}$, c_{2n+2} реализует единственного M-особого сына p_2 над $N \cup \{c_0, \ldots, c_{2n+1}\}$.

Я утверждаю, что эти три последовательности имеют один и тот же тип над M; чтобы это доказать, я рассуждаю индукцией по n. Итак, пусть $(c_0, \ldots, c_{2n})$, $(a_0, \ldots, a_{2n})$, $(b_0, \ldots, b_{2n})$ имеют один и тот же тип над M (для двух последних, это гипотеза леммы). Если $f(c_0, \ldots, c_{2n}, c_{2n+1})$ истинна, где f – формула с параметрами из M, то это значит, что тип кортежа $(c_0, \ldots, c_{2n})$ удовлетворяет бесконечному определению p_1 над M; так как $(a_0, \ldots, a_{2n})$ имеет тот же тип над M, что $(c_0, \ldots, c_{2n})$, то $f(a_0, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1})$ также истинна; таким образом, $(c_0, \ldots, c_{2n+1})$ имеет тот же тип над M, что $(a_0, \ldots, a_{2n+1})$, так же, как и $(b_0, \ldots, b_{2n+1})$, который по предположению имеет тот же тип над M, что $(a_0, \ldots, a_{2n+1})$; на четном этапе поступаем так же, но используя на этот раз бесконечное определение p_2 .

Следовательно, последовательность $c_0, \ldots, c_n, \ldots$ также неделима (неделимость является свойством типа последовательности над $\emptyset$) и, так как она реализует поочередно то p_1 , то p_2 , то должно быть $p_1 = p_2$.

□

Следствие 12.27 *Если T не имеет свойство независимости, то число M-особых типов над произвольным элементарным расширением M мажорировано $|S_\omega(M)|$.*

Доказательство. По лемме 12.26 M-особый тип определен типом над M своей последовательности Морли.

□

Теорема 12.28 *Если теория T имеет свойство независимости, то для каждого кардинала $\lambda \geq |T|$, существует тип p над моделью M теории T, $|M| = \lambda$, имеющий $2^{(2^\lambda)}$ конаследников; если T не имеет свойства независимости, то для каждого кардинала $\lambda \geq |T|$ число конаследников (и даже особых сыновей) типа p над моделью M мощности λ мажорировано 2^λ .*

Доказательство. Предположим, что T имеет свойство независимости, и реализуем I_λ: таким образом, имеем элементы a_α для $\alpha \in \lambda$ и $\bar{b}_w$ для $w \subset \lambda$, такие, что $f(a_\alpha, \bar{b}_w)$ истинна, если и только если $\alpha \in w$. По теореме Левенгейма-Сколема, существует модель M мощности λ, которая содержит все a_α; пусть N – элементарное расширение M, содержащее кроме того все $\bar{b}_w$ (мощность N равна по крайней мере 2^λ). Каждому ультрафильтру U над λ, мы сопоставим тип p_U над N, определенный таким образом : $p_U \vdash g(x, \bar{c})$, где $\bar{c} \in N$, если $\{\alpha : N \vdash g(a_\alpha, \bar{c})\} \in U$; каждый p_U , будучи конечно выполним в M, конаследует свое ограничение M.

И если $U \neq V$, то $p_U \neq p_V$, так как, если $w \in U$, $w \notin V$, то $p_U \vdash f(x, \bar{b}_w)$, $p_V \vdash \neg f(x, \bar{b}_w)$. Так как имеется $2^{(2^\lambda)}$ ультрафильтров над λ (см. 8.11), то получаем таким образом $2^{(2^\lambda)}$ типов, которые конаследуют своим ограничениям на M: число типов над M не больше 2^λ, и так как 2^λ имеет строго меньшую конфинальность чем $2^{(2^\lambda)}$ (см. 8.16), то обязательно $2^{(2^\lambda)}$ из этих p_U имеют одно и то же ограничение p над M.

Обратно, если T не имеет свойство независимости, то по 12.26 число особых сыновей p мажорировано $|S_\omega(M)|$. Над множеством мощности λ имеется не более 2^λ 1-типов; чтобы выбрать ω-тип, надо выбрать ω раз 1-тип, таким образом, $|S_\omega(M)| \leq (2^\lambda)^\omega = 2^{\lambda\times\omega} = 2^\lambda$.

□

Теорема 12.28 дает на практике очень эффективный критерий, для определения, имеет ли теория T свойство независимости или нет; действительно, опыт показывает, что для конкретных примеров легко определить конаследников. Оно сводится к вычислению мощности замыкания множества типов: если T имеет свойство независимости, можно найти $X \subset S_1(M)$, $|X| = \lambda$, у которого замыкание имеет мощность $2^{(2^\lambda)}$; в то же время, если она не имеет свойство независимости, то мощность замыкания такого X не может превысить 2^λ (это упражнение для читателя: докажите, что можно предполагать, что каждый тип из X реализован, и примените 12.27).

Это более эффективно, чем критерий Кейслера-Шелаха, состоящий в подсчете типов над множеством мощности λ, последний срабатывает лишь тогда, когда для некоторого λ, $ded(\lambda) \neq 2^\lambda$.

Читатель, посчитавший доказательство теоремы 12.18 слишком сложным, может попытаться применить для него наш критерий; к сожалению, он не помогает, так как не видно, как свести свойства конаследования n-типов к свойству конаследования каскада 1-типов. Автор теоремы 12.18 – Сахарон Шелах; несколько человек, прочитавшие его произведения, заметили с дрожью ужаса, что на самом деле Шелах доказывает не истинность теоремы 12.18, а только ее совместность! Естественно, если Вы искусны в теории множеств, то поймете тотчас же, что, в этом случае, это одно и то же: точно так же, как для истинности Π_1-предложения в арифметике достаточно показать его совместность с минимальной арифметикой A_0 (см. раздел 7.1), доказывать, благодаря построению моделей вынуждением, совместность такого предложения, как теорема 12.18, – это значит доказывать его истинность.Тем не менее это странный метод рассуждения, и читатель будет больше убежден "элементарным" характером доказательства, которое ему было здесь представлено; не исключено, что существует гораздо более простое доказательство.

Теорема 12.29 *Если теория T нестабильна, то существует модель M теории T и тип p из $S_1(M)$, имеющий по крайней мере двух конаследников.*

Доказательство. Если T имеет свойство независимости, то мы имеем сколько угодно конаследников; таким образом, предположим, что T не имеет это свойство, и рассмотрим последовательность элементов a_i , которая неразличима, но не тотально неразличима (например последовательность Морли особого сына не определимого типа), индексированную цепью I мощности $\lambda \geq |T|$, имеющей по крайней мере λ^+ сечений (см. теорему 8.10). Каждая подпоследовательность этой последовательности неделима. Пусть M – модель мощности λ теории T, содержащая все a_i ; если (A, B) – сечение I, где A и B не пустые, то обозначим через p^- предельный тип над M последовательности a_i , индексированной A, а через p^+ предельный тип над M последовательности a_j , индексированной B и упорядоченной в противоположном направлении, т.е. множество формул с параметрами из M, истинных на a_j для всех j, достаточно маленьких в B.

Если $p^- \neq p^+$, то существуют i в A, j в B, $\bar{c}$ в M, и формула $f(x, \bar{y})$, такие, что A образовано из индексов, меньших i, и индексов k, меньших j, таких, что $f(a_k, \bar{c})$ истинна; так как имеется только λ возможных выборов для i, j, $f(x, \bar{c})$, это возможно только для не более λ сечений. Значит, мы найдем такое среди них, что $p^- = p^+ = p$.

