Глава 18

Стабильность и простые модели

I talk to the young folks,
They don't understand
The things this old man has to say
Oh I wish I was eighteen again

J.L.L.

18.a Теорема единственности

Предложение 18.1 *Если теория T стабильна и $k(T) \leq \omega_1$, то для каждого множества A параметров, если B конструируемо над A, тогда каждое подмножество B, содержащее A, также конструируемо над A.*

Доказательство. Пусть $\{a_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ – конструкция B над A; мы знаем, что ей соответствует понятие замыкания (см. 10.d); для данного подмножества C в B, содержащего A, определим индукцией по α, возрастающую последовательность B_α подмножеств B, содержащих A и таких, что:

– B_α замкнуто и содержит a_β для $\beta < \alpha$,

– тип B_α над C не ответвляется над $C_\alpha =^{def} B_\alpha \cap C$,

– $C_{\alpha+1} - C_\alpha$ счетна для каждого α.

Для этого, полагаем $B_0 = A$ и на предельных шагах $B_\alpha = \cup B_\beta$ для $\beta < \alpha$; условие неотклонения удовлетворяется, так как для каждого кортежа $\bar{b}$ из B_α тип $\bar{b}$ над C не отклоняется над C_α.

Определим теперь $B_{\alpha+1}$, предполагая, что B_α уже определено. Так как $k(T) \leq \omega_1$, то можно найти счетное подмножество D^1 в C, такое, что тип a_α над $B_\alpha \cup C$ не отклоняется над $B_\alpha \cup D^1$. Я полагаю $B^1_\alpha = B_\alpha \cup \{a_\alpha\} \cup D^1$. Тип B_α над C не отклоняется над $C_\alpha \cup D^1$; тип a_α над $B_\alpha \cup C$ не отклоняется над $C_\alpha \cup D^1 \cup B_\alpha$; таким образом, тип $B_\alpha \cup \{a_\alpha\}$ над C не отклоняется над $C_\alpha \cup D^1$, и даже тип $B_\alpha \cup \{a_\alpha\} \cup D^1$ над C не отклоняется над $C_\alpha \cup D^1$. Полагая $C^1_\alpha = B^1_\alpha \cap C$, мы видим, что тип B^1_α над C не отклоняется над C^1_α.

Проблема в том, что B^1_α не замкнуто; но, так как оно получено добавлением счетного числа точек к B_α, которое замкнуто, чтобы его замкнуть, достаточно к нему добавить счетное число маленькие пакетов, другими словами ω-кортеж A^2; затем добавляем ω-кортеж D^2 элементов C, такой, что тип A^2 над $B^1_\alpha \cup C$ не отклоняется над $B^1_\alpha \cup D^2$: получаем таким образом B^2_α, которое уже не замкнуто, но тип которого над C не отклоняется над $C^2_\alpha = B^2_\alpha \cap C$; повторяем так ω раз: полагаем $B_{\alpha+1} = \cup B^n_\alpha$, которое отвечает всем требуемым условиям.

После этого, заметим, что $B = \cup B_\alpha$, $C = \cup C_\alpha$. Теперь я утверждаю, что для каждого α множество C атомно над C_α. Действительно, пусть $\bar{c}$ из C. Так как B_α замкнуто, тип $\bar{c}$ над B_α изолирован; тип B_α над C не отклоняется над C_α. Таким образом, тип B_α над $C_\alpha \cup \{\bar{c}\}$ не отклоняется над C_α и, по симметрии, тип $\bar{c}$ над B_α не отклоняется над C_α. По теореме об открытом отображении (16.17 и 16.18) тип $\bar{c}$ над C_α также изолирован.

Теперь ясно, что мы получаем конструкцию C, располагая одну за другой нумерации типа ω множеств $C_{\alpha+1} - C_\alpha$.

□

Следствие 18.2 *Если A является множеством параметров стабильной теории T с $k(T) \leq \omega_1$ (например, если T счетна или суперстабильна) , и если существует конструируемая модель над A, то с точностью до изоморфизма, она будет единственной простой моделью над A.*

Доказательство. Пусть M – конструируемая модель над A; если N – простая над A, то она элементарно вкладывается в M и по 18.1 она конструируема над A: результат следует из единственности конструируемой модели (теорема 10.18) .

□

Самая простая из теорий T с $k(T) > \omega_1$, а именно та, что состоит из ω_1 вложенных отношений эквивалентности, представляет контрпример к 18.12 . Язык T включает символ бинарного отношения E_α для каждого счетного ординала α; ее аксиомы говорят, что каждое E_α – отношение эквивалентности с бесконечным числом бесконечных классов и E_β – более тонкая эквивалентность чем E_α для $\alpha < \beta$, и каждый класс по модулю E_α разбивается на бесконечное число классов по модулю E_β.

Если мы назовем расстоянием между двумя различными элементами a и b модели M теории T наименьший ординал α, такой, что a и b не конгруэнтны по модулю E_α, то мы видим, что модель T – это то же самое, что богатое I-значное ультраметрическое пространство, где I – обращение цепи $\omega_1 + 2$ (минимум соответствует нулевому расстоянию). Результат следует из существования I-значного конструируемого пространства, которое не является единственным простым I-значным пространством (лемма 10.21, теорема 10.26).

18.b Простые модели тотально трансцендентной теории

Если теория T тотально трансцендентна, то по 17.16 для любого A существует простая модель над A, которая единственна по 18.2. Поэтому теорема 18.5, приводимая ниже, в этом случае является в действительности вторым доказательством единственности простой модели.

Лемма 18.3 (**T тотально трансцендентна.**) *Простая модель над A не содержит несчетного неразличимого множества над A.*

Доказательство. Рассмотрим неразличимую над A последовательность длины ω_1 элементов $\{a_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ в этой модели M. Как обычно, обозначим через p_α тип a_α над $A_\alpha = A \cup \{a_\beta\}_{\beta<\alpha}$: по суперстабильности $p_{\alpha+1}$ может быть отклоняющимся расширением p_α только конечное число раз и, так как последовательность неразличима, существует натуральное n, такое, что начиная с p_n следующие типы больше не отклоняются. Так как последовательность a_α , $\alpha \geq n$ неразличима над $A \cup \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, то все эти a_α конгруэнтны по модулю каждого определимого отношения конечной эквивалентности с параметрами из этого множества. Следовательно, p_{n+1} – стационарный тип и последовательность $\{a_\alpha\}_{\alpha\geq n+1}$ является последовательностью Морли типа p_{n+1} над $A \cup \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$. Таким образом, мы видим, что добавив конечное множество $\bar{a}$ к A (известно, что при этом M остается простой над $A \cup \{\bar{a}\}$), можно предполагать, что наше множество – неразличимая последовательность Морли s длины ω_1 стационарного типа p над A.

