Глава 13

Фундаментальный порядок

> L'ordre fondamental est un moyen de comparer les types sur les modèles d'une théorie complète ... il est surtout efficace dans le cas d'une théorie stable.
>
> B.P.

13.a Фундаментальный порядок

Фундаментальный порядок является средством сравнения типов над моделями полной теории : он измеряет степень удаленности типа от того, чтобы быть реализованным. Этот порядок особенно эффективен в случае стабильной теории.

Говорят, что тип p над моделью M теории T представляет формулу без параметров $f(x, \bar{y})$, если существует элемент $\bar{a}$ в M такой, что $p \vdash f(x, \bar{a})$. В противном случае говорят, что он опускает $f(x, \bar{a})$. Внимание: если $p \vdash \exists \bar{y} f(x, \bar{y})$, то это означает, что в каждой модели реализующей p в некоторой точке x , найдется элемент $\bar{y}$, удовлетворяющий $f(x, \bar{y})$. Это не означает, что существует уже такой элемент $\bar{y}$ в модели M . Например, каждый тип удовлетворяет формулу $(\exists \mathrm{y})(x = y)$, в то время как только те типы, которые представляют формулу $x = y$ являются реализованными типами.

Класс типа p для фундаментального порядка есть множество формул, которые он представляет, и *фундаментальный порядок* является противоположным порядком для отношения включения для классов типов. В этом порядке $p \geq q$ означает, что класс типа p содержится в классе типа q , то есть каждая формула, представленная в p , представлена и в q . Значит каждый раз, когда $p \vdash f(x, \bar{a})$ для некоторого $\bar{a}$ в M , существует $\bar{a}'$ в N такой, что $q \vdash f(x, \bar{a}')$. Легко видеть, что мощность фундаментального порядка не более 2^{ITI} и, что если q сын p , то $p \geq q$, а если q является наследником p , то p и q имеют один и тот же класс, что обозначается $p \sim q$. Действительно, по определению наследника q типа p, тип q принадлежащий $S_1(M)$, является сыном который ему эквивалентен, то есть не является строго меньшим, относительно фундаментального порядка $T(M)$.

Заметим также, что если $p \geq q$ в фундаментальном порядке, то они имеют одно и то же ограничение на пустое множество параметров. Действительно, если $f(x)$ является формулой без параметров $\bar{y}$, то тип представляет $f(x)$, если он ее удовлетворяет. Если бы некоторая формула без параметров $f(x)$ была представлена в q , но не представлена в p , то $\neg f(x)$ лежала бы в p и значит и в q . Следовательно, тип q содержит $f(x)$ и $\neg f(x)$, что невозможно.

Лемма 13.1 *Если p реализованный тип, то q эквивалентен p в фундаментальном порядке если и только, если q реализован и имеет то же самое ограничение над $\emptyset$ что и p .*

Доказательство. Предположим, что p реализован элементом a в M . Если $q < p$, то q реализован, так как он представляет $x = y$ и мы знаем, что p и q имеют одно и то же ограничение над $\emptyset$. Обратно, предположим, что q реализован элементом b в N , при этом a и b имеют один и тот же тип над $\emptyset$. Если p представляет $f(x, \bar{y})$, то $M \vdash \exists \bar{y} f(a, \bar{y})$, таким образом $N \vdash \exists \bar{y} f(b, \bar{y})$ и существует $\bar{y}$ в N удовлетворяющий $f(b, \bar{y})$.

□

Так как каждый тип имеет реализованного сына, мы видим, что реализованные типы являются в точности минимальными типами в фундаментальном порядке, что каждый тип мажорирует единственный минимальный тип. Действительно, два типа имеют одно и то же ограничение над $\emptyset$ если и только, если в фундаментальном порядке, они мажорируют один и тот же минимальный тип. Если мы возвратимся к примеру теории T плотных порядков без концевых точек, то получим фундаментальный порядок из четырех элементов:

1. наименьший элемент, который является классом реализованных типов
2. класс типов a^+, a^- и иррациональных типов, они все эквивалентны : этот класс мажорирует предыдущий
3. класс $+\infty$, который мажорирует предыдущий
4. класс $-\infty$, который мажорирует второй класс и несравним с третьим.

Теорема 13.2 *Фундаментальный порядок полон в следующем смысле : каждая цепь имеет минимальную мажоранту (являющуюся, конечно, её единственной верхней гранью) и максимальную миноранту (являющуюся её единственной нижней гранью).*

Доказательство. Пусть $p_i \in S_1(M_i)$ цепь в фундаментальном порядке, индексированная цепью I . Если $i < j$, то $p_i < p_j$. Пусть также F_i класс p_i , то есть множество формул, которые этот тип представляет. Расширим язык T , добавляя к нему символ унарного отношения $M(y)$ (которое обозначим более наглядно $y \in M$) и символ константы x , и рассмотрим список аксиом, выражающий, что M элементарная подструктура монстр-модели, то есть удовлетворяет тесту Тарского,

$$\forall \bar{y}\{[\bar{y} \in M \wedge \exists u f(u, \bar{y})] \to \exists u[u \in M \wedge f(u, \bar{y})]\} ,$$

и что тип x над M представляет все формулы f из $\cap F_i$, $\exists \bar{y}[\bar{y} \in M \wedge f(x, \bar{y})]$, и в то же время опускает все формулы g вне $\cap F_i$, $\forall \bar{y}[\bar{y} \in M \to \neg g(x, \bar{y})]$.