Пусть N – элементарное расширение M, в котором p реализуется элементом c: отметим, что последовательность, полученная добавлением c в сечение (A, B), остается неразличимой. Так как наша последовательность $s = (\ldots a_i \ldots)$ не тотально неразличима, то для некоторой формулы f, формула $f(x_1, \ldots, x_n, u, v, y_1, \ldots, y_m) \wedge \neg f(x_1, \ldots, x_n, v, u, y_1, \ldots, y_m)$ удовлетворяется каждым возрастающим кортежом элементов из s. Мы отметим, что A не имеет наибольшего элемента, а B наименьшего; они, значит, бесконечны, так как они не пустые, мы можем выбрать $a_1, \ldots, a_n$ с возрастающими индексами из A, и $b_1, \ldots, b_m$ с возрастающими индексами из B. Неполный тип $p \cup f(a_1, \ldots, a_n, x, c, b_1, \ldots, b_m) \wedge \neg f(a_1, \ldots, a_n, c, x, b_1, \ldots, b_m)$ конечно выполним в A, а неполный тип $p \cup f(a_1, \ldots, a_n, c, x, b_1, \ldots, b_m) \wedge \neg f(a_1, \ldots, a_n, x, c, b_1, \ldots, b_m)$ конечно выполним в B. По 12.10 каждый из этих двух типов дополняется до конаследника p над N, у которого их по крайней мере два.

□

Этот раздел может показаться неудобоваримым читателю-новичку в этом предмете, который захочет прочитать его лишь по диагонали. Для него очень существенно запомнить его следствия для стабильных теорий, которыми я здесь подвожу итог:

Четыре следующих условия эквивалентны, и все означают, что T стабильна:

1. Каждый 1-тип над произвольной моделью T определим т.е. имеет только единственного наследника (по определению стабильности).

2. Каждый 1-тип над произвольной моделью T имеет только единственного конаследника (12.6, 12.13, 12.29).

3. Каждый 1-тип над произвольной моделью T имеет только единственного особого сына (12.6, 12.13, 12.29).

4. Каждая бесконечная неразличимая последовательность, образованная из элементов модели T тотально неразличима и неделима (12.24).

Естественно, стабильность эквивалентна также факту, что n-типы над моделями, для какого-нибудь $n > 0$, имеют единственного наследника, единственного конаследника, единственного особого сына, и что бесконечные неразличимые последовательности n-ок тотально неразличимы и неделимы. Непосредственно по симметрии вытекает, что единственность конаследников n-ок для всех n

эквивалентна единственности наследников; но, что знаменательно, единственность конаследника для 1-типов достаточна для стабильности.

Мы заключаем этот раздел последним результатом, доказательство которого использует последовательности Морли.

Теорема 12.30 *Пусть T – стабильная теория, p и q – два типа над моделью M теории T, содержащие формулу $f(x, \bar{a})$ с параметрами из M, и A множество элементов M, удовлетворяющих этой формуле. Тогда если p и q имеют одно и то же ограничение на A, то они равны.*

Доказательство. Пусть $g(x, \bar{y})$ – формула, и пусть $d_1 g(\bar{y})$ и $d_2 g(\bar{y})$ – соответствующие определения p и q для g, которые по теореме 12.25 могут быть взяты с параметрами из A; гипотеза говорит, что эти два определения имеют один и тот же результат над A, то есть что:

$$M \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n \{f(y_1, \bar{a}) \wedge \ldots f(y_n, \bar{a}) \rightarrow [d_1 g(y_1, \ldots, y_n) \leftrightarrow d_2 g(y_1, \ldots, y_n)]\}$$

и эта аксиома остается истинной в каждом элементарном расширении M.

Построим последовательность Морли $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ типа p над M, затем последовательность Морли $b_0, \ldots, b_n, \ldots$ типа q над M и, наконец, смешанную последовательность $c_0, \ldots, c_n, \ldots$, используя на четных шагах определение p, и на нечетных шагах – определение q. Так как эти два определения с параметрами из A и дают одинаковые результаты на параметрах, удовлетворяющих $f(x, \bar{a})$, то доказываем способом, аналогичным доказательству 12.25, что эти три последовательности имеют один и тот же тип над A . Следовательно, так как последовательность $c_0, \ldots, c_n, \ldots$ должна быть неделимой, должно быть $p = q$.

□

Следствие 12.31 (о разделении параметров) *Пусть M – модель стабильной теории T, $f(x)$ – формула без параметра и $g(x, \bar{b})$ – формула с параметрами из M; тогда существует формула $h(x, \bar{a})$, эквивалентная $f(x) \wedge g(x, \bar{b})$ и у которой все параметры удовлетворяют $f(x)$.*

Доказательство. По предыдущей теореме то, что тип p из $S_1(M)$ удовлетворяет $f(x) \wedge g(x, \bar{b})$ зависит только от ограничения p на множество A элементов M, удовлетворяющих $f(x)$; заключение следует из леммы 12.4.

□

Если в следствии 12.31 формула $f(x)$ имеет параметры $\bar{c}$, то можно еще применить это следствие к теории $T(\bar{c})$, которая также стабильна; теорема также остается в силе, если f имеет несколько свободных переменных, вместо одной.

Как пример приложения, мы отметим, что теория дифференциально замкнутых полей характеристики нуль (см. раздел 6.b) стабильна в каждой мощности λ; действительно, типов имеется не больше, чем возможных минимальных многочленов. Берем за $f(x)$ формулу $x' = 0$; если C является полем констант дифференциально замкнутого поля K, то все, что мы можем определить в C с параметрами из K, может быть определено с параметрами из

C; в C определяется только то, что мы могли определить в теории обычных алгебраически замкнутых полей с параметрами из C.

Имеются теории без свойства независимости, которые не удовлетворяют этой теореме разделения параметров. Рассмотрим теорию цепей и добавим к языку символ унарного отношения $R(x)$; чтобы говорить более образно, элементы, которые удовлетворяют R, назовем белыми, а элементы, удовлетворяющие $\neg R$, – черными. Пусть T – модельное пополнение этой теории: читатель легко поймет, что оно существует, и , что это теория окрашенных цепей, плотных, без концевых точек, такая, что между любыми двумя различными точками имеется всегда белая и черная точки. Мы уже встретили эту теорию в конце 10.a. Как всякая теория окрашенной цепи, T не имеет свойство независимости, как мы увидим в следующем параграфе.

Если b – белая точка модели M теории T, множество черных точек, меньших b, не может определиться только с черными параметрами; и черные типы b^- и b^+, которые различны, имеют одно и то же ограничение на черные точки модели M; они не могут определяться только с черными параметрами.

12.f Один пример : теории порядков

В качестве иллюстрации теоремы 12.28, мы покажем, что цепь не имеет никогда свойство независимости. Отметим, что теория бесконечной цепи нестабильна: действительно, так как элементы неразличимой последовательности должны быть упорядочены (порядком, который может быть только порядком ее индексов, или ему противоположным), она не может быть тотально неразличимой.

Для этого нам нужна теорема, которая содержит сущность теории моделей для цепей. Для данной последовательности $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ формул со свободной переменной x языка цепей и двух точек $a < b$ цепи C, мы говорим, что эта последовательность формул реализуется между a и b, если можно найти $c_1, \ldots, c_n$ в C, c_1 удовлетворяющий $f_1(x), \ldots,$ c_n удовлетворяющий $f_n(x)$, и такие, что $a < c_1 < \cdots < c_n < b$.

