Глава 14

Стабильность и насыщенные модели

Yes, oh yes, Long Distance, I accept the charge, I'll pay
Which loved one is calling me? I didn't hear you say
Both are deep whithin my heart, her Mum and my Marie,
It's so good to hear your voice from Memphis (Tennessee)

C.E.B.

14.a Теорема существования

В общем случае, мы не можем доказать существование насыщенных моделей, т.е. λ-насыщенных моделей мощности λ. Для стабильных теорий ситуация другая . Начнем с замечания: если T стабильна, и $\{\ldots, a_i, \ldots\}$ является неразличимой последовательностью, которая таким образом тотально неразличима и неделима, то для каждого параметра $\bar{b}$, все a_i за исключением не более $|T|$ реализуют средний тип последовательности над $\bar{b}$. Действительно, каждая формула $f(x, \bar{b})$ элиминирует только конечное число этих a_i . Следующая лемма утверждает, что для этого свойства можно заменить $|T|^+$ на $\kappa(T)$.

Лемма 14.1 *Если теория T стабильна, s является неразличимой последовательностью, и $\bar{b}$ n-ка параметров, то число элементов из s, которые не реализуют средний тип s над $\bar{b}$ строго меньше $\kappa(T)$.*

Доказательство. Мы знаем по теореме 12.33 , что последовательность $s = \{a_0, \ldots, a_\alpha, \ldots\}$ имеет тот же тип над $\emptyset$, что и некоторая последовательность Морли. Следовательно, существуют возрастающая последовательность M_α , моделей и тип p над M_0 такие, что a_α реализует в $M_{\alpha+1}$ наследник p над M_α . Пусть q_α тип $\bar{b}$ над M_α. Если тип a_α , над $M_0 \cup \{\bar{b}\}$ не является наследником p, то тип a_α над $M_\alpha \cup \{\bar{b}\}$ также не является таким. Так как тип a_α над M_α является напротив наследником p , то тип a_α над $Ma_\alpha \cup \{\bar{b}\}$ не наследует свое ограничение над M_α . По симметрии, тип $\bar{b}$ над $M_\alpha \cup \{a_\alpha\}$ не наследует свое ограничение над M_α и $q_{\alpha+1}$ не является наследником q_α . Так как по лемме 13.12 $\kappa_n(T) = \kappa(T)$, то это произойдет меньше чем $\kappa(T)$ раз.

□

Теорема 14.2 *Если теория T стабильна в λ , то она имеет насыщенную модель мощности λ .*

Доказательство. По теореме о спектре стабильности 13.11, так как T стабильна в λ , то $\lambda \geq \lambda_0(T)$ и $cof(\lambda) \geq \kappa(T)$. Действительно, по лемме Кёнига, $\lambda^{cof(\lambda)}$ строго больше λ . По лемме 13.10, мы знаем, что T имеет модель M_0 мощности λ . Так как T стабильна в λ , то имеется только λ типов над этой моделью, и вновь по лемме 13.10, мы можем реализовать их всех в некотором расширении M_1 модели M_0 мощности λ . Повторяя эту процедуру λ раз, мы конструируем возрастающую последовательность моделей нашей теории M_α , $\alpha < \lambda$, которые имеют мощность λ, причем $M_{\alpha+1}$ реализует все типы из $S_1(M_\alpha)$.

Я утверждаю, что модель M , которая является пределом всех M_α и имеет мощность $\lambda \times \lambda = \lambda$ насыщенна. Действительно, пусть A подмножество M мощности $\mu < \lambda$ и p тип над A. Надо показать, что p реализуется в M . Пусть q произвольный сын p над M и q_α ограничение q на M_α . В фундаментальном порядке, имеем $q_0 \geq q_1 \geq \cdots \geq q_\alpha \geq \ldots$, и так как в нем не существует строго убывающей последовательности ординалов конфинальной λ , то это означает, что начиная с некоторого индекса α все q_β , $\beta \geq \alpha$ эквивалентны q_α. Таким образом, эти q_β , точно так же как их предел q , являются наследниками p .