Я утверждаю, что это множество совместно. Действительно, каждый из его конечных фрагментов содержит только конечное число формул для опускания, и мы получаем модель интерпретируя M через M_i , а x реализацией x_i типа p_i в элементарном расширении M_i , для достаточно большого i . Следовательно, если возьмем модель этой теории, то класс типа p элемента x над M совпадает с $\cap F_i$, и он является очевидно минимальной мажорантой F_i .

Теперь повторяем ту же конструкцию, но на этот раз с $\cup F_i$ вместо $\cap F_i$; снова имеем совместное множество, так как конечный фрагмент рассматриваемого множества предложений содержит только конечное число формул, которые следует реализовать, и мы получаем модель с реализацией x_i типа p_i над M_i , для достаточно маленького i . Следовательно $\cup F_i$ также является классом типов, который является максимальной минорантой данной цепи.

□

Назовем *атомом* фундаментального порядка тип, или скорее класс типов, который не реализован, но который допускает только единственную строгую миноранту, свою реализацию.

Лемма 13.3 *Каждый не реализованный тип (т.е. не минимальный тип) мажорирует некоторый атом.*

Доказательство. Пусть p такой тип, и C максимальная цепь не реализованных типов, меньших p . Так как нижняя грань C опускает $x = y$ (смотрите доказательство предыдущей теоремы), то она не реализованная, и поэтому является атомом.

□

Лемма 13.4 *Каждая цепь фундаментального порядка имеет плотное семейство сечений мощности, меньшей или равной мощности T . В частности вполне упорядоченное, или анти вполне упорядоченное подмножество фундаментального порядка имеет мощность, меньшую или равную $|T|$.*

Доказательство. Пусть C цепь фундаментального порядка. Каждой формуле $f(x, \bar{y})$ сопоставляем сечение, в котором верхний класс образован из элементов C , опускающих f, а нижний класс из тех, которые её представляют: это семейство сечений отделяет точки C . Число сечений полной цепи равно своему кардиналу, так как все высшие классы имеют наименьший элемент; то же самое верно и для полных цепей относительно обратного порядка.

□

Мы видим таким образом, что фундаментальный порядок теории T мощности λ подчиняется некоторым ограничениям. Вот ещё одно: фундаментальный порядок не может быть сведен к бесконечному числу минимальных элементов. Это устанавливается рассуждениями от противного аналогичными теореме 13.2 . Конструируется нереализованный тип строго меньший минимальных типов, что приводит к противоречию. Кажется маловероятным, что перечисленные вышеупомянутые условия явились достаточными для того, чтобы частичный порядок был фундаментальным, но мы не знаем больше про них ничего. Нам известны несколько дополнительных ограничений, которым должны удовлетворять фундаментальные порядки стабильных теорий, но мы еще очень далеки от от возможности описания этих порядков. Кратко изучим то, что происходит с ультрастепенями типов:

Теорема 13.5 *Если p в $S_1(M)$ и q в $S_1(N)$, то $p \geq q$ если и только, если существует ультрафильтр U и вложение M в N^U , превращающее q^U в сына p.*

Доказательство. Так как q^U является наследником q , то $q^U \sim q$. Если таким образом, q^U является сыном p , то $p \geq q^U$, значит $p \geq q$, и условие достаточно. Обратно, предположим, что $p \geq q$. Пусть I множество инъекций конечных подмножеств M в N . Если $p \vdash f(x, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$, то обозначим через $I_{f(x,\bar{a})}$ множество элементов i из I , определенных на $\bar{a}$ и таких, что $q \vdash f(x, i\bar{a})$. Так как $p \geq q$, то все эти множества не пустые, и образуют базу фильтра, которая содержится в ультрафильтре U подмножеств I .

Теперь рассмотрим отображение M в N^U, полагая $(sa)_i = ia$, если i определена на a,и неважно чему равно иначе. Это отображение является элементарной инъекцией M в N , так как если формула f не содержит переменную

x , то сказать, что $p \vdash f(\bar{a})$, просто значит, что $f(\bar{a})$ истинно в M . По модулю этого вложения, q^U является тогда сыном p .

□

Из этого результата можно вывести теорему 11.4, с которой полезно его сравнивать: если $M \prec N$, $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$ и q является наследником p , то это означает, что $q \geq p$ для фундаментального порядка $T(M)$. Следовательно, по теореме 13.5, существует ультрафильтр U и вложение, *оставляющее неподвижным поточечно* M (каждый элемент которой выделен в языке), т.е. вложение, продолжающее диагональное каноническое вложение N в M^U, которое превращает p^U в сына q .