Теорема 12.32 (Рубин) *Чтобы две возрастающие n-ки $a_1 < \cdots < a_n$ из цепи C и $b_1 < \cdots < b_n$ из цепи D имели один и тот же тип, необходимо и достаточно чтобы они удовлетворяли следующим условиям:*

- *для каждого $i \leq n$, a_i и b_i удовлетворяют одним и тем же формулам ,*
- *для каждого $i < n$, одни и те же конечные последовательности формул реализуются между a_i и a_{i+1} и между b_i и b_{i+1}.*

Доказательство. Условие, очевидно, необходимо (оно влечет, что цепи C и D элементарно эквивалентны). Для обратного утверждения предположим, что цепи C и D ω-насыщены, и попытаемся установить бесконечный челнок между двумя кортежами. Я довольствуюсь случаем добавления α из C.

Если α меньше чем a_1 , то мы рассмотрим формулы $f_1(x),\ldots,f_k(x)$, удовлетворяющиеся α, последовательности формул $s_1,\ldots,s_k$, реализованные между α и a_1 , и последовательности формул $t_1,\ldots,t_k$, опущенные между α и a_1 . Некоторая формула типа a_1 говорит, что существует y меньше a_1 , удовлетворяющий все f_i , такой, что s_i реализуются между y и a_1 , а t_i опускается между y и a_1 ; по предположению, b_1 удовлетворяет той же формуле, и по компактности и ω-насыщенности существует β в D такого же типа, что α, $\beta < b_1$, такой, что одни и те же последовательности формул реализуются между α и a_1 и между β и b_1 . Поступаем точно так же, если α выше a_n , и остается обсудить случай когда α находится между двумя последовательными a_i , например между a_1 и a_2 .

Удовлетворять конечное число формул значит удовлетворять их конъюнкцию; а реализовать конечное число конечных последовательностей формул значит реализовать единственную, полученную их смешением. Следовательно, конечный фрагмент позиции, предложенного α между a_1 и a_2, которую мы хотим воспроизвести справа, представляется таким образом:

- формула $f(x)$, удовлетворяется α,

- последовательность s формул, реализованная между a_1 и α, и последовательность t формул, реализованная между α и a_2 ; s и t могут быть пустыми последовательностями,

- конечное множество, возможно пустое, $u_1,\ldots,u_n$, последовательностей, опущенных между a_1 и α, и конечное множество, возможно пустое, $v_1,\ldots,v_m$, последовательностей, опущенных между α и a_2 .

Кроме того, мы можем предполагать, что каждая собственная подпоследовательность любой из u_i реализуется между a_1 и α и даже присутствует в s: иначе, мы бы заменили u_i на более короткую последовательность. Так же допустим, что каждая подпоследовательность из v_j фигурирует в t.

Наконец, предположим сверх всего, что каждый $u_i{}^\frown f^\frown t$ реализуется между a_1 и a_2; если бы это было не так, то по предположению мы имели бы то же самое между b_1 и b_2 и никакая реализация $f^\frown t$ между b_1 и b_2 не могла бы иметь u_i слева : и можно удалить из списка u_i, выражающую лишь бесполезное условие. Так же мы считаем, что каждый кортеж $s^\frown f^\frown v_j$ реализуется между a_1 и a_2.

Допустим сначала, что не существует ни u_i ни v_j; тогда реализуем последовательность $s^\frown f^\frown t$ между b_1 и b_2, и реализация β, соответствующая f, удовлетворяет требуемым условиям.

Затем предположим, что существуют u_i , но нет v_j ; пусть A – сегмент порядка C, образованный из $y > a_1$, таких, что ни $u_1,\ldots$, ни u_n не реализуются между a_1 и y; существует таким образом некоторая реализация $\bar{c}^\frown\alpha$ из A цепочки $s^\frown f$; A определяется только с параметром a_1 ; пусть, с противоположной стороны, сегмент A' получен тем же способом, что A, беря на этот раз b_1 в качестве параметра. Так как a_1 и b_1 имеют одинаковый тип, существует реализация $\bar{c}'^\frown\beta$ из A' цепочки $s^\frown f$; и так как последовательность $u_1{}^\frown f^\frown t$ реализуется между b_1 и b_2 , существует реализация t, которая расположена правее всего A' (A', таким образом, мажорирована b_2 !); следовательно, элемент β отвечает нашему желанию. Рассматриваем симметричным способом случай, когда имеются v_j , но не u_i .

Пусть, наконец, существуют u и v, и определяем A и A' как и раньше, а также B и B' симметричным способом: B – множество тех $y < a_2$, таких, что ни $v_1, \ldots$, ни v_m не реализуются между y и a_2 , а B' – множество тех $y < b_2$, таких, что ни $v_1, \ldots$, ни v_m не реализуются между y и b_2 ; на самом деле для некоторой v, которую можно считать первой, B – множество тех $y < a_2$ таких, что $v = v_1$ опускается между y и a_2 , и мы имеем то же самое для B', так как a_2 и b_2 имеют одинаковый тип. Обозначим через E пересечение A и B, и через E' – пересечение A' и B'.

Так как имеется реализация $u_1{}^\frown f{}^\frown t$ между b_1 и b_2, найдется реализация последовательности t, которая строго мажорирует A'; точно также, так как $s{}^\frown f{}^\frown v_1$ реализована, найдется реализация s, которая строго минорирует B' ; таким образом, нам достаточно доказать существование элемента β из E', удовлетворяющего f.

По той же причине существует реализация t между a_1 и a_2, расположенная правее всего A.

Сегмент $A \setminus B$ не пустой, так как $f{}^\frown v_1$ реализован между a_1 и a_2 ; элемент $A \setminus B$ имеет реализацию v_1 справа от себя, и необходимо, чтобы первая компонента этой реализации принадлежала A; если, таким образом, g обозначает первую формулу v_1 , то этот элемент имеет в A реализацию g справа от себя. Обратно, если элемент из A мажорирован некоторой реализацией g в A, то существует между этим элементом и a_2 реализация v_1 : действительно, имеется реализация t между A и a_2 , и t содержит последовательность w, полученную удалением первой компоненты v_1 . Следовательно, E определим только с параметром a_1 : E является множеством тех y из A, не мажорированных строго никаким элементом A, удовлетворяющим g; пусть E'' – соответствующее множество, определимое над b_1 .

Так как существует некоторая реализация последовательности t между A' и b_2 , содержащей w, то ясно, что элемент из $A' \setminus E''$ не принадлежит B' : E' содержится в E''. Если бы это включение было собственным, мы бы нашли реализацию v_1 , целиком включенную между A' и b_2 ; следовательно, для некоторой u_i , $u_i{}^\frown v_1$ реализовался бы между b_1 и b_2 , значит также между a_1 и a_2 , что абсурдно, так как все элементы, включенные между a_1 и a_2 , и, в частности, α, будет иметь либо u_i слева от себя, либо v_1 справа от себя.

Следовательно, $E'' = E'$; и так как существует элемент α из E, удовлетворяющий $f(x)$, a_1 и b_1 имеют одинаковый тип, так как E'' определяется над b_1 , а E над a_1 , то существует также β в E'', удовлетворяющий $f(x)$.

Остальное является следствием ω-насыщенности.

□

Теорема Рубина дает простое описание типов p над моделью M теории порядка T (язык T состоит только из символа порядка). Если мы исключим тривиальный случай, когда p – реализованный, т.е. $p \vdash x = a$ для некоторого a из M и p определен заданием этого a, то p делит модель M на два класса $A = \{a : a \in M \text{ и } , p \vdash x > a\}$ и $B = \{b : b \in M \text{ и } p \vdash x < b\}$: это разбиение

(A, B) модели M будет называться *сечением*, определенным p. Так как p тип над моделью, он должен быть конечно выполним в этой модели; если каждый конечный фрагмент p удовлетворяется элементом A, то мы говорим, что p *выполним слева*; если каждый конечный фрагмент p выполняется элементом B, то мы говорим что он *выполним справа.* Вообще, тип выполним с двух сторон, это не происходит только если его сечение определимо, то есть если существует формула с параметрами из M такая, что A состоит из элементов M, которые ей удовлетворяют: в этом случае, в зависимости от того, чему p удовлетворяет определению A или определению его дополнения B, он будет выполним слева или справа.