Число таких $\beta > \alpha$ очевидно равно λ так, что M содержит копию $s = \{a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, \ldots, a_{\alpha+\beta}, \ldots\}$ λ-последовательности Морли типа q_α и q не что иное, как средний тип этой последовательности над M. Таким образом, p является средним типом s над A .

Если $\lambda > \kappa(T)$, то по лемме 14.1, все элементы этой последовательности, за исключением не более $\mu \times \kappa(T) < \lambda$, реализуют p . А если $\lambda = \kappa(T)$, то $cof(\lambda) = \kappa(T)$ и λ регулярен. Но если λ регулярен, то можно не ломать голову, так как A содержится в M_α , для некоторого достаточно большого α .

□

14.b Теоремы несуществования

Теорема 14.3 *Нестабильная теория не имеет насыщенной модели сингулярной мощности.*

Доказательство. Предположим напротив, что T нестабильна и имеет насыщенную модель M сингулярной мощности λ . Тогда можно представить M в виде $\bigcup_{\alpha<cof(\lambda)} A_\alpha$, где A_α составляют возрастающую последовательность подмножеств M , каждое из которых имеет мощность строго меньше λ , индексированную $cof(\lambda)$.

Нестабильный тип имеет сколько угодно нестабильных сыновей. Возьмите, например, наследников его некоторого неопределимого сына. Следовательно, он имеет нестабильного сына, который не является ни одним из его конаследников. Если T нестабильна, то можно таким образом строить ординальную последовательность типов произвольной длины $p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_\alpha \subset \ldots$ такую, что $p_{\alpha+1}$ не конаследник p_α . Подобный факт ложен для наследников: если T теория дискретных порядков без концевых точек, то все нереализованные сыновья нереализованного типа являются наследниками.

Тогда существует возрастающая последовательность моделей $N_0 \prec N_1 \prec \cdots \prec N_\alpha \prec \ldots$, $\alpha < cof(\lambda)$, с пределом N , и тип $p \in S_1(N)$, ограничение на N_α которого мы обозначим p_α , такие, что для всех α тип $p_{\alpha+1}$ не конаследник p_α . Существует формула $f_\alpha(x, \bar{a}_\alpha)$ с параметрами из $N_{\alpha+1}$, которая принадлежит p и не удовлетворяется никаким элементом N_α . Можно предполагать, что язык теории T счетен: если это не так, то мы можем сделать ограничение на счетный подъязык, сохраняя формулу, имеющую свойство дихотомии, чтобы обеспечить нестабильность. Действительно, модель, насыщенная для T , остается таковой после ее обеднения.

Если теория T счетна, тогда мы можем заменить каждую модель N_α на одно из ее элементарных ограничений, содержащих все $\bar{a}_\beta$, $\beta < \alpha$, которое по теореме Левенгейма-Сколема может быть взято мощности $\max(|\alpha|, \omega)$. В этих условиях, мощность N будет равна $cof(\lambda)$, что строго меньше λ . Мы предполагаем также, что если α пределен, то N_α предел моделей N_β , $\beta < \alpha$.

Так как M λ-насыщенна и $|N_0| < \lambda$, то в ней реализуется тип N_0 над $\emptyset$, мы можем считать, что он содержит N_0 . Тип N_1 над N_0 имеет наследника над $N_0 \cup A_0$, которого мы реализуем в M и на этот раз вкладываем N_1 в M. Продолжая этот процесс, на этапе α N_α уже вложена в M и реализуем в M наследника над $N_\alpha \cup A_\alpha$ типа $N_{\alpha+1}$ над N_α . Это всегда возможно, так как $|N_\alpha \cup A_\alpha| < \lambda$ и рассматриваемый тип имеет меньше λ переменных.

Когда процесс закончится, мы в итоге получаем копию последовательности N_α в M такую, что для всех α тип $N_{\alpha+1}$ над $N_\alpha \cup A_\alpha$ наследник своего ограничения на N_α , то есть тип A_α над $N_{\alpha+1}$ конаследник своего ограничения на N_α . Следовательно, каждый элемент A_α имеет тип над $N_{\alpha+1}$, который конаследует свое ограничение на N_α и не может реализовать p . Значит p опускается в M , что является противоречием.