Мы перейдем теперь к очень значительному и существенному свойству стабильных типов. Вообще говоря, чтобы q был наследником p , недостаточно чтобы он был сыном, эквивалентным по фундаментальному порядку T, так как надо учесть параметры модели M типа p . Но это не так для стабильных типов.

Теорема 13.6 *Стабильный тип над моделью T имеет только единственного эквивалентного по фундаментальному порядку сына – своего наследника.*

Доказательство. Если p имеет двух эквивалентных сыновей p_l и p_2, тогда для некоторого $\bar{a}$ будет $p_l \vdash f(x\bar{a})$, $p_2 \vdash \neg f(x\bar{a})$. Тогда каждый тип q , эквивалентный типу p , будет иметь сыновей вида p^U, затем p_l^U и p_2^U . Тип q сам разбивается также на двух сыновей, эквивалентных p , и мы конструируем дерево типов, дающее свойство дихотомии, как в доказательстве теоремы 11.11 . Это противоречит стабильности p .

□

Теорема 13.7 *Если $p \geq q$ и p стабилен, тогда q стабилен. В частности, стабильность является свойством класса типов: или все типы одного того же класса стабильны, или все нестабильны.*

Доказательство. Легче показать, что если q нестабилен, то таков и p . Действительно, p имеет сына вида q^U, являющегося наследником q и, таким образом, нестабильным. Альтернативный аргумент состоит в том, что для некоторой формулы, тип q имеет свойство дихотомии, также как и p , каждый конечный фрагмент которого интерпретируется в q .

□

Если $(M, d\mathrm{p})$ и (N, dq) элементарно эквивалентны, то p и q представляют одни и те же формулы. Действительно, если $(M, d\mathrm{p}) \vdash (\exists y) df(y)$, то это верно также для (N, dq) . Обратное утверждение истинно для стабильных типов.

Теорема 13.8 *Если типы p из $S_1(M)$ и q из $S_1(N)$ стабильны и эквивалентны по фундаментальному порядку, то (M, dp) и (N, dq) элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Так как $p \geq q$, p имеет сына вида q^U; так как q^U является наследником q, p и q^U эквивалентны, и, по 13.6 , q^U является наследником

p ; так как для стабильного типа (или даже только для определимого), наследник и сильный наследник, это одно и то же, (N^U, dq^U) является общим элементарным расширением (N, dq) и (M, dp), которые таким образом элементарно эквивалентны.

□

Если вы знакомы с результатом Шелаха, утверждающего, что две элементарно эквивалентные структуры имеют изоморфные ультрастепени, то видите, что два стабильных типа одного класса имеют общую ультрастепень. Мы увидим в главе 15 , в качестве следствия теоремы о грани 15.6 , что имеется другое ограничение для фундаментального порядка стабильной теории: над минимальным элементом, соответствующим реализациям данного типа над $\emptyset$, имеется максимальный класс, который мажорирует все классы, содержащие этот тип над $\emptyset$. Фундаментальный порядок теории плотных порядков без концевых точек не обладает этим свойством.

Отметим, что два стабильных типа имеют один и тот же класс в фундаментальном порядке если и только, если их последовательности Морли имеют один и тот же тип над $\emptyset$. Действительно, если p и q эквивалентны, то они имеют с точностью до изоморфизма единственного общего наследника; и если $p \in S_1(M)$, $q \in S_1(N)$, M и N расположены так, что p и q имеют одну и ту же последовательность Морли s, то мы знаем, что средний тип над моделью, содержащей модели M и N , является наследником p , и также наследником q .

В случае когда T стабильна, таким образом, имеется биекция между классами фундаментального порядка и типами над $\emptyset$ неразличимых ω-последовательностей, которые все могут рассматриваться как последовательности Морли. Более точно, последовательности s сопоставляют класс среднего типа p_s над моделью M содержащей s : последовательность Морли p_s продолжает s, то есть имеет тот же тип что и s.

Какой порядок определяется таким образом на типах неразличимых последовательностей? Если $p_s \geq p_t$, то это означает, что с точностью до изоморфизма p_t может быть рассмотрен как сын p_s . Таким образом, необходимо, чтобы мы могли поместить s и t одну по отношению к другой так, чтобы средний тип t над s был также средним типом s над s и это условие достаточно, чтобы $p_s \geq p_t$. Читатель поймет это легко, когда он увидит, в главе 15 , теорему о грани, и когда он поймет, что p_s единственный сын своего ограничения на s.

13.b Спектр стабильности

Мы знаем, что нестабильная теория нестабильна в каждой бесконечной мощности λ . Теперь я собираюсь показать, что класс кардиналов, в которых стабильная теория T стабильна определен двумя инвариантами T, $\lambda_0(T)$ – *наименьшим бесконечным кардиналом в котором T стабильна*, и $\kappa(T)$ – *наименьшим бесконечным кардиналом таким, что в фундаментальном порядке T не существует ординальной, строго убывающей последовательности, индексированной $\kappa(T)$* (иначе говоря, каждое анти-вполне-упорядоченное подмножество фундаментального порядка имеет строго меньшую мощность чем $\kappa(T)$.