Одно следствие теоремы Рубина состоит в том, что не реализованный тип p из $S_1(M)$, полностью определен заданием своего *абсолютного типа* (т.е. ограничения p на пустое множество параметров), *своего сечения* и *своей стороны выполнимости* в случае когда его сечение определимо. Действительно, для данных a из M и последовательности s формул, достаточно понять, что эти условия достаточны для определения реализуется ли s между a и x, или нет ; если, например, p выполним слева, то это будет так, если s реализуется между a и b для всех b, достаточно больших в A.

Из этого получаем как первое следствие, что для определимости типа достаточно (и, конечно, необходимо!), чтобы его сечение было определимым. Действительно, предположим, что сечение p из $S_1(M)$ определимо, и пусть q – наследник p над очень насыщенным элементарным расширением N модели M; так как q – сын p, его ограничение на $\emptyset$ совпадает с ограничением p; сечение q известно, так как это сечение (A', B') над N, имеющее то же определение, что сечение (A, B) типа p над M; и так же известна его сторона выполнимости, так как если, например, p выполним в A, то он удовлетворяет отрицанию формулы, определяющей B, и его сын q может выполнятся только в A'.

Далее мы видим, что определимый тип p имеет только единственного конаследника; действительно, если мы предположим что p определим и выполним слева, то мы не имеем выбора ни для сечений его конаследника q над N, ни для его сторон выполнимости: так как q должен быть конечно выполним в M , он должен быть в A, и его сечение может быть только самым крайним слева – тем, что ниже всех реализаций в N сечения (A, B). Мы видим, что этот единственный конаследник p отличен от его единственного наследника, который выше всех реализаций p в N.

Неопределимый тип имеет точно двух конаследников, конаследника слева, конечно выполнимого в A, сечение которого ниже всех реализаций (A, B) в N, и конаследника справа, конечно выполнимого в B, сечение которого, напротив, крайне правое возможное, выше их всех. Следовательно, *теория порядка не может иметь свойство независимости*, так как 1-тип может иметь самое большее только двух конаследников

Мы видим даже, что наследник и конаследник определимого типа и два конаследника неопределимого типа являются единственными случаями особых сыновей: для каждого другого сына q типа p над N, можно найти две реализации a и b типа p такие, что $q \vdash a < x < b$; действительно, можно найти a' и b' в N, удовлетворяющих формуле, определяющей подходящий класс сечения

p, если он определим, и таких, что $q \vdash a' < x < b'$, и N, будучи достаточно насыщенной, содержит реализацию a особого сына слева p над $M \cup \{a'\}$, и реализацию b особого сына справа p над $M \cup \{b'\}$.

Из теоремы Рубина очень легко вывести следующее: для того, чтобы тип $(a_1, \ldots, a_n)$ над N был конаследником, или особым сыном, своего ограничения на M , достаточно (и необходимо!), чтобы он был таковым для типов каждого из a_i ; тогда мы видим, что тип n-ки не может никогда иметь больше 2^n особых сыновей, причем особым сыновьям соответствуют смеси наследников и конаследников 1-типов. Мы видим также, что любой нереализованный сын неопределимого 1-типа является наследником.

Таким образом, мы видим, что особенно простое описание наследников, конаследников и особых сыновей, полученное в случае теории T плотных порядков без концевых точек, основывается на свойствах, общих для всех порядков. И теорема Рубина так же, как все ее следствия, обобщается непосредственным образом для *окрашенных цепей*, то есть для структур, образованных из порядка и некоторого числа, конечного или бесконечного, унарных отношений.

Разобравшись с цепями, мы собираемся теперь определить конаследников для богатых ультраметрических пространств, которые тесно связаны с цепями. Итак, рассмотрим теорию T' цепи, имеющей наименьший элемент, обозначенный 0, и теорию T соответствующих богатых нормированных пространств $M = (I, E)$, где I – модель T. Типы, соответствующие расстояниям ничего нового не привносят: по теореме 6.24 для определения их наследников, конаследников, особых сыновей достаточен язык теории T'; Поэтому в дальнейшем рассматриваем только типы "точек", т.е. элементов E.

Итак, пусть p – такой тип над моделью $M = (I, E)$ теории T, и q – конаследник p над достаточно насыщенным расширением $N = (J, F)$ модели M. Пусть тогда $I(p)$ – множество элементов i из I, для которых $p \vdash d(x, a) = i$ для некоторого a из E; $I(p)$ является концевым сегментом I (возможно пустым), так как если $i \in I(p)$, $i < j$, то так как пространство богато существует b из E, такой, что $d(a, b) = j$, и $p \vdash d(x, b) = j$ по ультраметрическому неравенству. $J(q)$ должен быть концевым сегментом J, порожденным $I(p)$; действительно, если $q \vdash d(x, b) = j$, $b \in F$, $j \in J$, то существует a в M, то есть в E, такой, что $d(a, b) = j$, и по ультраметрическому неравенству $j \geq d(x, a) \in I(p)$.

Отметив это, с помощью классификации типов, которую мы проделали в разделе 6.с, и легкого анализа, детали которого, как обычно, оставляем читателю, приходим к следующему описанию конаследников:

– *реализованный* p; его единственный сын является единственным конаследником.

– *дистанционный* p; таким образом, существует a в M, такой, что $d(x, a)$ не в I; мы знаем, что p тогда определен этим a и типом $d(x, a)$ над I, верхний класс сечения которого будет $I(p)$. Тогда q является конаследником p, если и только если он дистанционный тип, связанный с тем же a, что и p, и такой, что тип $d(x, a)$ над J конаследует своему ограничению на I.

– *полигональный* p; это означает, что он не дистанционный и $I(p)$ имеет наименьший элемент i; если $p \vdash d(x, a) = i$, то это условие определяет p

полностью среди полигональных типов, у которых наименьший элемент из $I(p)$ равен i. Тогда p имеет только единственного конаследника, являющегося впрочем также его единственным наследником, который является полигональным типом над N, связанным с тем же a и с тем же i.

– *псевдо-предельный* p; т.е. тип p не дистанционный и $I(p)$ не имеет наименьшего элемента; если выбрать для каждого i из $I(p)$ такой a_i , что $p \vdash d(x, a_i) = i$, то эти условия определяют p как псевдо-предел не псевдо-сходящейся псевдо-последовательности Коши a_i. Если расширение N' модели M не содержит псевдо-предела этой последовательности, то p имеет единственного сына над N'. Но так как мы взяли модель N достаточно насыщенной, N содержит такой предел, и мы зафиксируем один из них, пусть b. Тогда видно, что q – конаследник p, если и только если это дистанционный тип, связанный с b, такой, что тип $d(x, b)$ над J имеет $J(q)$ как верхний класс и *конечно выполним в* $I(p)$. Таким образом, ясно, что сечение типа $d(x, b)$ над J однозначно определено, так же как и его сторона выполнимости, но *его тип над* $\emptyset$ *определен неоднозначно* (за исключением, естественно, случая когда для каждой формулы $f(x)$ без параметра, либо все достаточно маленькие элементы $I(p)$ удовлетворяют $f(x)$, или все удовлетворяют $\neg f$). Потому что $d(x, b)$ определяется параметром b в большой модели N (b – любой из пределов последовательности a_i) и что ничто его не связывает с типом p.