□

Теорема 14.4 *Если T стабильна, λ сингулярен и $cof(\lambda) < \kappa(T)$, то T не имеет насыщенную модель мощности λ .*

Доказательство почти то же самое, что и в предыдущей теореме. Допустим, что M насыщенная модель мощности λ . По предположению теоремы в фундаментальном порядке существует убывающая последовательность, индексированная $cof(\lambda)$. Тогда можно найти последовательность моделей $N_0 \prec \cdots \prec N_\alpha \prec \ldots$, $\alpha < cof(\lambda)$ и тип p над $N = \cup N_\alpha$ с ограничениями p_α над N_α такие, что для всех α тип $p_{\alpha+1}$ не наследник (равносильно, не конаследник) p_α . Можно предполагать, что $|T| = cof(\lambda)$, заменяя T одним из ее ограничений этой мощности, сохраняя необходимые формулы для существования последовательности p_α . В этом последнем случае, можно предполагать, что $|N| = cof(\lambda)$ и завершить доказательство как в 14.3.

□

Если предполагать обобщенную континуум-гипотезу, то $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ если и только если $\kappa \leq cof(\lambda)$. В этом случае мы видим, объединяя 14.2, 14.4 и 13.11, что если T стабильна и $\lambda \geq \lambda_0(T)$, то T имеет насыщенную модель мощности λ тогда и только тогда, когда T стабильна в λ . Немного поработав, мы убеждаемся, что можем обойтись без континуум-гипотезы.

Теорема 14.5 *Если T стабильна и $\lambda \geq \lambda_0(T)$, то T стабильна в λ если и только, если T имеет насыщенную модель мощности λ .*

Доказательство. Одно направление доказано в теореме 14.2. Обратно предположим, что T имеет насыщенную модель мощности $\lambda \geq \lambda_0(T)$. Нам нужно доказать что T стабильна в λ . Это ясно если T суперстабильна, или если $\lambda = \lambda_0(T)$. Предположим тогда, что $\lambda > \lambda_0(T)$, и $\kappa(T) > \omega$. По теореме 14.4 $cof(\lambda) \geq \kappa(T)$.

Заметим, что из λ-насыщенности M и неравенств $\lambda > \lambda_0(T) \geq \kappa(T)$ следует, что каждый тип над M является средним типом неразличимой ω-последовательности элементов из M (на самом деле, как мы увидим в главе 16, для этого достаточно условие $\lambda \geq \kappa(T)$). Действительно, как в доказательстве теоремы 13.11, каждому отображению s ординала α в M , где $\alpha < \kappa(T)$, мы можем сопоставить элементарное ограничение M_s модели M мощности $\max(|\alpha|, \lambda_0(T))$ так, чтобы M_t было расширением M_s , если t является продолжением s . В этих условиях, так как в фундаментальным порядке теории T не существует убывающей ординальной последовательности, индексированной $\kappa(T)$, каждый тип p из $S_1(M)$ должен быть наследником своего ограничения p_s на M_s , для некоторого s . Так как $|M_s| < \lambda$, M содержит копию ω-последовательности Морли p_s , средний тип которой есть p .

Тогда существует не более λ_ω типов над M . Действительно, так как любое множество параметров мощности не большей λ вкладывается в M , если мы предположим, что T нестабильна в λ , то необходимо чтобы $\lambda_\omega > \lambda$. Так как ω не конфинален в λ , отображение ω в λ имеет ограниченный образ: это отображение ω в $\alpha < \lambda$. Следовательно $\lambda_\omega = \sum_{\alpha<\lambda} \alpha^\omega$. Таким образом, необходимо чтобы для некоторого $\mu < \lambda$ выполнялось $\mu_\omega > \lambda$, иначе будем иметь $\lambda_\omega \leq \lambda \times \lambda = \lambda$. Поскольку $\mu^n = \mu$ для $n \in \omega$ и в фундаментальном порядке существует убывающая ω-последовательность, то мы видим, что существует множество параметров A мощности μ такое, что $S_1(A)$ содержит по крайней мере μ_ω типов (см. доказательство леммы 13.9). Но тип A над $\emptyset$ реализуется в M , можно считать что оно подмножество модели M , в которой может реализоваться только λ типов над A . Значит M не насыщена, противоречие.