Начнем построение модели с ω первых элементов s : $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ (речь идет, конечно, об атомной последовательности), и далее будем продолжать до тех пор, пока не останется изолированных типов для реализации; в конце мы получим модель M_1 , A-изоморфную M. Тогда M_1 атомна над $A \cup \{a_0, \ldots, a_n, \ldots\}$ по построению и она опускает тип p_ω , который будучи конечно выполнимым в последовательности $a_0, \ldots, a_n, \ldots$, не изолирован. Следовательно, в M_1 это множество $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ является максимальным неразличимым множеством над A.

Так как M_1 и M являются A-изоморфными, существует счетная последовательность t, которая является максимальной реализацией в M последовательности Морли p. Однако мы знаем, что конечное множество $\bar{b}$ параметров может заставить отклоняться только конечное число элементов независимого множества: если $tp(a_\alpha/A \cup \{\bar{b}\})$ отклоняется над A, то $tp(a_\alpha/A \cup \{\bar{b}\} \cup \{a_\beta\}_{\beta<\alpha})$ отклоняется над $A \cup \{a_\beta\}_{\beta<\alpha}$, по симметрии $tp(\bar{b}/A \cup \{a_\beta\}_{\beta\leq\alpha})$ отклоняется над $A \cup \{a_\beta\}_{\beta<\alpha}$, и это произойдет только конечное число раз из-за суперстабильности типа $\bar{b}$ над A. Таким образом, все элементы s, за исключением счетного числа, реализуют над $A \cup t$ неотклоняющегося сына p. Это опровергает свойство максимальности t.

□

Если A и B – два подмножества модели M теории T, то говорим что B является *A-нормальным*, если каждый раз, когда b в B, каждый элемент b' из M, имеющий тот же тип над A, что и b, также принадлежит B; в частности, это верно для подмножества M, определенного формулой с параметрами из A.

Лемма 18.4 (**T тотально трансцендентна**) *Если M атомна над A, и B является A-нормальным подмножеством M, тогда M атомна над B.*

Доказательство. Пусть $\bar{c}$ лежит в M и $f(\bar{x}, \bar{b})$ – формула с параметрами из $B \cup A$, выполняющаяся $\bar{c}$ и имеющая минимальные ранг Морли и степень Морли. Если $RM(tp(\bar{c}/B \cup A)) = \alpha$, то $tp(\bar{c}/B \cup A)$ – единственный тип над $B \cup A$ ранга Морли, большего или равного α, удовлетворяющий $f(\bar{x}, \bar{b})$.

Тип $\bar{b}^\frown\bar{c}$ над A изолирован некоторой формулой $g(\bar{c}, \bar{b})$ с параметрами из A. Я утверждаю, что формула $g(\bar{x}, \bar{b})$ изолирует тип $\bar{c}$ над $B \cup A$. В противном случае в любой модели, содержащей $B \cup A$, и, в частности, в M можно найти кортеж $\bar{c}_1$, удовлетворяющий этой формуле, но имеющий тип над $B \cup A$, отличный от типа $\bar{c}$; $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$ имеют один и тот же тип над $A \cup \{\bar{b}\}$, тип $\bar{c}_1$ над $B \cup A$ отклоняется над $A \cup \{\bar{b}\}$ и это происходит из-за формулы $h(\bar{x}, \bar{d}, \bar{b})$ с параметрами из $A \cup B$, про которую можно предполагать, что она достаточно сильна, чтобы изолировать тип $\bar{d}$ над $A \cup \{\bar{b}\}$.

Но так как $\bar{c}$ и $\bar{c}_1$ имеют один и тот же тип над $A \cup \{\bar{b}\}$, $\bar{c}$ удовлетворяет формуле $(\exists\bar{y})h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{b})$ и в M существует $\bar{d}_1$, удовлетворяющий $h(\bar{c}, \bar{d}_1, \bar{b})$; так как B нормально, $\bar{d}_1$ лежит обязательно в B; и так как $\bar{d}_1$ имеет тот же тип, что $\bar{d}$, над $A \cup \{\bar{b}\}$, то эта формула заставляет отклоняться тип $\bar{c}$: противоречие.

□

Теорема 18.5 *Если теория T тотально трансцендентна, то простая модель над A является единственной атомной моделью над A, не содержащей несчетного неразличимого множества над A.*

Доказательство. Мы уже поняли, что простая модель обладает этими свойствами. Рассмотрим модель M, атомную над A и без несчетного неразличимого множества. Покажем, что M конструируема над A; предварительно надо отметить, что если $A \subset B \subset M$ и нам удалось построить B, и *если M атомна над B*, тогда она удовлетворяет тем же гипотезам относительно B, а именно, быть атомной и не иметь несчетного неразличимого множества над B.

Покажем индукцией по рангу Морли α формулы $f(x, \bar{a})$ с параметрами $\bar{a}$ из A, что можно построить множество f^M элементов M, удовлетворяющих этой формуле; мы построим полностью нашу модель, когда дойдем до формулы $x = x$. Таким образом, предположим, что при гипотезах теоремы, умеем строить множества, определенные формулой ранга Морли, строго меньшего α.

Если формула $f(x, \bar{a})$ имеет степень Морли 1, то она удовлетворяется единственным стационарным типом с RM, равным α, для которого построим в M максимальную последовательность Морли: реализуем p, если возможно элементом a_0; затем элементом a_1, если это возможно, наследник p, и т.д. Продолжаем так, пока это возможно. По гипотезе эта последовательность Морли счетна, и можно ее перенумеровать $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ В общем случае, делаем эту же конструкцию для каждого из сильных типов, расширяющих типы над A, удовлетворяющих эту формулу и имеющих ранг $RM = \alpha$: их число является степенью Морли формулы $f(x, \bar{a})$, и мы получаем таким образом конечное множество неразличимых конечных (возможно пустых!) или счетных последовательностей. Обозначим через $\bar{a}_0$ кортеж, образованный из первых элементов этих последовательностей, через $\bar{a}_n$ кортеж, образованный из n-ых элементов этих последовательностей.