Таким образом, *теория нормированных богатых пространств не обладает свойством независимости.* Действительно, реализованный или полигональный тип имеет только единственного конаследника, дистанционный тип – одного или двух, а псевдо-предельный тип – не более 2^ω, не более чем чистых типов расстояния. Те же результаты верны также для n-богатых пространств, за исключением того, что они не имеют полигональных типов (над моделями).

В этих примерах нестабильных теорий T без свойства независимости, число конаследников типа p из $S_1(M)$ ограничено независимо от мощности λ модели M. Для того, чтобы получить теорию без свойства независимости, где это не так, мы обогатим структуру I, добавляя его порядку новые символы отношений, так, чтобы иметь теорию T' без свойства независимости, но которая позволяет определить более 2^ω типов в данном сечении, с выделенной стороной выполнимости; параллельный анализ остается действительным для теории T таких I-значных богатых пространств, которая не будет иметь свойство независимости, так как в псевдо-предельном случае, тип $d(x, b)$ над J конаследует своему ограничению на I.

Например,рассмотрим модельное-пополнение теории двух порядков $\leq_1$ и $\leq_2$, определенных на одном и том же множестве: его детальное описание – упражнение для читателя. Эта теория T' имеет элиминацию кванторов, и нереализованный тип над её моделью I определен заданием его сечений (A_1, B_1) относительно $\leq_1$ и (A_2, B_2) относительно $\leq_2$, каждое из этих двух сечений могут быть выбраны независимо от другого. T' не имеет свойства независимости, так как тип имеет не более четырех конаследников; кстати, каждый нереализованный тип имеет точно четырех особых сыновей. Для теории T', мы возьмем $\leq_1$ в качестве порядка расстояний, а $\leq_2$ как дополнительную структуру. Тогда мы видим, что над моделью M мощности λ, псевдо-предельный тип из $S_1(M)$ может иметь до $ded(\lambda)$ конаследников.

12.g Особые последовательности

В этом параграфе предполагаем, что T не имеет свойства независимости. Мы знаем, что тогда M-особый тип определен типом над M своей последовательности Морли. Нам надо ответить на следующие вопросы: при каком условии неразличимая последовательность над M будет последовательностью Морли особого типа? И как найти этот тип, то есть его бесконечное определение, зная его последовательность Морли?

Бесконечная последовательность, неразличимая над M (или скорее, *тип* последовательности над M), будет называться *M-особой*, если она имеет следующее свойство: для произвольных различных копий $\ldots, s_i, \ldots$ ее реализаций, можно найти элемент a, такой, что каждая из последовательностей $s_i{}^\frown a$ остается неразличимой над M, где $s_i{}^\frown a$ обозначает последовательность, полученную добавлением a в конец s_i .

По компактности это еще означает, что если мы имеем конечное число $s'_1, \ldots, s'_n$ реализаций конечных фрагментов s, то можем найти a, такой, что каждая из продолженных последовательностей $s'_1{}^\frown a, \ldots, s'_n{}^\frown a$, остается неразличимой над M: таким образом, мы видим, что это свойство быть M-особым зависит только от множества Эренфойхта s над M (т.е. формул с параметрами из M, удовлетворяющихся возрастающими кортежами последовательности). Так как последовательности $s_i{}^\frown a$ все подобны s, можно найти a_1 , затем a_2 , ... ,a_n, ... , такие, что последовательность $a, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ продолжает неразличимым образом каждый из s_i .

Теорема 12.33 *Если T не имеет свойство независимости, то ω-последовательность, неразличимая над M, является последовательностью Морли M-особого типа, если и только если она M-особая.*

Доказательство. Последовательность Морли особого типа p особа : достаточно реализовать элементом a тип, полученный бесконечным определением p над множеством, содержащим M и объединения s_i. Обратно, рассмотрим особую последовательность s над M. Пусть N является $|M|^+$-насыщенным элементарным расширением M и a – элемент, такой, что для каждой копии s' последовательности s в N, $s'{}^\frown a$ неразличима над M. Я утверждаю, что тип p элемента a над N будет M-особым.

Действительно, пусть $f(x, \bar{b})$ – формула с параметрами из N, и s_1 – копия s в N такая, что на ней $f(x, \bar{b})$ чередуется максимально : так как она не может чередоваться на $s_1{}^\frown a$ еще раз, $p \vdash f(x, \bar{b})$ тогда и только тогда, когда все элементы s_1 , начиная с некоторого номера, удовлетворяют $f(x, \bar{b})$: действительно, все типы копий s над $M \cup \{\bar{b}\}$ реализованы в N; и это "концевое" значение истинности, которое принимает $f(x, \bar{b})$ на копии s, где она чередуется максимально (которое всегда одно и то же, так как p совместен!) зависит только от типа $\bar{b}$ над M.

Докажем теперь, что s последовательность Морли типа p; вложим $N \cup \{a\}$ в $|M|^+$-насыщенную модель N_1 и рассмотрим точку a_1, продолжающую до M-неразличимой последовательности все копии s в N_1, затем повторяем так ω раз: последовательность $a, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ является последовательностью Морли p над N; так как она продолжает каждую копию s в N, эта последовательность подобна s над M и имеет тот же тип над M, что s.

□

Мы запомним этот метод, позволяющий найти бесконечное определение p исходя из s; для данной формулы $f(x, \bar{b})$, помещаем s по отношению к $\bar{b}$ так, чтобы она чередовалась максимально, и берем концевое значение истинности.

Возвращаемся нашему каноническому примеру, где T – теория плотных линейных порядков без концевых точек. Последовательность Морли наследника типа a^+ является убывающей последовательностью $a_0 > a_1 > \dots > a_n > \dots$ элементов из сечения a^+; пусть c – элемент из сечения a^+ в элементарном расширении M; если c ниже всех или выше всех элементов некоторой копии этой последовательности, то формула $x < c$ не чередуется на ней ; чтобы она чередовалась максимально, надо поместить c между a_n и a_{n+1} для некоторого n, и в этот случае концевое значение истинности дает именно $x < c$ для наследника типа a^+.

Чтобы получить единственного M-особого сына p над A как предела последовательности Морли p, необходимо хорошо расположить эту последовательность относительно A. Но стабильные типы обладают, кроме всего прочего, очень замечательным свойством: независимо от расположения последовательности Морли s типа p относительно A, средний тип s над A является всегда наследником p!

Теорема 12.34 *Пусть p из $S_1(M)$ – стабильный тип, A – множество параметров, содержащее M, и s – реализация последовательности Морли p над M; тогда средний тип s над A является наследником p. Мы видим, в частности, что две копии s_1 и s_2 последовательности Морли p дают всегда один и тот же средний тип над A, независимо от их типа над A.*

Доказательство. Начинаем со вспомогательной конструкции: реализуем p элементом a_2 расширения M'_0 модели M, затем реализуем элементом a'_1 модели M'_1 наследника p над M'_0 и повторяем ω раз; последовательность $a'_0, \dots, a'_n, \dots$, имеет тот же тип над M, что данная последовательность Морли $a_0, \dots, a_n, \dots$ типа p, поэтому для этой последовательности также существуют модели M_n, $M \prec M_0 \prec M_1 \prec \dots \prec M_n \prec \dots$ такие, что a_n в M_n и реализует наследника p над M_{n-1} . Пусть M_ω – предел моделей M_n , и N – модель, содержащая M_ω и A. Наследник q типа p над M_ω – средний тип последовательности $a_0, \dots, a_n, \dots$; следовательно, средний тип этой последовательности над N, который является конаследником q, является также наследником p и своего ограничения на A.