□

Позднее мы увидим в теореме 16.10, что можно легко улучшить эту теорему, уточняя то что произойдет между $\lambda_0(T)$ и $\kappa(T)$. Заметим, что теорема 14.4 утверждает, что если T имеет насыщенную модель мощности $\lambda \leq \kappa(T)$, то этот кардинал регулярен.

14.c Блестящие модели

Начнем со следующей леммы являющейся уточнением результата, который нам только, что послужил в доказательстве теоремы 14.5. Эта лемма временная, так как мы увидим разделе 16.c, что результат остается в силе при единственном предположении $\kappa(T)$-насыщенности, если T не суперстабильна.

Лемма 14.6 *Если T стабильна и $\lambda > |T|$ или $\lambda > \lambda_0(T)$, то каждый тип p над λ-насыщенной моделью M теории T является средним типом бесконечной неразличимой последовательности элементов M .*

Доказательство. Также как в теореме14.5, мы построим модели M_s так, чтобы каждая модель M_s была мощности строго меньшей λ и p является наследником своего ограничения p_s на некоторую M_s и модель M содержит копию последовательности Морли типа p_s . Это можно сделать по теореме Левенгейма, если $\lambda > |T|$, и по лемме 13.10 если $\lambda > \lambda_0(T)$.

□

Следующая теорема указывает на то, что блестящие модели стабильной теории имеют тенденцию быть насыщенными. Мы улучшим эту теорему в 16.c, заменяя гипотезу $|T|^+$ или $\lambda_0(T)^+$-насыщенности на $\kappa(T)$-насыщенность.

Теорема 14.7 *Если теория T стабильна, то ω_1-блестящая модель T , являющаяся $|T|^+$ или $\lambda_0(T)^+$-насыщенной, насыщенна.*

Доказательство. Пусть M модель из условия теоремы мощности λ , A подмножество M мощности $\mu < \lambda$, и p тип над A . Нам нужно доказать, что он реализуется в M . Пусть q сын p над M . Так как модель M достаточно насыщенна, q является средним типом над M некоторой неразличимой последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ элементов M . Теперь я утверждаю, что так как M ω_1-блестящая, то это неразличимое множество может быть продолжено в M до неразличимого множества мощности λ . Действительно, добавляем к языку символ унарного отношения $R(x)$ и символ унарной функции $f(x)$ и рассмотрим аксиомы, выражающие, что f является биекцией между моделью и ее элементами, удовлетворяющими R , а также следующие аксиомы, выражающие, что R является неразличимым множеством, продолжающим последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \{ \bigwedge\!\!\!\bigwedge R(x_i) \wedge \bigwedge\!\!\!\bigwedge x_i \neq x_j \rightarrow$$

$$\rightarrow [\varphi(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n})]\}$$

для всех формул $\varphi(\bar{y}, \bar{x})$ языка модели M.

Это множество предложений использует только ω параметров из модели M и оно совместно. Для проверки этого нужно рассмотреть насыщенное элементарное расширение M. Из-за ω_1-великолепия M , оно реализуется в M . Все элементы этого неразличимого множества мощности λ реализуют тип p , за исключением не более $\mu \times \kappa(T) < \lambda$.

□

Лемма 14.8 *Пусть T полная теория, λ бесконечный кардинал и $M_0 \prec M_1 \prec \cdots \prec M_\alpha \prec \ldots$, $\alpha < \lambda$ возрастающая последовательность, индексированная λ моделей T , являющихся λ-насыщенными мощности λ (они, таким образом, все изоморфны). Тогда предельная модель M также является насыщенной моделью мощности λ .*

Доказательство вкратце. Пусть $A \subset M$, $|A| = \mu < \lambda$, и p тип над A . Мы должны доказать, что он реализуется в M . Заметим, что это очевидно, если λ регулярен, так как тогда A содержится в одной из M_α . Предположим тогда, что λ сингулярен. По теореме 14.3, так как T имеет насыщенную модель мощности λ, отсюда следует, что T является стабильной по , и по теореме 14.4 справедливы неравенства $\lambda > cof(\lambda) \geq \kappa(T)$. Пусть q какой-нибудь сын p над M . Тогда необходимо, чтобы для некоторого α q был наследником своего ограничения q_α на M_α , так как иначе будем иметь в фундаментальном порядке T убывающую последовательность длины $\kappa(T)$.