Лемма 13.9 *Если для $\mu < \kappa(T)$ верно $\lambda^\mu > \lambda$, тогда T нестабильна в λ.*

Доказательство. Предположим противное, пусть T стабильна и μ наименьший кардинал меньший $\kappa(T)$ такой, что $\lambda^\mu > \lambda$. В фундаментальном порядке T существует убывающая последовательность $p_0 > p_1 > \cdots > p_\alpha > \ldots$, где $\alpha \in \mu$ и можно предполагать, добавляя если нужно нижние грани, что если α пределен, то класс типа p_α является нижней гранью классов типов p_β, $\beta < \alpha$. Пусть $f_\alpha(x, \bar{y})$ формула, представленная в $p_{\alpha+1}$ и опускаемая в p_α.

Я собираюсь строить индукцией по $\alpha \leq \mu$ возрастающую последовательность N_α моделей T и типы q_σ, где $\sigma \in \lambda^\alpha$, такие, что:

- если α пределен, то N_α предел моделей N_β, $\beta < \alpha$;
- если $\sigma \in \lambda^\alpha$, то q_σ является типом над N_α, имеющий тот же класс что и p_α, и если α предельный, то q_σ предел $q_{\sigma\restriction\beta}$ для $\beta < \alpha$;
- если σ является расширением τ, то q_σ является сыном q_τ ;
- для каждой последовательности $\sigma \in \lambda^\alpha$ в модели $N_{\alpha+1}$ существуют кортежи $\bar{a}_{\sigma u}$ для $u \in \lambda$, такие, что $q_{\sigma u} \vdash f_{\alpha+1}(x, \bar{a}_{\sigma u})$, в то время как, если $v \neq u$, то $q_{\sigma u} \vdash \neg f_{\alpha+1}(x, \bar{a}_{\sigma v})$.

Для пустой последовательности берем тип $p_0 = q_\emptyset$ над произвольной исходной моделью $M_0 = N_0$. Так как на предельных этапах мы просто берем пределы, то достаточно объяснить, что я хочу сделать на этапах-последователях. Таким образом, у меня есть модель N_α, и для каждой $\sigma \in \lambda^\alpha$ мой тип q_σ над N_α, имеет тот же класс что и p_α. Тип q_σ имеет сына r, эквивалентного $p_{\alpha+1}$, например ультрастепень $p_{\alpha+1}$, над некоторым расширением P модели N_α . Пусть b реализация r , тогда существует $\bar{a}$ в P такой, что $f_{\alpha+1}(b, \bar{a})$ истинно.

Мы реализуем λ-последовательность Морли типа $P \cup \{b\}$ над N_α : это тип с бесконечным числом переменных, но это ничуть не помешает. Таким образом получаем последовательность $P_0 \cup \{b_0\}, \ldots, P_u \cup \{b_u\}, \ldots,\quad u \in \lambda$, тотально неразличимую над N_α . Множество P_u содержит копию $\bar{a}_u$ кортежа $\bar{a}$, для которой имеем $f_{\alpha+1}(b_u, \bar{a}_u)$. Напротив, если $u \neq v$, то по построению последовательности Морли, если $v < u$, и, соответственно, по тотальной неразличимости, или по равенству конаследника и наследника, если $u < v$, тип $P_u \cup \{b_u\}$ над $P_v \cup \{b_v\}$ наследует свое ограничение над N_α. Таким образом тип b_u над P_v наследует свое ограничение над N_α , то есть q_σ , и которое опускает $f_{\alpha+1}(x, \bar{y})$. Следовательно, в точности выполняется $\neg f_{\alpha+1}(b_u, \bar{a}_v)$.

Проделаем это со всеми σ из λ^α и получаем $P_{\sigma u}$, $b_{\sigma u}$ и $\bar{a}_{\sigma u}$. Охватим все $P_{\sigma u}$ некоторым элементарным расширением $N_{\alpha+1}$ модели N_α, содержащим таким образом все $\bar{a}_{\sigma u}$, и возьмем в качестве $q_{\sigma u}$ наследника над $N_{\alpha+1}$ типа $b_{\sigma u}$ над $P_{\sigma u}$, находящегося в классе $p_{\alpha+1}$.

Как только проделаем эту процедуру μ раз, то получаем λ^μ типов q_σ, $\sigma \in \lambda^\mu$, над моделью N_μ. Чтобы попарно различить эти типы, достаточно их ограничить на параметры $\bar{a}_\tau$, для $\tau \in \lambda^\alpha$, $\alpha < \mu$. Так как по определению μ , если $\alpha < \mu$, то $|\lambda^\alpha| = \lambda$ и число таких параметров $\mu \times \lambda = \lambda$, что дает нестабильность в λ.