Так как эти последовательности не могут быть продолжены элементами M , из этого следует, что для каждого a из f^M существует натуральное n, такое, что a удовлетворяет формуле ранга Морли строго меньше α с параметрами из $A \cup \{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n\}$.

Сделав это, начинаем перечислять все формулы g_i , влекущие f, с параметрами из A и с рангом RM, строго меньшим α. По гипотезе можно построить каждое g_i^M, и помещая эти конструкции последовательно одну за другой, получаем конструкцию объединения B_0 этих g_i^M. Так как объединение g_i^M нормально над A, то по 18.4 модель остается атомной над этим множеством.

Затем добавляем $\bar{a}_0$ к B_0: модель M атомна над $A \cup B_0 \cup \{\bar{a}_0\}$. Теперь пронумеруем формулы с параметрами из этого множества, влекущих f и имеющих RM, строго меньший α, и так же конструируем их объединение B_1 . Повторяем эту процедуру ω раз: в конце получаем конструкцию f^M.

□

Как было уже сказано, теорема 18.5 является вторым доказательством единственности простой модели в тотально трансцендентном случае, так как каждая простая модель, вкладываясь в конструируемую модель, должна удовлетворить гипотезе этой теоремы. Теперь изучим свойства минимальной простой модели, все еще в тотально трансцендентном случае.

Пусть B – множество параметров, содержащее A и атомное над A, и пусть p – тип из $S_1(B)$, который мы реализуем элементом a; мы говорим, за отсутствием лучшего термина, что *p атомен над A*, если $B \cup \{a\}$ атомно над A, то есть если для каждого $\bar{b}$ из B тип $\bar{b}^\frown a$ над A изолирован; по транзитивности атомности простая модель над $B \cup \{a\}$ атомна также над A.

Лемма 18.6 *Если N – элементарное расширение M, модели M и N – атомные над A, и если p в $S_1(M)$ – атомный над A, то таков же и его наследник q над моделью N.*

Доказательство. Пусть a – реализация q, и множество $\bar{b}$ лежит в N: надо доказать, что тип $a^\frown\bar{b}$ изолирован над A. Пусть элемент $\bar{c}$ в M такой, что p так же, как и q, есть единственное неотклоняющееся расширение своего ограничения на $\bar{c}$: можно взять в качестве $\bar{c}$ параметры формулы $f(x, \bar{c})$, изолирующей р от типов не меньшего ранга Морли . Так как тип $\bar{b}$ над $A \cup \{\bar{c}\}$ изолирован и M является моделью, то он реализуется кортежем $\bar{b}'$ из M; по гипотезе тип $\bar{c}^\frown\bar{b}'^\frown a$ над A изолирован и этот тип тот же, что и тип $\bar{c}^\frown\bar{b}^\frown a$ над A .

$\square$

Теорема 18.7 (**T тотально трансцендентна.**) *Простая модель над A минимальна если и только, если она не содержит бесконечного неразличимого множества над A; если она минимальна, то это единственная модель, атомная над A; иначе, существуют атомные модели над A произвольно большой мощности.*

Доказательство. Предположим, что простая модель M содержит счетное неразличимое над A множество $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Каждая формула типа a_0 над $A \cup \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ удовлетворяется всеми a_n, за исключением конечного числа, так что этот тип не изолирован и a_0 не может лежать в простой модели над $A \cup \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ и, таким образом, мы получаем несюръективное элементарное A-вложение M в себя.

Если M не минимальна, или если существуют другие атомные модели, то она имеет собственное атомное расширение N. Пусть p – тип над M элемента из N, который не лежит в M. По 18.6 последовательность Морли $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ типа p атомна над A, и должна найтись ее копия в M. Кроме того, если ее продолжить, то получим неразличимую последовательность длины λ, которая атомна над A так же, как и простая модель над этой последовательностью, по транзитивности атомности.

$\square$

Лемма 18.8 *Если $A \subset B \subset C$, C атомно над A и тип p из $S_1(B)$ атомен над A, тогда p имеет сына q над C, атомного над A.*

Доказательство. Можно заменить C на простую модель N над C, которая атомна над A. Эта модель N содержит копию модели M, простой над B : по 18.6 достаточно показать, что p имеет над M атомного сына; затем, надо брать его наследника.

Чтобы это понять, тип p реализуем элементом a и рассмотрим модель M_p , простую над $B \cup \{a\}$, которая по транзитивности, атомна над A и содержит копию M: тип a над M атомен над A (и он является, вообще говоря, очень отклоняющимся расширением p !) .

$\square$

Следствие 18.9 *Если $A \subset B$, B атомно над A, и если p_i типы из $S_1(B)$, являющиеся атомными над A, то существует надмножество C множества B, атомное над A, в котором реализуются все эти типы.*

Доказательство. Реализуем первый тип, пусть p_0 , в C_0; потом берем атомное расширение второго над C_0 , пусть это будет p_1 , который реализуем в C_1 и так далее.

□

Один из вариантов следствия 18.9 является следующим: если M_i являются атомными моделями над A, то они имеют общее элементарное расширение M , атомное над A. Этот результат похож на теорему 4.14 .

Мы видим, что в случае тотально трансцендентной теории можно создать целую теорию моделей, ограничиваясь атомными моделями над A. Это будет интересным, очевидно, когда простая модель не минимальна.

Например, можно определить понятие *$\varkappa$-атомно насыщенной* модели: это модель M атомная над A и такая, что для любого B, $A \subset B \subset M$, $|B| < \varkappa$, каждый тип над B, который A-атомен, реализуется в M. По следствию 18.9 каждая атомная модель вкладывается в $\varkappa$-атомно насыщенную и легко видеть челночным методом, что такая модель $\varkappa$-(слабо)-однородна. *Атомная насыщенность* будет означать атомную насыщенность в своей мощности: для каждого $\lambda \geq |T(A)|$ можно показать существование и единственность A-атомно насыщенной модели мощности λ, копируя доказательства теорем существования 14.2 и единственности 9.8 насыщенных моделей.