□

Замечание. Не выводите ошибочно из 12.23 и 12.33, что если T стабильна, и s_1 , s_2 являются двумя бесконечными неразличимыми последовательностями которые имеют один и тот же тип над $\emptyset$, то они имеют один и тот же средний тип над каждым множеством A параметров; для этого еще надо, чтобы существовала такая модель M, что s_1 и s_2 имели один и тот же тип над M, что означает, как мы увидим в главе 16, что s_1 и s_2 имели один и тот же сильный тип над $\emptyset$; и этого вполне достаточно (см. 16.c).

Следствие 12.35 *Если теория T стабильна и M является $|T|^+$-насыщенной моделью T, то каждый тип p из $S_1(M)$ является средним типом (тотально) неразличимой ω-последовательности элементов из M.*

Доказательство. Если $p \in S_1(M)$, то существует элементарное ограничение N модели M, $|N| = |T|$, такое, что p наследует свое ограничение q над N (теорема 11.6); по насыщенности M содержит копию $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ последовательности Морли типа q, для которой p – предельный тип.

□

12.h Нестабильность и порядок

Рассмотрим теперь несколько комбинаторных свойств формул, эквивалентных стабильности, или вернее нестабильности. Пусть в формуле $f(\bar{x}, \bar{y})$ кортежи переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$ имеют одинаковую длину n. Если A – множество n-ок a_i из модели M теории T, индексированных цепью I, то говорят что формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ *упорядочивает* множество A если $M \vdash f(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$ когда $i \leq j$, и $M \vdash \neg f(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$ когда $i > j$. Если f упорядочивает бесконечное множество, или даже произвольно большие конечные множества, то по компактности мы видим, что она упорядочивает множества, индексированные любой цепью I.

Лемма 12.36 *Если формула f упорядочивает бесконечное множество n-ок, то она упорядочивает бесконечную неразличимую последовательность n-ок.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$ упорядочены формулой f, и U – неглавный ультрафильтр подмножеств ω. Выберем некоторую реализацию $\bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_n, \ldots$ последовательности Морли конаследника, соответствующего этому ультрафильтру (см. теорему 12.17). Она неразличима, и если $g(\bar{b}_n, \bar{b}_m)$ выполняется для $n < m$, то существуют n' и m', $n' > m'$, такие, что формула $g(\bar{a}_{n'}, \bar{a}_{m'})$ истинна. Следовательно, формула f упорядочивает противоположно эту неразличимую бесконечную последовательность.

□

Теорема 12.37 *Теория T нестабильна если и только, если для некоторого n , существует формула (без параметра), упорядочивающая бесконечное множество n-ок.*

Доказательство. Неразличимая последовательность, упорядоченная формулой f не может быть тотально неразличимой; если таким образом f упорядочивает бесконечное множество, то T нестабильна (можно также заметить, что с формулой, упорядочивающей бесконечное множество, для каждого кардинала λ можно построить множество параметров мощности λ, над которым существует по крайней мере $ded(\lambda)$ типов, что дает нестабильность в каждой мощности).

Обратно предположим, что T нестабильна, и сначала, что она имеет свойство независимости; реализуем I_ω ; таким образом, мы имеем $(\dots a_n \dots)$ и $(\dots \bar{b}_w \dots)$, из которых мы сохраняем только $\bar{b}_m$, соответствующий множеству $m = \{0, \dots, m-1\}$. Итак, $f(a_n, \bar{b}_m)$ истинна, если и только если $n < m$. Последнее означает, что формула $g(x_1, \bar{x}_2; y_1, \bar{y}_2) = f(x_1, \bar{y}_2)$ упорядочивает множество кортежей $a_n{}^\frown\bar{b}_{n+1}$.

Если теория T нестабильна без свойства независимости, то существует последовательность $a_0, \dots, a_n, \dots$, которая неразличима, но не тотально; Следовательно, существует формула f, такая, что возрастающие кортежи этой последовательности удовлетворяют условию

$$f(x_0, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \wedge \neg f(x_0, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n).$$

Продолжим эту последовательность за ω и положим

$$g(x, y, \bar{a}) = (x = y) \vee f(a_0, \dots, a_{i-1}, x, y, a_\omega, \dots, a_{\omega+n-i-2}).$$

Эта формула с кортежом параметров $\bar{a}$ упорядочивает бесконечное множество $a_i, \dots, a_{i+m}, \dots$. Значит, формула $h(x_1, \bar{x}_2; y_1, \bar{y}_2) = g(x_1, y_1, \bar{y}_2)$ упорядочивает множество $a_{i+m}{}^\frown\bar{a}$.

□

Отметим, что в этой теореме мы не можем брать $n = 1$; в примере нестабильной теории, данной после следствия 12.21, никакое бесконечное множество элементов не упорядочено формулой, ни даже формулой с параметрами.

Когда формула упорядочивает бесконечное множество A, это множество вполне может быть неопределимым; и мы не можем сказать абсолютно ничего про то, что делает эта формула вне множества A. Нет никакого основания, чтобы эта формула определила порядок на всех n-ках модели M, ничто не мешает тому, чтобы она имела циклы.

Говорят, что формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ *определяет частичный предпорядок*, или еще *частично (пред)упорядочивает* (n-ки) модели T, если она определяет предпорядок на M^n:

$$T \vdash \forall\bar{x} f(\bar{x}, \bar{x}) \wedge \forall\bar{x}\forall\bar{y}\forall\bar{z}[f(\bar{x}, \bar{y}) \wedge f(\bar{y}, \bar{z}) \to f(\bar{x}, \bar{z})] \; .$$

Если перейти к фактор-множеству по отношению эквивалентности $f(\bar{x}, \bar{y}) \wedge f(\bar{y}, \bar{x})$ получают частичный порядок, определенный на модели целиком. Если для некоторой модели этот порядок имеет бесконечную цепь, или, что то же самое, если для каждой модели он имеет произвольно длинные конечные цепи, ясно, что формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ упорядочивает бесконечное множество; но это свойство – гораздо более сильное.

Если формула f предупорядочивает с бесконечными цепями только подмножество A, *определимое формулой* (без параметра), то можно найти формулу, определяющую предпорядок на модели целиком, изменяя f так, чтобы элемент вне A был несравним со всеми, за исключением самого себя.

Теорема 12.38 *Если теория T нестабильна, без свойства независимости, то для некоторого n существует формула $f(\bar{x}, \bar{y})$, предупорядочивающая n-ки моделей T, с бесконечными цепями.*

Доказательство. Мы получили в 12.37 бесконечную неразличимую последовательность $s = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$, упорядоченную формулой $f(x, y, \bar{a})$, использующей параметры из продолжения неразличимой последовательности s; следовательно, s остается неразличимой над $\bar{a}$. Так как эта последовательность неделима, для некоторого n следующее предложение, в котором для большей ясности опускается параметр $\bar{a}$, истинно:

$$\neg\exists x\{f(x, a_0) \wedge \neg f(x, a_1) \wedge \cdots \wedge f(x, a_{2i}) \wedge \neg f(x, a_{2i+1}) \wedge \ldots$$

$$\cdots \wedge f(x, a_{2n}) \wedge \neg f(x, a_{2n+1}).$$

Напротив:

$$\exists x[f(x, a_0) \wedge \cdots \wedge f(x, a_n) \wedge \neg f(x, a_{n+1}) \wedge \cdots \wedge \neg f(x, a_{2n+1})] \ ;$$

действительно, это истинно при $x = a_{n+1}$ для кортежа $a_0 \ldots a_n a_{n+2} \ldots a_{2n+2}$, имеющего тот же тип над $\bar{a}$, что и $a_0 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{2n+1}$.