□

Лемма 13.10 *Если $\lambda \geq \lambda_0(T)$, то для каждого подмножества A мощности λ модели N теории T , существует элементарное ограничение M модели N мощности λ, содержащее A.*

Доказательство. Полагаем $A = A_0$ и рассмотрим множество $A_1 \subset N$, содержащее некоторую реализацию каждого типа над конечным подмножеством A_0, реализующегося в N . Имеется λ конечных подмножеств A_0, каждое из них самое большее может дать только $\lambda_0(T)$ типов. Имеем только λ типов, которые нужно реализовать, и значит можно считать, что множество A_1 имеет мощность λ. Возобновляем процедуру с заменой A_0 на A_1, и повторяем её ω раз. Объединение M всех A_n имеет мощность λ и удовлетворяет тесту Тарского, это и есть элементарное ограничение модели N.

□

Теорема 13.11 (о спектре стабильности) *Если теория T стабильна, то T стабильна в λ если и только, если $\lambda \geq \lambda_0(T)$ и $\lambda^\mu = \lambda$ для каждого $\mu < \kappa(T)$.*

Доказательство. Условие необходимо по лемме 13.9. Обратно, предположим, что оно выполнено. Мы должны показать стабильность теории T в λ . По лемме 13.9, каждое множество параметров мощности λ вкладывается в модель той же мощности, поэтому нам достаточно подсчитать число типов над моделью M мощности λ . Так как T стабильна в $\lambda_0 = \lambda_0(T)$, то $\lambda_0 = \lambda_0^{<\kappa(T)}$ (это обозначение кардинала, являющегося верхней гранью кардиналов λ^α где $\alpha < \kappa(T)$) и $\kappa(T) \leq \lambda_0$. Рассмотрим отображения s ординала $\alpha < \kappa(T)$ в M. Мы можем строить индукцией по α элементарное ограничение M_s модели M мощности λ_0, содержащее образ отображения s так, чтобы если s ограничение t, то $M_s \prec M_t$. Возьмем фиксированное семейство M_s, имеющее это свойство. Так как $\lambda^{<\kappa(T)} = \sum_{\alpha<\kappa(T)} \lambda^\alpha = \kappa(T) \times \lambda = \lambda$, то имеется λ моделей в семействе M_s.

Пусть теперь p тип из $S_1(M)$ и p_0 ограничение p на модель $M_\emptyset$. Если p не является наследником p_0, то это потому, что для некоторой формулы f справедливо $p \vdash f(x, \bar{a}_1)$ в то время как p_0 опускает $f(x, \bar{y})$. Пусть M_1 модель, соответствующая последовательности s_1, полученной перечислением a_1 . Если p не является наследником своего ограничения p_1 над M_1, то это из-за некоторого параметра $\bar{a}_2$. Рассмотрим последовательность s_2 , полученную добавлением некоторого перечисления a_2 в конец s_1 , и ограничение p_2 типа p над $M_2 = N_{s_2}$. Продолжая эту процедуру : на предельных этапах рассмотрим последовательность s_α, являющуюся пределом s_β, $\beta < \alpha$, модель $M_\alpha = M_{s_\alpha}$, и ограничение p_α типа p над M . А на этапах-последователях, если p не является наследником p_α, то находим таким же образом кортеж параметров $\bar{a}_{\alpha+1}$, который добавляем к концу s_α ,чтобы получить $s_{\alpha+1}$, и обозначим $p_{\alpha+1}$ ограничение p над моделью $M_{\alpha+1}$, соответствующей этой последовательности.

Так как $p_\alpha > p_{\alpha+1}$ для всех α, то мы обязаны остановиться до $\kappa(T)$. Когда остановимся, это означает, что нашли модель M_s такую, что p наследник своего ограничения p_s над M_s . Имеется λ возможностей для выбора M_s и после ее выбора, так как $|M_s| = \lambda_0$, имеем λ_0 возможностей для выбора p_s, в итоге $\lambda \times \lambda_0 = \lambda$ возможностей для выбора p. □

Если $\kappa(T) = \omega$, то есть если фундаментальный порядок фундирован (он не содержит строго убывающую ω-последовательность), то говорят, что T *суперстабильна*. Это означает, что она стабильна в каждой мощности выше $\lambda_0(T)$. Теория, которая стабильна в каждой мощности начиная с некоторой, суперстабильна; действительно существуют произвольно большие кардиналы такие, что $\lambda^\omega > \lambda$, например, по лемме Кенига (8.15, 8.16), те которые имеют счетную конфинальность.

Отметим также, что если теория T стабильна в λ, то она стабильна в λ^+. Действительно, если $\lambda^\mu = \lambda$, то $(\lambda^+)^\mu = \lambda^+$, поскольку $\mu < \lambda$ и кардинал λ^+ регулярен, каждая функция из μ в λ^+ ограничена некоторым $\alpha < \lambda^+$. Имеется λ^+ возможных выборов для α, и при фиксированном α, так как $|\alpha| \leq \lambda$, то $|\alpha^\mu| \leq \lambda^\mu = \lambda$. В итоге всего имеются $\lambda^+ \times \lambda = \lambda^+$ возможностей для выбора.