Мы делаем тогда предположение, что $\lambda > |T|$ или $\lambda > \lambda_0(T)$. В этих условиях, q_α является средним типом неразличимого множества мощности λ , образованного из элементов M_α . Все эти элементы, за исключением не более $\mu \times \kappa(T)$, реализуют тип p . ВРЕМЕННЫЙ КОНЕЦ

□

Чтобы получить полное доказательство леммы 14.8 нам надо ждать окончательную версию леммы 14.6.

14.d Достаточно насыщенные расширения данной модели

Теорема 14.9 *Пусть T теория модулей, и $\lambda > |T|$. Тогда каждая модель T , являющаяся $|T|^+$-насыщенным элементарным расширением λ-насыщенной модели, сама λ-насыщенна. Если кроме того T суперстабильна, то каждое расширение λ-насыщенной модели T само λ-насыщенно.*

Доказательство. Пусть M_0 λ-насыщенная модель T и N элементарное расширение M_0 , которое $|T|^+$-насыщенно в несуперстабильном случае. Пусть также M элементарное ограничение модели N мощности строго меньшей λ , и p тип над M . Нам нужно доказать, что он реализуется в N . Как известно из разделов 6.e и 13.c с p связан фильтр F примитивных подгрупп, и элемент a_G из M для каждого $G \in F$. Тип p аксиоматизируется следующими формулами: $x \sim a_G(\mod G)$ для $G \in F$, $x \not\sim b(\mod H)$ для $b \in M$, $H \notin F$.

Если N $|T|^+$-насыщенна, то существует a в N , который удовлетворяет всем конгруэнциям $a \sim a_G$ по-модулю G. В суперстабильном случае, эта гипотеза $|T|^+$-насыщенности не нужна, так как существует подгруппа G_0 в F такая, что для каждого G из F группа $G \cap G_0$ имеет конечный индекс в G_0. Все классы $G_0/G \cap G_0$ имеют представителей в модели M_0 , и так как эта последняя λ-насыщенна, то каждое совместное сочетание классов по модулю G из F для элемента G_0 реализуется в M_0 . Таким образом, существует элемент b из M_0 такой, что $a = a_{G_0} + b$ удовлетворяет все $a \sim a_G(\mod G)$.

Я теперь утверждаю, что модель M_0 содержит λ точек b_i , которые принадлежат каждой G из F и которые попарно не конгруэнтны по модулю любой примитивной подгруппы H вне F . Действительно, этому соответствует совместное множество формул, так как, по лемме Б.Х. Неймана 6.25, пересечение конечного числа подгрупп G_i не может быть покрыто конечным числом классов по модулю H_j . Следовательно, данную формулу $x \not\sim b(\mod H)$ удовлетворяют все $a + b_i$ за исключением не более одного. Так как существует по крайней мере λ формул, которые надо удовлетворить, то остается элемент $a + b_i$, реализующий тип p .

□

Таким образом мы видим, что суперстабильный модуль λ-насыщен как только он имеет элементарное λ-насыщенное ограничение. Это свойство было названо Шелахом *немногомерностью.* Мы его назовем более просто *размерностностью*, так как оно действительно означает, что каждая достаточно насыщенная модель теории T ($|T|^+$- насыщенности вполне хватает) определена заданием некоторого фиксированного числа кардиналов, которые называются ее размерностями. Мы увидим все это в главе 20. Это свойство влечет суперстабильность:

Теорема 14.10 *Если теория T не суперстабильна, то каждая модель T имеет элементарное расширение, которое не ω_1-насыщенно. Более точно, если T нестабильна, или T стабильна и $\lambda < \kappa(T)$, то каждая модель T имеет $cof(\lambda)$-блестящее, но не λ^+-насыщенное расширение.*