Мы собираемся теперь изучить некоторый вид ядра, получающегося как пересечение всех A-вложений простой модели над A в себя. Говорим, что тип p над A или элемент, реализующий этот тип, *атомно алгебраичен над A*, если p изолирован и если a не является началом никакой бесконечной неразличимой последовательности, атомной над A.

Атомно алгебраические элементы имеют по отношению к классу атомных моделей свойства, параллельные свойствам алгебраических элементов по отношению к классу всех моделей. Например, если возьмем большую очень насыщенную модель N, и если M – простая модель над A, то пересечение всех A-вложений M в N образовано алгебраическими элементами над A. Если N атомна и даже не атомно насыщенна, то это пересечение образовано из атомно алгебраических элементов: действительно, если элемент a не принадлежит ему, то мы найдем в этой модели последовательность $a, a_1, \ldots, a_n \ldots$ неразличимую и атомную, и простая модель над $A \cup \{a_1, \ldots, a_n \ldots\}$ содержащая копию M, не содержит a; с другой стороны, если возможно вложить M в N, не накрывая a, то как мы уже отметили, последовательность Морли типа a над M атомна над A.

Одним словом, *пересечение всех A-вложений модели M, простой над A, в себя или в какую-нибудь атомную модель над A, образовано из атомно алгебраических элементов; мы назовем минимальным замыканием A* структуру, образованную атомно алгебраическими элементами M. В любой атомной модели N над A атомно алгебраические элементы образуют структуру изоморфную этому минимальному замыканию.

Лемма 18.10 *Если $A \subset B \subset M$, M атомно над A, как и над B, и B' получено из B добавлением или удалением атомно алгебраических элементов над A, тогда M остается атомной над $A \cup B'$.*

Доказательство. Начнем с добавления к B всех атомно алгебраических элементов и получим множество B_1, нормальное над A; по лемме 18.4 , M остается атомной над B_1.

Затем удалим из B_1, чтобы получить B', A-атомно алгебраические элементы. Пусть $\bar{a}$ – кортеж из M, тип которого над B_1 изолирован формулой $f(\bar{x}, \bar{b})$; так как простая модель над $A \cup B'$ содержит обязательно атомно алгебраические элементы над A, кортеж $\bar{b}$ имеет тип над $A \cup B'$, изолированный формулой $g(\bar{y})$ (впрочем это свойство характеризует атомно алгебраические элементы: это те элементы, тип которых остается изолированным над любым множеством параметров атомной модели) . Следовательно формула $\exists y[f(\bar{x}, \bar{y}) \wedge g(\bar{y})]$ изолирует тип $\bar{a}$ над $A \cup B'$.

□

Прямое следствие леммы 18.10 – это то, что если в конструкции простой модели M над A поменять местами атомно алгебраические элементы, тогда получаем снова конструкцию M. Таким образом, можно начинать ее конструкцию перечисляя, неважно как, минимальное замыкание A_{min} множества A, так что *M остается простой моделью над A_{min} так же, как и на любым подмножеством A_{min}* . Следовательно, *минимальное замыкание A_{min} , или любого промежуточного множества между A и A_{min} , остается A_{min}* : действительно, если a не лежит в A_{min} , то можно найти копию простой модели над A, являющуюся также простой моделью над A_{min} , не содержащую a; это оправдывает термин "замыкание".

Из единственности простой модели следует, что A_{min} обладает следующим свойством однородности: *два $\varkappa$-кортежа из A_{min} одинакового типа над A переводятся друг на друга A-автоморфизмом модели M простой над A* (Если $\varkappa > |T(A)|$, то эти $\varkappa$-кортежи очевидно включают большое количество повторений!). Это контрастирует с тем, что простая модель ω-однородна (так как она остается простой над $A \cup \{\bar{b}\}$, где $\bar{b}$ – конечный кортеж), но не ω_1-однородна, если она не минимальна, так как A-неразличимое бесконечное максимальное множество не может быть отображено A-автоморфизмом на одно из своих собственных бесконечных подмножеств.

18.c Теория Галуа дифференциальных уравнений

Я собираюсь иллюстрировать здесь предыдущие рассмотрения примером, заимствованным из алгебры. Это очень старый пример, так как речь идет о "группе Галуа", которую математики прошлого века такие как Лиувилль, Пикар, Вессио, сопоставляли некоторому линейному дифференциальному уравнению: это алгебраическая группа матриц, действующая на решениях уравнения. Разрешимость связной компоненты этой группы означает возможность решать уравнение каскадом простых способов (взятие примитива, взятие показательного примитива, алгебраические функции). Это является параллелью с замечательной теоремой Галуа о разрешимости алгебраических уравнений.

Естественно, как никакого поля нет у Галуа, так и никакого дифференциального поля нет у Лиувилля (который был редактором записей Галуа); для Галуа корень многочлена является комплексным числом, а для Лиувилля решение дифференциального уравнения является аналитической функцией; но мы будем искать решения дифференциального уравнения с коэффициентами в K в дифференциальном замыкании K.

Эта теория была обобщена Колчиным на некоторые, честно говоря, достаточно ограниченные, виды нелинейных дифференциальных уравнений. Группы Галуа, которые тогда получаются, являются самыми общими алгебраическими группами, а не только аффинными группами.

Все это полностью находится в рамках теории T дифференциально замкнутых полей нулевой характеристики (см. раздел 6.b); как уже было отмечено, она является тотально трансцендентной теорией, так как ранг RD (который определяется только для 1-типов) является канторовским рангом или, другими словами, 1-типов над K имеется не более, чем неприводимых дифференциальных многочленов, откуда следует стабильность во всех λ. Можно достаточно легко понять, что RD не является рангом Морли.

Следовательно, любое дифференциальное поле K (нулевой характеристики: мы это не будем больше повторять) имеет простую модель над K, которую обозначим K_{dc} и назовем его дифференциальным замыканием; алгебраическое замыкание, что одно и то же в теоретико-модельном смысле и в алгебраическом смысле, K_{alg} поля K оказывается внутри этого дифференциального замыкания, также как и его минимальное замыкание K_{min}; и мы имеем $K \subset K_{alg} \subset K_{min} \subset K_{dc}$.