Мы видим таким образом, что спектр стабильности T, то есть класс кардиналов, в которых T стабильна, определяется по $\lambda_0(T)$ и $\kappa(T)$. Обратно, спектр стабильности очевидно позволяет выявить $\lambda_0(T)$, а также $\kappa(T)$. Действительно, берем кардинал $U > \lambda_0(T)$, и рассмотрим $\lambda = \beth_{\alpha+\beta^+}$: конфинальность λ, будучи равна β^+, регулярна, а по лемме Кенига $\lambda^{\beta^+} > \lambda$. Напротив, так как любая функция из β в λ ограничена некоторым $\beth_{\alpha+\gamma}$, то $\lambda^\beta = \lambda$. Иначе говоря, T стабильна в λ если и только, если $\beta^+ < \kappa(T)$, ясно что кардинал определяется множеством кардиналов-последователей, строго меньших его.

Эти рассмотрения имеют важное следствие: обозначим через $\kappa_n(T)$ кардинал, аналогичный $\kappa(T)$, но соответствующий фундаментальному порядку n-ок. Таким образом, он наименьший бесконечный кардинал такой, что не существует в фундаментальном порядке n-ок в T ординальная убывающая последовательность, индексированная $\kappa_n(T)$.

Лемма 13.12 *Если T стабильна, то $\kappa(T) = \kappa_n(T)$ для любого n.*

Доказательство. Так как, с одной стороны, типу a над A можно сопоставить тип над A n-ки $(a, a, ..., a)$, а с другой стороны, тип $(a_1, \ldots, a_n)$ над A определяется типом a_1 над A, затем типом a_2 над $A \cup \{a_1\}, \ldots$, типом a_n над $A \cup \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, то T имеет тот же спектр стабильности для своих одноэлементных множеств, что и для своих n-ок.

□

Мы знаем, по лемме 13.4, что $\kappa(T) \leq |T|^+$. Кроме того, как отмечено, $\kappa(T) \leq \lambda_0(T)$, и по теореме 11.10) $\lambda_0(T) \leq 2^{|T|}$. Имеется другая оценка : если $\lambda_0(T) > |T|$, тогда $\lambda_0(T) \geq 2^\omega$ это следствие следующей чисто топологической леммы, примененной к пространствам $S_1(A)$, $|A| = |T|$.

Лемма 13.13 *Вполне несвязный компакт, имеющий мощность строго больше числа своих открыто-замкнутых подмножеств, имеет по крайней мере 2^ω точек.*

Доказательство. Напомним определение ранга Кантора и производные от пространства E (см. раздел 1.c) ; E_α определяются индукцией по α . Если α пределен, то $E_\alpha = \cap_{\beta<\alpha} E_\beta$. Для ординала последователя $E_{\alpha+1}$ получается из E_α удалением его изолированных точек . Полагаем $R(a) = \alpha$ если $a \in E_\alpha \setminus E_{\alpha+1}$, и $R(a) = \infty$ если a лежит в пересечении E_∞ всех E_α .

Если $E_\infty = \emptyset$, то каждая точка имеет ординальный ранг и открыто-замкнутую окрестность, в которой она единственная точка максимального ранга . В этом случае E не имеет больше точек, чем открыто-замкнутых подмножеств. Если $E_\infty \neq \emptyset$, то оно непустое стоуновское пространство без изолированных точек, и имеет по крайней мере 2^ω точек. Действительно, каждое непустое открыто-замкнутое подмножество E_∞ разбивается на два непустых открыто-замкнутых множества. Тогда применяем дихотомию : делим E_∞ на две части, затем каждую часть снова на две и т.д., и повторяем это ω раз. Каждая из полученных 2^ω последовательностей вложенных компактов сходится. □

Следовательно, если $|T| = \omega$, то $\lambda_0(T) = \omega$ или 2^ω, $\kappa(T) = \omega$ или ω_1 . Значит для счетной теории возможны только следующие четыре спектра стабильности:

- T нестабильна : T нестабильна в каждом λ ,
- T стабильна, но не суперстабильна : T стабильна в λ^ω и нестабильна в других мощностях ,
- T суперстабильна, но не ω-стабильна : T стабильна в $\lambda \geq 2^\omega$ и нестабильна в других мощностях ,
- T ω-стабильна (также говорят : тотально трансцендентна) , то есть T стабильна в каждом λ .

13.c Некоторые примеры

Вы не находите слишком абстрактным содержание трех последних глав? Наступил момент для его прояснения некоторыми примерами и составления каталога стабильностных свойств теорий, которые встречаются по ходу этого курса. Как обычно, детали оставляем читателю.

1. *Теория конечной структуры*
ω-стабильна. Так как каждый тип реализован, фундаментальный порядок образован из конечного числа несравнимых точек, и последовательности Морли состоят только из повторений одного и того же элемента.

2. *Теория бесконечного множества*
ω-стабильна. Фундаментальный порядок состоит из двух точек реализованной и не реализованной, одна над другой.