Доказательство. Мы располагаем таким образом последовательностью $M_0 \prec M_1 \prec \cdots \prec M_\alpha \prec \ldots$ моделей T , $\alpha < \lambda$, с типом p над $\cup M_\alpha$, чье ограничение на $M_{\alpha+1}$ не конаследует ограничение на M_α , для всех α . Пусть $A \subset \cup M_\alpha$, $|A| = \lambda$, множество, содержащее для каждого α кортеж $\bar{a}_\alpha$ из $M_{\alpha+1}$, мешающий этому конаследованию.

Пусть N_0 какая-нибудь модель из T . Мы реализуем в некотором элементарном расширении N_1 модели N_0 , тип M_0 над $\emptyset$ интерпретировав M_0 таким образом в N_1 , мы реализуем в расширении N_2 модели N_1 наследник над N_1 типа M_1 над M_0 и итерируем процесс λ раз. В итоге получаем модель $N = N_\lambda$, содержащую копию последовательности M_α такую, что тип $M_{\alpha+1}$ над $N_{\alpha+1}$ наследует свое ограничение над M_α , которое вложено в $N_{\alpha+1}$, такую, что тип $N_{\alpha+1}$ над $M_{\alpha+1}$ конаследует свое ограничение M_α . Модель N не λ^+-насыщенна, так как она опускает ограничение p на A . И так как мы ничего не требуем от N_α , за исключением реализации чего-либо, конструкция может быть комбинирована со способом насыщения шаг за шагом, как в доказательстве теоремы 9.12, и это гарантирует, что предельная модель N $cof(\lambda)$-блестяща.

□

Мы видим в частности, что в случае нестабильной теории λ-великолепие не может никогда повлечь насыщение. В крайнем случае нестабильности, тот же тип аргументации позволяет легко построить большое количество достаточно насыщенных моделей данной мощности. Напомним, что если $\lambda \geq |T|$, то T имеет с точностью до изоморфизма 2^λ моделей мощности λ .

Теорема 14.11 *Рассмотрим теорию T со свойством независимости и кардинал $\lambda \geq |T|$, имеющий вид $\lambda = 2^\kappa$. Если даны модель M теории T мощности не более λ и регулярный кардинал μ , $\mu \leq \kappa$, тогда T имеет 2^λ попарно не изоморфных моделей мощности λ , которые, более того, μ-блестящие, но не μ^+-насыщенные, и все являются элементарными расширениями M .*

Доказательство. Пусть формула $f(x, \bar{y})$, имеет свойство независимости. Если U является ультрафильтром над κ , то мы говорим, что последовательность $a_0, \ldots, a_i, \ldots, a_\kappa, a_{\kappa+1}, \ldots, a_{\kappa+n}, \ldots$ длины $\kappa + \omega$ из некоторой модели N теории T кодирует U в N , если выполняются два следующих условия:

– для каждого подмножества w из κ , существует $\bar{b}_w$ в N такой, что если $i < \kappa$, то $N \vdash f(a_i, \bar{b}_w)$ если и только, если $i \in w$

– для каждой формулы $g(x, \bar{c})$ с параметрами $\bar{c}$ из N существует натуральное m такое, что для всех $n > m$ формула $g(a_{\kappa+n}, \bar{c})$ истинна если и только, если множество $\{i < \kappa \ : \ N \vdash g(a_i, \bar{c})\}$ принадлежит ультрафильтру U .

Отметим, что вследствие существования $\bar{b}_w$, одна последовательность может кодировать только один ультрафильтр. Для каждого ультрафильтра U , построим следующим образом модель N_U , в которой он кодируется : рассмотрим модель N_0 мощности $\lambda = 2^\kappa$, которая содержит M и a_i , и $\bar{b}_w$, $w \subset \kappa$ такую, что $N \vdash f(a_i, \bar{b}_w)$ тогда и только тогда $i \in w$. Рассмотрим тип p_U над N_0 , соответствующий ультрафильтру U , то есть множество формул с параметрами из N_0 , истинных почти для всех $a_{\kappa+1}$ по модулю U . Реализуем элементом a_κ этот тип в модели $N_1 \succ N_0$ мощности λ , затем мы реализуем элементом $a_{\kappa+1}$ в расширении N_2 модели N_1 мощности λ , предельный тип U над N , и повторяем это ω раз.