Если $K = C$ является полем констант (т.е. производная равна нулю на K), то можно видеть, что *дифференциальное замыкание C не минимально.* Действительно, чисто алгебраическими аргументами, которые я здесь не воспроизвожу, показывается, что попарно различные решения уравнения $x' = x^3 - x^2$, пусть $a_0, \ldots, a_n, \ldots$, расположенные в дифференциальном поле L, всегда алгебраически независимы над константами этого поля. Следовательно, над C имеется бесконечное, атомное и неразличимое множество, являющееся последовательностью Морли типа минимального уравнения $x' = x^3 - x^2$. Уравнение $x' + x'/x = 1$, или $x'(x+1) - x = 0$, так же впрочем как почти все уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами, имеет то же свойство.

Чтобы упростить жизнь в дальнейшем предположим, что находимся над дифференциальным полем K, поле констант которого алгебраически замкнуто; так как тип константы, трансцендентной над K не изолирован (он конечно выполним в C) , дифференциальное замыкание K_{dc} не содержит других констант кроме тех, что в C.

Говорим, что формула $f(x)$ с одной свободной переменной и с параметрами в K является *формулой Колчина*, если она обладает следующим свойством: существует дифференциально замкнутое поле M, содержащее K и такое, что для любого a, удовлетворяющего f, где a берется из некоторого расширения

M, дифференциальное поле $M(a)_d$ порождается над M константами. Это еще означает, что любой a, удовлетворяющий f, удовлетворяет предложению вида $\exists \bar{c}[x = \varphi(\bar{a}, \bar{c})]$, где φ – определимая в T функция (в особых случаях, рациональная дробь), $\bar{a}$ – кортеж параметров из M, а $\bar{c}$ – кортеж констант. Из-за компактности пространства типов $S_(M)$, можно ограничиться конечным числом таких функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, определимых с параметрами в M, так что существует $\bar{a}$ в M такой, что каждое решение f удовлетворяет формуле

$$\exists c_1 \ldots \exists c_n \{c_1' = 0 \wedge \cdots \wedge c_n' = 0 \wedge [x = \varphi_1(\bar{a}, \bar{c}) \vee \cdots \vee x = \varphi_n(\bar{a}, \bar{c})]\}.$$

Назовем *фундаментальной системой* для формулы $f(x)$ кортеж $\bar{a}$, позволяющий выразить рационально над K элементы, удовлетворяющие f (говорим "решения" f) , с помощью константных параметров. Мы видим, квантифицируя вышеприведенную формулу, что существование фундаментальной системы выражается некоторым предложением, так что если $f(x)$ – формула Колчина, то она имеет фундаментальную систему в любой модели (т.е. в дифференциально замкнутом поле), содержащей K.

Лемма 18.11 *Если $f(x)$ – формула Колчина, то она имеет фундаментальную систему, образованную из элементов, удовлетворяющих f.*

Доказательство. Пусть M – дифференциально замкнутое поле, содержащее K (например, его дифференциальное замыкание), и L – дифференциальное поле, порожденное полем K, константами из M и решениями f в M. Пусть a – решение f из расширения M и $\bar{c}$ – кортеж констант, такой, что a рационален над $M \cup \{\bar{c}\}$. С помощью доказательства, абсолютно идентичного доказательству теоремы о разделении параметров (следствие 12.31), мы видим, что тип $\bar{c}^\frown a$ над M определен своим ограничением на $L \cup \{\bar{c}\}$. Следовательно, тип a над $L \cup \{\bar{c}\}$ имеет только единственного сына над $M \cup \{\bar{c}\}$. Так как этот последний – рациональный, то таков же и первый. Следовательно, $a = \varphi(\bar{c}, \bar{c}_1, \bar{b})$, где φ является K-определимой функцией, $\bar{c}_1$ – кортеж констант из L, а $\bar{b}$ – кортеж решений f в M (т.е. в L). Остальное следует просто из компактности.

$\square$

Лемма 18.12 *Пусть p – тип из $S_1(K)$, удовлетворяющий формуле Колчина $f(x)$, и a – реализация типа p; тогда p изолирован, если и только если дифференциальное поле $K(a)_d$, порожденное a над K, не содержит других констант, за исключением тех, что уже лежат в K, и тогда оно подполе минимального замыкания K. (Напомним, что по предположению поле констант K алгебраически замкнуто) .*

Доказательство. Если p изолирован, то он реализуется элементом a дифференциального замыкания K_{dc} поля K; это последнее не содержит новых констант так же, как и $K(a)_d$. Кроме того, если L – дифференциально замкнутое поле между K и K_{dc}, то оно содержит фундаментальную систему $\bar{b}$ для $f(x)$, и a выражается рационально через $\bar{b}$ и константные параметры, которые все принадлежат K. Следовательно, $\bar{a}$ принадлежит L.

Обратно, если $K(a)_d$ не содержит новых констант, то его дифференциальное замыкание L также их не содержит. Вложим K_{dc} в L, тогда K_{dc} содержит фундаментальную систему $\bar{b}$ для $f(x)$, и a выражается рационально через $\bar{b}$ и константные параметры, лежащие в K. Таким образом, a обязательно попадает в K_{dc}, и его тип p над K изолирован.

□

По предыдущей лемме легко видеть, что никакое неравенство $p(x) \neq 0$ не является формулой Колчина. Действительно, если a дифференциально трансцендентен (т.е. не аннулирует никакое нетривиальное уравнение) над K, его тип над K не изолирован и простой расчет производных показывает, что каждая константа поля $K(a)_d$ принадлежит K. Мы поймем глубокий смысл этого явления в следующей главе, когда изучим понятие ортогональности.

Наиболее классический пример формулы Колчина дается линейными дифференциальными уравнениями. Для их рассмотрения начнем с маленькой леммы; по определению $(x_i, x_i', x_i'', \ldots, x_i^{(n)})$ являются строками *вронскиана* или *определителя Вронского* $W(x_0, \ldots, x_n)$ элементов $x_0, \ldots, x_n$.

Лемма 18.13 *$W(a_0, \ldots, a_n)$ равен нулю, если и только если $a_0, \ldots, a_n$ линейно зависимы над полем констант.*

Доказательство. Если $c_0 a_0 + \cdots + c_n a_n = 0$, то беря производную этого уравнения n раз, получаем нетривиальную связь между строками вронскиана, который, таким образом, равен нулю.