Так как каждая перестановка $2n+2$ элементов порождена транспозициями последовательных элементов, то можно найти последовательность $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{2n+1}$ символов, равных либо $\neg$, либо пустому символу, включающей $n+1$ символов отрицания, и индекс i, такие, что:

$$\exists x[\varepsilon_0 f(x, a_0) \wedge \cdots \wedge \varepsilon_i f(x, a_i) \wedge \varepsilon_{i+1} f(x, a_{i+1}) \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{2n+1} f(x, a_{2n+1})] \ ,$$

$$\neg\exists x[\varepsilon_0 f(x, a_0) \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{i+1} f(x, a_i) \wedge \varepsilon_i f(x, a_{i+1}) \wedge \cdots \wedge \varepsilon_{2n+1} f(x, a_{2n+1})] \ ,$$

и, конечно, необходимо, чтобы ε_{i+1} был отличным от ε_i.

Продолжим неразличимую последовательность в оба направления. И сдвигая $a_0, \ldots, a_{i-1}$ налево и $a_{i+2}, \ldots, a_{2n+1}$ направо к концам этого продолжения, способом, аналогичным тому, что мы применили в 12.37, получаем формулу $g(x, y, \bar{b})$ с параметром $\bar{b}$, в которую включается $\bar{a}$, такую, что если $i < j$, то $(\exists x)(\neg g(x, a_i, \bar{b}) \wedge g(x, a_j, \bar{b}))$ и $\neg(\exists x)(g(x, a_i, \bar{b}) \wedge \neg g(x, a_j, \bar{b}))$; это означает, что множество элементов x, удовлетворяющих формуле $g(x, a_i, \bar{b})$ строго входит в множество элементов x, удовлетворяющих $g(x, a_j, \bar{b}))$, следовательно, предпорядок определенный формулой:

$$\forall x[g(x, y_1, \bar{y}_2) \rightarrow g(x, z_1, \bar{z}_2)] \ ,$$

имеет бесконечные подцепи.

□

Закончим раздел двумя определениями технического характера, вышедших из под пера Шелаха.

Говорят, что формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ *имеет свойство порядка*, если можно найти в модели M теории T кортежи $\bar{a}_n$ и $\bar{b}_m$, $n, m \in \omega$, такие, что $f(\bar{a}_n, \bar{b}_m)$ будет истинна, если $n \leq m$, и ложна, если $n > m$. Это означает, что формула $g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)$ упорядочивает бесконечное множество.

Формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ *имеет свойство строгого порядка* если можно найти $\bar{b}_n$, $n \in \omega$, в модели M теории T, такие, что $(\exists \bar{x})(\neg f(\bar{x}, \bar{b}_n) \wedge f(\bar{x}, \bar{b}_m))$ будет истинна, если $n < m$, и ложна, если $n > m$; это означает, что предпорядок, определенный формулой $(\forall \bar{x}) f(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow f(\bar{x}, \bar{z})$, имеет бесконечные цепи.

Свойство порядка, которое появляется в 12.37, и свойство строгого порядка, что появляется в 12.38, переведенные на шелаховский язык, звучат так :

T нестабильна, если и только если можно найти формулу $f(x, \bar{y})$, имеющую свойство порядка, если и только если можно найти формулу $f(x, \bar{y})$, имеющую свойство строгого порядка или свойство независимости.

В этом результате, как показывает проверка доказательств теорем 12.34 и 12.38, найденная формула имеет единственную переменную x; можно доказать, намного легче, чем в случае свойства независимости, что если некоторая формула $f(\bar{x}, \bar{y})$ имеет свойство строгого порядка, то существует таковая в T, у которой $\bar{x}$ состоит только из одной переменной. Бесконечная цепь имеет свойство строгого порядка, но не имеет свойства независимости; в то время как пример, данный после следствия 12.21, имеет свойство независимости, но не имеет свойства строгого порядка.

12.i Добавление: теорема Рамсея

Я буду говорить здесь о теореме, которая традиционно используется в теории моделей, чтобы образовать неразличимые последовательности. Можно вполне обойтись без него, и она нигде не используется в этом труде. Но читатель, вероятно, ее встретит во время чтения литературы, когда его будут убеждать в существовании неразличимых последовательностей некоторого вида только со ссылкой "на теорему Рамсея". Таким образом, ему необходимо знать о чем идет речь, тем более, что это фундаментальная теорема комбинаторики, которую никакой порядочный человек не может игнорировать.

Мы рассмотрим множество E, и разбиение P множества подмножеств E из n элементов на конечное число классов, которые называют "цветами", чтобы выражаться более красочно; подмножество A множества E называется *однородным* для P если все его подмножества из n элементов окрашены одним цветом. Мы особо обращаем внимание на то, что P разбивает подмножества из n элементов, а не n-ок, из E.

Теорема 12.39 (Рамсей, конечный вариант) *Для данных трех натуральных чисел n, m k, существует натуральное число $R(n, m, k)$, такое, что если множество E имеет по крайней мере $R(n, m, k)$ элементов, то для каждого разбиения n-элементных подмножеств E на k цветов существует однородное подмножество E, имеющее по крайней мере m элементов.*

Доказательство. Такому разбиению, мы сопоставляем структуру, вводя символ n-арного отношения для каждого цвета, скажем $R_1, \ldots R_k$; пусть

T – неполная теория, выражающая, что каждое отношение R_i симметрично, т,е. $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(R_i(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow R_i(x_{s1},\ldots,x_{sn})$ для каждой перестановки s индексов, и удовлетворяется только n-ками имеющими попарно различные компоненты, и что $R_1,\ldots,R_k$ составляют разбиение множества всех таких n-ок.

Существование в некоторой модели T, однородного подмножества из m элементов выражается некоторой аксиомой H_m . Если бы теорема была ложной, мы бы имели произвольно большие конечные модели $T \cup \{\neg H_m\}$; значит, она будет иметь бесконечную модель M. Пусть p из $S_1(M)$ – нереализованный тип и $a_0,\ldots,a_i,\ldots$ – последовательность Морли особого сына p в некотором элементарном расширении N модели M. Так как эта последовательность неразличима (относительно порядка), то обязательно все ее n-элементные подмножества будут одного цвета, что противоречит тому, что $N \vdash \neg H_m$.

□

Теорема 12.40 (Рамсей, бесконечный вариант) *Если E – бесконечное множество, то для любого разбиения n-элементных подмножеств E на конечное число цветов существует однородное бесконечное подмножество E.*

Доказательство. Индукцией по n; это очевидно, если $n = 1$; докажем шаг $n+1$, предполагая доказанным шаг n.

Возьмем a_0 из E; мы получаем разбиение подмножеств w множества $E \setminus \{a_0\}$ из n элементов, окрашивая w цветом $w \cup \{a_0\}$; по гипотезе индукции, имеется однородное бесконечное подмножество A_0 этого бесконечного множества, цвет которого мы обозначим через c_0. Затем возьмем a_1 из A_0, мы даем подмножеству w из n элементов $A_0 \setminus \{a_1\}$ цвет $w \cup \{a_1\}$ и получаем для этого разбиения бесконечное однородное подмножество A_1 цвета c_1.

Повторяя эту процедуру ω раз, мы получаем бесконечную последовательность $c_0,\ldots,c_i,\ldots$ цветов и счетное подмножество $A = \{a_0,\ldots,a_i,\ldots\}$ множества E, такие, что каждое подмножество из $n+1$ элементов, в котором элементом наименьшего индекса является a_i, получает цвет c_i; так как цветов конечное число, один цвет повторяется бесконечное число раз, и элементы a_i с индексами, соответствующими этому цвету, образуют однородное подмножество E.