3. *Полная теория в языке унарных отношений*
суперстабильна. Тип над $\emptyset$ определяется тем, что какую из формул $R(x)$ и $\neg R(x)$ он содержит для каждого символа R . Если p имеет только лишь конечное число реализаций, то он дает только одну точку в фундаментальном порядке. В противном случае он дает две точки, реализованную, и не реализованную, одну над другой. Значит $\lambda_0(T) = |S_1(\emptyset)|$.

4. *Отношение эквивалентности с бесконечным числом бесконечных классов* ω- стабильно. Фундаментальный порядок состоит из трех точек, расположенных по порядку :

1. реализованный,
2. опускает $x = y$, но представляет $x \sim$ y ,
3. опускает $x \sim y$.

5. *Плотный порядок без концевых точек*
нестабилен, без свойства независимости как и все цепи. Фундаментальный порядок был уже описан.

6. *Дискретный порядок без концевых точек*
нестабилен, без свойства независимости. Фундаментальный порядок состоит из двух точек, реализованной и не реализованной. Каждый нереализованный сын каждого нереализованного типа является его наследником.

7. *Алгебраически замкнутые поля данной характеристики*
ω-стабильны. Типы над $\emptyset$ разделяются на алгебраические над простым полем, которые дают ω точек фундаментального порядка, которые несравнимы со всеми другими ; и трансцендентные над простым полем, которые дают две точки, реализованную и не реализованную, одну над другой. Последовательность Морли над M нереализованного типа, это множество алгебраически независимых элементов над M.

8. *Дифференциально замкнутое поле нулевой характеристики*
ω-стабильно, так как типы соответствуют неприводимым дифференциальным многочленам. Фундаментальный порядок достаточно сложен и очень плохо изучен.

9. *Теория бесконечной булевой алгебры*
нестабильна, со свойством независимости и свойством строгого порядка (обе для формулы $x \leq y$) .

10. *Богатые, или n-богатые ультраметрические пространства*
нестабильны, но без свойства независимости (см. 12.e) .

11. *Теория следования на натуральных числах*
ω-стабильна. Фундаментальный порядок состоит из ω точек, несравнимых с другими, соответствующих типам $0, 1, \ldots, n, \ldots$ и двух точек, расположенных одна над другой : нестандартный реализованный и нестандартный нереализованный.

12. *Теория порядка на натуральных числах*
нестабильна, без свойства независимости. Фундаментальный порядок тот же, что в предыдущем примере.

13. *Теория сложения натуральных чисел*
нестабильна. Можно показать, что нет свойства независимости.

14. *Арифметика*
нестабильна, со свойством независимости (для отношения делимости или отношения принадлежности) и также со свойством строгого порядка.

15. *Теории, интерпретируемые в другой теории*
Отметим, что согласно принципу, изложенному в 9.d, если N интерпретируема в структуре M с λ-стабильной теорией T, где λ превосходит число параметров, участвующих в этой интерпретации, тогда теория T' модели N также λ-стабильна. Мы видим, что в этом случае $\kappa(T') \leq \kappa(T)$. Если N интерпретируема в M и ее теория T' имеет свойство независимости или строгого порядка,

то теория T модели M имеет соответствующее свойство: замените элементы N представляющими их кортежами из M , а формулы N их переводом в M .

16. *Модули*

Если мы так много говорили о модулях в главе 6.e, то главным образом из-за следующего результата:

Теорема 13.14 *Теория любого модуля M , и в частности теория произвольной абелевой группы, стабильна.*

Доказательство. Тип p из $S_1(M)$ определяется формулами лежащими в нем вида $x \sim a(modG)$, где a из M и G примитивная подгруппа M. Это следует из теоремы 6.26 . Если p опускает формулу $x \sim y(modG)$, то в качестве соответствующего определения берем $y \neq y$, а если для некоторого a $p \vdash x \sim a(modG)$, то в качестве определения берем $y \sim a(modG)$. Итак, каждый тип определим.

□

Мы сопоставили в 6.e типу p из $S_1(M)$ *фильтр примитивных подгрупп*, соответствующих представимым в p формулам $x \sim y(modG)$. Как установлено, каждому фильтру примитивных групп соответствует по крайней мере один тип над M . Заметим, что если q наследник p над $N \prec M$, то он не может представлять больше формул. Таким образом q является единственным сыном p, имеющим тот же фильтр подгрупп, так как мы уже отметили, что этот сын единственный.

Следовательно, если мы начнем с типа p над моделью M_0 и берем последовательность его сыновей $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ над моделями $M_1, \ldots, M_n, \ldots$, то уменьшение в фундаментальном порядке соответствует в точности росту фильтров примитивных групп $F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots$, соответствующих $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.