Так как ничего не требовалось от N_n за исключением того, чтобы она реализовала что-то и имела не слишком большую мощность, то мы можем сочетать ее построение со способом насыщения на каждом этапе, который будет гарантировать, что их предел N_U будет ω-блестящим. Эта предельная модель N_U не может быть ω_1-насыщенной. Действительно, так как $a_\kappa, a_{\kappa+1}, \ldots, a_{\kappa+n}, \ldots$ является последовательностью Морли конаследника, то его тип конечно выполним на a_i , $i < \kappa$. Следовательно, множество формул, $f(a_{k+2n}, \bar{y}), \neg f(a_{k+2n+1}, \bar{y})$ составляет (неполный) совместный тип, который опускается в N_U .

Остается понять, что среди моделей N_U имеется 2^λ не изоморфных. Одна $(\kappa + \omega)$-последовательность может закодировать только один ультрафильтр. Так как $\lambda^{k+\omega} = \lambda^k = (2^k)^k = \lambda$, то модель мощности $\lambda = 2^\kappa$ может закодировать самое большее только λ ультрафильтров. Заключение следует из того, что имеются $2^\lambda = 2^{(2^\kappa)}$ ультрафильтров из подмножеств κ . Мы обсудили случай $\mu = \omega$. В общем случае, кодируют ультрафильтры последовательностями длины $\kappa + \mu$.

□

Ограничение $\lambda = 2^\kappa$ является большой слабостью этой теоремы; но в чем действительно ее сила, так это в её гибкости и простоте: модели, которые конструируются, не насыщенны просто потому, что они что-то реализуют! И единственный аргумент, делающий необходимым ограничение мощности в 2^κ , позволяющее построить много моделей, это теорема Левенгейма-Сколема.

Напомним, что Шелах показал, что каждая несуперстабильная теория T имеет 2^λ моделей в каждой мощности $\lambda > |T|$. Кроме того, если T нестабильна и мощность μ достаточно мала относительно λ , то она имеет 2^λ μ-насыщенных моделей мощности λ . Его метод, особенно в стабильном, но в несуперстабильном случае, очевидно гораздо сложнее. Он строит что-то вроде простых моделей над множеством, над "скелетом" (например, в нестабильном случае, скелетом будет неразличимая, но не тотально неразличимая цепь) так, чтобы можно было восстановить достаточный список свойств скелета из модели, которая его обволакивает, чтобы модели, соответствующие очень разным скелетам не были изоморфны. Мы не рассматриваем в этом труде эту теорему, хотя и очень важную. Причина в том, что я не смог представить доказательство с каким-либо чувствительным упрощением или с некоторой оригинальностью так, что читатель, когда закончит главу 18, может непосредственно перейти к чтению произведений Шелаха.

14.e Исторические и библиографические примечания

Теорема 14.2 существования насыщенных моделей для стабильной теории принадлежит Виктору Харнику [ХАРНИК, 1975] ; теоремы несуществования Шелаху, [ШЕЛАХ, 1978] , с. 423, так же как и любопытная лемма 14.8 о цепях насыщенных моделей, [ШЕЛАХ, 1978] , с. 8, заключение 1 – 13, где она используется для того, чтобы доказать великолепие насыщенной модели. Именно

Стивен Биклер отметил, что блестящие модели стабильной теории имеют тенденцию к насыщению [БИКЛЕР, 1984] . Материал раздела 14.d содержится в [ПУАЗА, 1983d] . О числе моделей нестабильной теории консультируйтесь после прочтения главы 18 у [ШЕЛАХ, 1971] , которая еще достаточно понятна. В несуперстабильном случае, требующем больше мужества консультируйся в книге [ШЕЛАХ, 1978], глава VIII.