□

Бесконечная теорема Рамсея является "более сильной", чем конечная теорема Рамсея. Действительно, бесконечная версия конечной теоремы Рамсея утверждает только существование произвольно больших конечных однородных подмножеств.

Конечная теорема Рамсея может быть доказана компактностью, как мы и сделали, или с помощью бесконечной теоремы Рамсея. Можно вдохновиться доказательством этой последней теоремы и доказывать конечную теорему Рамсея индукцией по n. Если это сделать подробно, то можно понять, что эта теорема, говорящая только о конечных множествах, значит, имеющая комбинаторный характер, доказуема в арифметике Пеано.

Пример применения (бесконечной) теоремы Рамсея: бесконечный граф имеет бесконечное подмножество элементов либо все попарно связанных, либо все попарно не связанных; бесконечный частичный порядок имеет либо бесконечную подцепь, либо бесконечное подмножество попарно несравнимых элементов; бесконечное ультраметрическое пространство содержит либо бесконечный равносторонний многоугольник, либо бесконечное подмножество без равносторонних треугольников.

Пример применения теоремы конечного Рамсея: граф, который имеет по крайней мере 6 элементов, содержит три точки, которые все связаны, или все не связаны (т.е. $R(2,3,2) = 6$; точный подсчет $R(n,m,k)$ даже для маленьких значений n, является головоломкой для комбинаторщиков).

Вот как некоторые используют теорему Рамсея чтобы получить неразличимости. Пусть $f(x)$ – формула, удовлетворяющаяся бесконечным числом элементов; мы добавляем $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ к языку, и хотим показать совместность множества предложений, образованного из $f(x)$ и из $g(a_0, \ldots, a_n) \leftrightarrow g(a_{i_0}, \ldots, a_{i_n})$ для всех $i_0 < \cdots < i_n$.

Для этого, по компактности, достаточно рассмотреть конечное число $g_1, \ldots, g_k$ формул, местностей соответственно $n_1, \ldots, n_k$. Тогда рассмотрим бесконечное множество $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ реализаций $f(x)$ в некоторой модели T; разбиваем n_1-элементные подмножества A на два класса: для первого берем те n_1-элементные подмножества, элементы которых в возрастающем порядке удовлетворяют g_1 ; в то время как для второго берем те, что удовлетворяют $\neg g_1$. По бесконечной теореме Рамсея A имеет бесконечное однородное подмножество A_1 ; повторяя эту процедуру, выделим из A_1 бесконечное подмножество, которое однородно также для g_2 , и т.д. Тогда множество A_k , которое получается в конце, однородно для всех $g_1, \ldots, g_k$; достаточно перенумеровать его элементы, в возрастающем порядке, чтобы получить искомую последовательность.

Мы использовали бесконечную теорему Рамсея, которая более легка для применения, но ясно, что когда мы имеем дело с совместностью чего-нибудь, нам достаточна конечная версия.

Мы видим, что так же просто и так же прямо, брать последовательность Морли конаследника, соответствующего некоторому ультрафильтру.

12.j Исторические и библиографические примечания

"Особый сын" является переводом термина "non-splitting extension" Шелаха; содержание 12.a было изложено в [ПУАЗА, 1981a], в частности, быстрое доказательство 12.6 – единственности особого сына для стабильного типа. Конаследники появились в [ПУАЗА, 1977], после одного предложения Ласкара.

Неразличимые последовательности восходят [ЭРЕНФОЙХТ-МОСТОВСКИЙ, 1956]; эквивалентное понятие "отношение сцепляемости" было изучено прежде [ФРАИССЕ, 1954]: речь идет об отношении R, носитель которого может быть упорядочен в виде порядка C так, чтобы R определялся по C формулой без квантора; это значит, что носитель R является неразличимой последовательностью для R, если ограничиться формулами без кванторов. Посредством теоремы Рамсея, Фраиссе показывает эквивалентность сцепляемости и мономорфности: последнее означает что для каждого натурального n все ограничения R на n-элементное множество изоморфны; Фраснэ показал, что мономорфность выражается посредством конечного числа аксиом [ФРАСНЭ, 1965]; его теория "переставленных цепей" ставит следующую проблему: сколькими способами можно упорядочить I так, чтобы получить неразличимую последовательность? Эта проблема решена в [ХОДЖЕС-ЛАХЛАН-ШЕЛАХ, 1977].

Начиная с [МОРЛИ, 1965], неразличимые множества применяются повсюду в построениях моделей стабильных теорий, откуда название "последовательность Морли", данное неразличимой последовательности M-особого типа. Свойство независимости было определено в [ШЕЛАХ, 1971b]; оно послужило [КЕЙСЛЕР, 1976] для определения функции, которая, при фиксированной T, сопоставляет мощности λ максимальное число типов, которое можно получить над множеством параметров этой мощности. Доказательство 12.18 – оригинальное (см. 12.e).

Характеристика стабильности неразличимыми последовательностями является основой разработки ответвляемости Шелахом [ШЕЛАХ, 1978]; теорема 12.28, характеризующая свойство независимости по числу конаследников, была доказана в [ПУАЗА, 1981a] посредством комбинаторной леммы об ультрафильтрах; аргумент, приводимый здесь, который состоит в том, чтобы определить особый тип по его последовательности Морли, появился в "добавлении при корректуре" [ШЕЛАХ, 1980], за несколько месяцев до выхода статьи, на которую он делает ссылку! Акцент на "Теорему о разделения параметров", 12.31, был сделан в [ПУАЗА, 1977].

Теорема Мататьяху Рубина взята из [РУБИН, 1974]; отсутствие свойства независимости для цепей было замечено в [ПУАЗА, 1981a], но точное число конаследников было определено лишь в [ГУРЕВИЧ-ШМИТТ, 1984]; анализ конаследников в случае ультраметрических пространств восходит к [ДЕЛОН, 1981] , где доказано, при условиях применимости теоремы Акса и Кочена, что нормированное поле может иметь свойство независимости только если его поле вычетов или его группа значений имеет это свойство; группа была элиминирована [ГУРЕВИЧ-ШМИТТ, 1984], которые доказали, что абелева тотально упорядоченная группа не имеет свойства независимости: их аргумент основывается на теореме элиминации Юрия Гуревича, которая сводит теорию упорядоченной группы к теории ультраметрических пространств. По [ПАРИГО, 1982] дерево не может иметь свойство независимости. Особые последовательности восходят к [ПУАЗА, 1983].

Все комбинаторные свойства формул раздела 12.h принадлежат [ШЕЛАХ, 1971b]; различные эквиваленты нестабильности установлены здесь методами, заметно отличными от методов Шелаха. Именно [ЛАХЛАН, 1975] показал, что для свойства строгого порядка можно заменить $\bar{x}$ на x. Прямой метод доказательства эквивалентности свойства порядка и свойства дихотомии имеется в [ХОДЖЕС, 1981].

Другое значительное комбинаторное свойство для формулы, которое не изучено в этом курсе, "свойство конечной покрываемости" ("finite cover property"), было определено в [КЕЙСЛЕР, 1967], и изучено [ШЕЛАХ, 1971b] и

[БОЛДУИН-КЬЮКЕР, 1980]; из [ПУАЗА, 1983a] вы поймете, что оно означает для определимости типов стабильной теории.

Теорема Рамсея, как ее конечная версия, так и ее бесконечная версия, которые являются сводным ключом для бесчисленных комбинаторных конструкций, была доказана в оригинале [РАМСЕЙ, 1929], чтобы дать алгоритм решения проблемы истинности $\forall\exists$-предложений !