Таким образом устанавливается, что фрагмент фундаментального порядка, образованного классами, находящимися ниже класса p_0, не что иное как противоположное по включению семейство фильтров примитивных подгрупп содержащих F_0 . Тем не менее, фундаментальный порядок не совпадает с противоположным к порядку включения фильтров подгрупп, так как надо еще учитывать фундаментальный порядок ограничений типов над $\emptyset$. Заметим, что если p тип x над M и если a из M, то тип $a+p$ элемента $a+x$ над M имеет тот же самый фильтр, что и p . Это противоположное включение фильтров есть то, что называется *стратифицированным порядком*, полученным рассмотрением фундаментального порядка "с точностью до сдвига элементом из M" . Мы не скажем ничего в этом труде об этом стратифицированном порядке, за исключением того, что это очень удобное средство в исследовании стабильных групп.

Рассмотрим, например, когерентное кольцо A и теорию T его экзистенциально замкнутых модулей. Если p из $S_1(M)$, то (M, dp) определяется двумя следующими идеалами : $I(p) = \{\alpha : p \vdash \alpha x \in M\}$, $I_0(p) = \{\alpha : p \vdash \alpha x = 0\}$. Множество $I(p)$ определяет фильтр подгрупп типа p, $I_0(p)$ его тип над $\emptyset$. Фундаментальный порядок является следующим: $p \geq q$ если и только, если $I_0(p) = I_0(q)$ и $I(p) \subseteq I(q)$. Так как каждый идеал имеет вид $I(p)$, T суперстабильна если и только, если A нётерово. В этом случае теория T является

$|A|$-стабильной, так как тип определен конечным числом уравнений, соответствующих образующим $I(p)$. В более общих терминах, спектр стабильности модуля M, или точнее его теории, зависит только от его примитивных подгрупп:

Теорема 13.15 *Модуль M суперстабилен если и только, если он не имеет бесконечной убывающей цепи $G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \ldots$ примитивных подгрупп, где каждая G_{n+1} имеет бесконечный индекс в G_n . Если кольцо A счетно, то оно ω-стабильно если и только, если оно не имеет бесконечную строго убывающую последовательность примитивных подгрупп.*

Доказательство. Первое условие равносильно суперстабильности тривиальным образом, так как оно означает, что не существует бесконечной последовательности строго возрастающих фильтров примитивных групп. Если второе условие выполнено, то каждый фильтр F имеет минимальный элемент G и тип p фильтра F определен условием $x \sim a(modG)$ (и $x \not\sim b(modH)$, для всех $H \notin F$!) и мы имеет таким образом стабильность в каждом кардинале λ . Если напротив существует строго убывающая последовательность $G_0 \supset \ldots G_n \supset \ldots$ таких подгрупп, то каждый класс по модулю G_n разделяется по крайней мере на два класса по модулю G_{n+1}, и в некоторой модели T можно найти a_s, индексированные 2^n, $n \in \omega$, и b_σ, индексированные 2^ω , такие, что если s является ограничением σ, то $a_s \sim b_\sigma(modG_n)$ если $\sigma(n) = 1$, в то время как $a_s \not\sim b_\sigma(modG_n)$ если $\sigma(n) = 0$. Имеется таким образом 2^ω типов над счетным множеством a_s.

□

Например, если через Z_p обозначим циклическую группу из p элементов, где p является простым числом, то сумма $Z_p^{(\omega)}$ ω копий Z_p ω-стабильна; ее можно рассматривать действительно как векторное пространство над полем из p элементов, и бесконечное векторное пространство над полем K есть экзистенциально замкнутый K-модуль.

Подгруппа nZ группы Z примитивна, определяется формулой $\exists y(x = ny)$; так как все подгруппы Z имеют вид nZ, это все примитивные подгруппы. Значит группа Z суперстабильна и не ω-стабильна. Имеются два фильтра примитивных групп: один образованный из всех примитивных групп, соответствует реализованным типам, и другой из всех примитивных ненулевых групп, который соответствует нереализованным типам. Так как группа Z^m интерпретируема в Z то она также суперстабильна; мы видим, рассматривая nZ^m, что она не ω-стабильна. Напротив, группа $Z^{(\omega)}$ не суперстабильна.

13.d Исторические и библиографические примечания

Фундаментальный порядок – ключ "парижского подхода к стабильности": [ПУАЗА, 1977] , [ЛАСКАР-ПУАЗА, 1979] . Чтобы успокоить тех кто бы нашел, что автор допустил нескромность называя "фундаментальным" одно из своих понятий, я отмечу, что он был так назван потому, что ранг U Ласкара (глава 17) является рангом фундирования этого фундаментального порядка!

Как только читатель усвоит главы 15, 16 и 17 этого курса, он найдет в [БИКЛЕР, 1986] и [ПУАЗА, 1986] другие сведения о фундаментальных порядках суперстабильных теорий. Спектр стабильности был определен почти исключительно Шелахом: см. [ШЕЛАХ, 1978] , с. 506. Термины "тотально трансцендентная" и "суперстабильная" появились соответственно в [МОРЛИ, 1965] и [ШЕЛАХ, 1969] . Сведение свойств стабильности модулей к присутствию или отсутствию цепей примитивных подгрупп восходит к [ГАРАВАГЛИА, 1979] ; по поводу стратифицированного порядка см. [ПУАЗА, 1981] и [ПУАЗА, 1983b] .