Обратное очевидно, если $a_0, \ldots, a_n$ все нулевые; иначе, найдем индекс i, такой, что $W(a_0, \ldots, a_i) \neq 0$ и $W(a_0, \ldots, a_i, a_{i+1}) = 0$; последняя строка этого определителя является, таким образом, линейной комбинацией других:

$$\begin{array}{ccc} a_{i+1} & = & b_0 a_0 + \cdots + b_i a_i \\ a'_{i+1} & = & b_0 a'_0 + \cdots + b_i a'_i \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i+1}^{(i+1)} & = & b_0 a_0^{(i+1)} + \cdots + b_i a_i^{(i+1)} \, . \end{array}$$

Продифференцировав каждое из этих равенств и отнимая от него следующее, мы видим, что так как $W(a_0, \ldots, a_i)$ ненулевой, то каждый b'_j является нулевым.

□

Маленький комментарий о значении предыдущей леммы: тот факт, что $a_0, \ldots, a_n$ удовлетворяют линейной связи с константными коэффициентами выражается посредством некоторого предложения. Что касается выполнимости этого предложения в дифференциально замкнутом поле M, содержащем $a_0, \ldots, a_n$, мы знаем, что по элиминации кванторов оно эквивалентно предложению без кванторов, которое мы впрочем определили: это $W(a_0, \ldots, a_n) = 0$! Естественно, выполнимость этого предложения не зависит от дифференциально замкнутого поля, в котором мы находимся. Лемма 18.13 утверждает, кроме того, что она не зависит от дифференциального поля K, содержащего, конечно, $a_0, \ldots, a_n$, которые мы рассматриваем, и что это предложение эквивалентно во всех случаях $W(a_0, \ldots, a_n) = 0$. Это связано существенным образом с тем фактом, что все поля "линейно замкнуты" в каждом из своих расширений, что любая конечная система линейных уравнений с коэффициентами из K, имеющая решение в расширении K, имеет уже решение в K: вспомните "формулы Крамера" вашей юности!

Предложение 18.14 *Каждое линейное однородное уравнение*

$$P(x) = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0$$

является формулой Колчина; более точно, все решения этого уравнения являются линейными комбинациями с константными коэффициентами n из них.

Доказательство. Я оставляю читателю заботу о проверке того, что решения этого уравнения образуют векторное пространство E над полем констант (внимание: коэффициенты a_i не обязаны быть константами!). Если мы рассмотрим $n+1$ решение $b_0, \ldots, b_n$ этого уравнения, то увидим, что имеется связь между столбцами вронскиана и, значит, $W(b_0, \ldots, b_n) = 0$; следовательно, $b_0, \ldots, b_n$ линейно зависимы над полем констант, и размерность E не можно превысить n.

В действительности она равна n и найдется базис E, составляющий, таким образом, фундаментальную систему для $P(x) = 0$ в каждом дифференциально замкнутом поле, содержащем коэффициенты P: действительно, в системе $P(x) = 0 \wedge W(b_0, \ldots, b_i, x) \neq 0, \quad i < n-1$, порядок неравенства строго меньше порядка уравнения.

□

Линейное неоднородное уравнение вида $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = b$ является также формулой Колчина: достаточно продифференцировать в нем обе части и составить линейную комбинацию двух полученных линейных уравнений, чтобы получить линейное однородное уравнение порядка $n+1$, являющееся следствием первого. Например уравнение $x' = b$, соответствующее взятию примитива, является формулой Колчина.

Другой известный, но менее тривиальный пример формулы Колчина, которая совершенно другой природы, чем линейные уравнения, дается уравнением $x'^2 = x^3 + px + q$, где p и q – константы, функции $\mathcal{P}$ Вейерштрасса.

Мы назовем *расширением Колчина* K, соответствующим формуле Колчина $f(x)$, подполе L поля K_{min}, порожденное решениями f в K_{dc}; это будет, равным образом, дифференциальным подполем, порожденным решениями f, в любом дифференциально замкнутом расширении K, не содержащем новых констант. Колчин ввел эти расширения под именем "сильно нормальные расширения" задолго до появления понятия дифференциально замкнутого поля, чтобы иметь основу для некоторой теории Галуа для дифференциальных уравнений, для которых существенная часть того, что касается линейных уравнений, была известна в конце прошлого века. Мы собираемся переинтерпретировать эту теорию Галуа в свете теории моделей.

Пусть, таким образом, L/K – расширение Колчина; обозначим через $G(L/K)$ и назовем *группой Галуа* для L/K, группу автоморфизмов L, оставляющих неподвижным каждый элемент K. Ввиду свойства однородности K_{min} это то же самое, что ограничения на L K-автоморфизмов K_{dc}.

Первый этап состоит в замечании о том, что $G(L/K)$ является определимой группой в теории дифференциально замкнутых тел. По лемме 18.11 формула Колчина $f(x)$ имеет фундаментальную систему $\bar{b}$, принадлежащую L. Пусть $g(\bar{y})$ – формула, изолирующая тип $\bar{b}$ над K. Автоморфизм s для L/K полностью определен своим действием на $\bar{b}$, т.е. своим образом $s\bar{b}$, так как каждое решение f в L выражается через $\bar{b}$ и константы, принадлежащие K.

Тогда, используя $\bar{b}$ в качестве параметров, мы можем представить s через его образ $\bar{y} = s\bar{b}$, являющийся каким-нибудь элементом L, удовлетворяющим $g(\bar{y})$. Чтобы определить нашу группу, остается определить закон умножения $\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2 = \bar{z}$, означающий, что автоморфизм-произведение тех, что переводит $\bar{b}$ на $\bar{y}_2$ и что переводит $\bar{b}$ на $\bar{y}_1$, есть то, что переводит $\bar{b}$ на $\bar{z}$. Однако, мы знаем, что каждый кортеж, образованный из решений f, выражается рационально через $\bar{b}$ и константные параметры, то есть удовлетворяет формуле

$$(\exists \bar{c})\{\bar{c}' = o \wedge [\bar{y} = R_1(\bar{b}, \bar{c}) \vee \cdots \vee \bar{y} = R_m(\bar{b}, \bar{c})]\} ,$$

где $R_1, \ldots, R_m$ кортежи рациональных дробей с коэффициентами из K. Так как все константы L принадлежат K, то для того чтобы выразить $\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2 = \bar{z}$, достаточно сказать, что если $\bar{y}_1 = R_i(\bar{b}, \bar{c})$, тогда $\bar{z} = R_i(\bar{y}_2, \bar{c})$, что выражается посредством одной формулы.

Предложение 18.15 *Если L/K – расширение Колчина, то имеется соответствие Галуа между промежуточными дифференциальными полями, находящимися между K и L, и подгруппами $G(L/K)$, определимыми с параметрами из L.*

Доказательство. Если $K \subset L_1 \subset L$, то нам надо доказать, что $G(L/L_1)$ является определимой подгруппой $G(L/K)$. Рассмотрим элемент a из L, имеющий вид $A = R(\bar{b})$, где R – рациональная дифференциальная дробь с коэффициентами из K; в $G(K/L)$ стабилизатор элемента a определяется формулой $R(\bar{y}) = R(\bar{b})$. Группа $G(L/L_1)$ является пересечением всех $G(L/K(a)_d)$, где a пробегает L_1, которые, следовательно, определимы. Я утверждаю, что в действительности $G(L/L_1)$ есть пересечение конечного числа среди них, значит, она сама также определима. Это следует из того факта, что $G(L/K)$, будучи определимой в тотально трансцендентной структуре, сама тотально трансцендентна: легко видеть, что если G и H – две определимые подгруппы такой группы и H – собственная подгруппа G, тогда ранг Морли H строго меньше ранга G, или степень Морли H строго меньше степени G (поскольку все правые смежные классы G по модулю H попарно взаимно отображаются определимыми биекциями, то они все имеют один и тот же ранг и одну и ту же степень Морли) ; следовательно, в тотально трансцендентной группе каждая убывающая последовательность $G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots$ определимых подгрупп становится стационарной начиная с некоторого индекса, и каждое пересечение семейства определимых подгрупп есть пересечение конечного числа среди них.

Мы доказали одновременно, что L_1/K конечно порождена, так как ясно, что по однородности K_{min} множеством инвариантов группы $G(L/K(a_0, \ldots, a_n)_d)$ является само поле $K(a_0, \ldots, a_n)_d$.

Обратно, пусть H – подгруппа $G(L/K)$, определимая формулой с параметрами $h(\bar{y})$; H является, очевидно, группой автоморфизмов L/K, сохраняющих эту формулу; так как по 16.21 имеется элиминация воображаемых элементов, то это группа Галуа $L/K(\bar{a})$, где $\bar{a}$ – канонический кортеж параметров для h.

$\square$

Читатель заметит, что если $G(L/L_1)$ нормальна в $G(L/K)$, тогда L_1/K – расширение Колчина, и его группой Галуа является $G(L/K)/G(L/L_1)$. Уточним немного природу $G(L/K)$ и ее определимых подгрупп. Мы использовали параметр $\bar{b}$, чтобы определить $G(L/K)$ как группу перестановок L, беря для этого элементы, удовлетворяющие $g(\bar{y})$. Чтобы определить $G(L/K)$ в качестве абстрактной группы, мы собираемся сначала изменить эти элементы так, чтобы манипулировать только константами.

Мы знаем, что каждый $\bar{y}$ рационально выражается как функции от кортежа констант, $\bar{y} = R_1(\bar{b}, \bar{c}) \vee \cdots \vee \bar{y} = R_m(\bar{b}, \bar{c})$; рассмотрим определимое множество A $(n+1)$-кортежей констант $\bar{c}^\frown i$, $1 \leq i \cdots \leq m$, где $i = 1 + 1 + \cdots + 1$ – сумма i единиц. На этом множестве рассмотрим отношение эквивалентности E, определенное таким образом: $\bar{c}_1{}^\frown i \; E \; \bar{c}_2{}^\frown j$ если $R_i(\bar{b}, \bar{c}_1) = R_j(\bar{b}, \bar{c}_2)$; так как фактор-множество A/E находится в биекции с интерпретацией $g(\bar{y})$ в L, то мы можем туда перенести структуру группы $G(L/K)$.

Но, на этот раз, множество A составлено только из констант, так что по *теореме о разделении параметров* (Следствие 12.31) , отношение эквивалентности E и закон умножения группы, определенной на A/E, которую мы определили используя $\bar{b}$ в качестве параметров, в случае необходимости еще другие параметры из K, могут быть определены с помощью только константных параметров из K_{dc}, то есть из K. *Тогда $G(L/K)$ становится определимой группой в поле констант C поля K, и ее подгруппы, определимые с параметрами из L, на самом деле определимы с параметрами из C !*

Определимый объект в теории алгебраически замкнутых полей расценивается геометрами как *конструктивный*; алгебраические многообразия являются очень специфическими конструктивными объектами, но в случае групп, по крайней мере в случае когда характеристика поля равна нулю, конструктивная группа или алгебраическая группа – это одно и то же с точностью до конструктивного изоморфизма. Так что когда L/K – расширение Колчина, *$G(L/K)$ является, на самом деле, алгебраической группой над полем констант C поля K, и промежуточные дифференциальные поля между K и L соответствуют алгебраическим подгруппам $G(L/K)$, определимым с параметрами из C.*

Если формула $f(x)$ является линейным уравнением, то соответствующее расширение Колчина называется расширением Пикара-Вессио; в этом случае, его группа Галуа является группой матриц, то есть аффинной алгебраической группой и можно доказать обратное утверждение: если $G(K/L)$ аффинна, тогда K/L расширение Пикара-Вессио. Напротив, в случае уравнения функции Вейерштрасса, группой Галуа является абелево многообразие.

Так как ясно, что дизъюнкция двух формул Колчина является снова формулой Колчина, то мы видим, что дифференциальное поле порожденное двумя расширениями Колчина L_1/K и L_2/K, оба находящиеся в дифференциальном замыкании K_{dc} поля K, является снова расширением Колчина K. Тогда резонно называть *оболочкой Колчина* подполе K_{dc}, порожденное над K решениями формул Колчина: это предел фильтрующегося семейства расширений Колчина поля K.

Можно видеть также, что поле, порожденное двумя расширениями Пикара-Вессио, находящимися в K_{dc} , само является расширением Пикара-Вессио; и мы назовем *оболочкой Пикара-Вессио* поля K дифференциальное подполе K_{dc} , порожденное решениями линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из K. Мы имеем тогда следующие включения:

$$K \subset K_{alg} \subset K_{\text{Пикар}-\text{Вессио}} \subset K_{\text{Колчин}} \subset K_{min} \subset K_{dc} \ .$$

Мы говорим не о замыкании, а об оболочке Колчина, или Пикара-Вессио, так как эти понятия не транзитивные. Если K – поле констант, то его оболочка Колчина является даже не алгебраически замкнутой: она содержит примитивы решений уравнения $x' = 1$, но не их квадратные корни – решения уравнения $2xx' = 1$. Для завершения этого раздела добавим, что движущая сила этой теории Галуа имеет мало общего с дифференциальным контекстом. Любая формула ранга и степени Морли 1 (часто говорят, что f "сильно минимальна"), или даже любого другого ранга и степени Морли, способны играть роль констант. Мы определяем, в этом самом общем случае, аналог формул Колчина и получаем снова группы определимых автоморфизмов. Для этой теории Галуа надо будет, очевидно, прибегать в случае необходимости к воображаемым элементам.

18.d Простые $|T|^+$-насыщенные модели

Теоремы существования и единственности простой модели, появившиеся по ходу изложения этого курса (главы 10, 17.c, 18) имеют на самом деле гораздо более общую область распространения, выходящую за рамки, в которых они были представлены. Выясним то, что служит их движущей силой:

– понятие изолированности, атомности вместе с транзитивностью атомности (лемма 10.6);

– теорема о плотности изолированных типов (теорема 17.15) ;

– возможность определения понятия замыкания маленькими пакетами, не обязательно конечными, гарантирующая единственность конструируемой модели (теорема 10.18, и раздел 10.f);

– возможность определения типов через некоторые их ограничения над достаточно маленькими множествами относительно размеров пакетов так, чтобы теорема 18.1 , гарантирующая, что каждое подмножество конструируемого множества конструируемо, оставалась в силе.

Отметим, что в 10.f , по поводу ультраметрических пространств, мы смогли провести эту программу в рамках нестабильной теории. Отметим также, что для доказательства единственности, нам нужно обобщить теорему 18.2, а не теорему 18.5, которая слишком сильно опирается на существование ранга.

Если A – множество параметров, то $\varkappa$-насыщенная модель M, содержащая A, называется *простой над* A (недомолвка: *среди $\varkappa$-насыщенных моделей, содержащих* A), если M элементарно вкладывается в каждую $\varkappa$-насыщенную модель теории $T(A)$. Мы собираемся кратко доказать *существование и единственность $\varkappa$-насыщенной простой модели для каждого множества A параметров в стабильной теории T, где $\varkappa$ – регулярный кардинал, строго больший* $|T|$. Рассуждение состоит в восстановлении доказательства существования и единственности простой модели тотально трансцендентной теории. Надо помнить, в качестве общезначимого принципа, что конструкции, которые удалось провести относительно класса всех моделей тотально трансцендентной теории, можно провести в случае стабильной теории, если ограничиться $\varkappa$-насыщенными моделями.

Если тип p из $S_1(A)$, то говорят, что он *$\varkappa$-изолированный*, если он определен менее $\varkappa$ формулами $f_\alpha(x, \bar{a})$ с параметрами из A (т.е. он является единственным типом, удовлетворяющим им всем). Подмножество X в $S_1(A)$ называется *$\varkappa$-плотным*, если оно имеет следующее свойство: каждое непустое подмножество $S_1(A)$, являющееся пересечением менее чем $\varkappa$ открыто-замкнутых подмножеств, содержит точку из X.

Если M – $\varkappa$-насыщенная модель $T(A)$ (или даже только $\varkappa$-компактная; но мы рассматриваем только достаточно большие кардиналы, чтобы $\varkappa$-компактность была эквивалентна $\varkappa$-насыщенности), то он реализует все $\varkappa$-изолированные типы теории $T(A)$. Говорим, что $\varkappa$-насыщенная модель M теории $T(A)$ *$\varkappa$-конструируема*, если ее можно ординально перечислить $M = \{a_\alpha\}_{\alpha<|M|}$ так, чтобы для каждого α тип a_α над $A_\alpha = A \cup \{a_\beta\}_{\beta<\alpha}$ был $\varkappa$-изолированным. Ясно, что $\varkappa$-конструируемая модель $\varkappa$-простая (т.е. простая среди $\varkappa$-насыщенных моделей). Чтобы доказать существование такой модели, нам достаточен аналог теоремы 17.15 :

Теорема 18.16 *Если теория T стабильна и $\varkappa \geq |T|$, тогда для любого A $\varkappa$-изолированные типы $\varkappa$-плотны в $S_1(A)$.*

Доказательство. Пусть F – замкнутое множество в $S_1(A)$, определенное менее $\varkappa$ формулами $g_i(x, \bar{a}_i)$ с параметрами из A. Перечислим все формулы без параметров языка T, пусть $f_\alpha(x, \bar{y})$ – это список, и построим по индукции последовательность формул $h_\alpha(x, \bar{a}_\alpha)$ с параметрами из A следующим образом: мы берем в конъюнкции g_i и h_β, $\beta < \alpha$, тип p_α из $S_1(A)$ минимального ранга дихотомии $R(p, f_\alpha\ , 2)$ и формулу $h_\alpha(x, \bar{a}_\alpha)$, содержащую этот тип и имеющую тот же ранг $R(\ , f_\alpha\ , 2)$, что и p_α; построение не блокируется, так как на каждом шаге получается совместное множество формул: на предельных шагах, это следствие компактности.

По определению $R(p, f_\alpha, 2)$, для каждого $\bar{a}$ из A, одна из формул $f_\alpha(x, \bar{a})$ и $\neg f_\alpha(x, \bar{a})$ несовместима с конъюнкцией g_i и h_β, $\beta < \alpha$, то есть другая является следствием этой конъюнкции; иначе говоря, конъюнкция g_i и h_α влечет f_α-полный тип; конъюнкция g_i и всех h_α $\varkappa$-изолирует полный тип.

□

Если $A \subset B$, то говорим что B *$\varkappa$-атомно* над A, если каждый кортеж длины, меньшей $\varkappa$, из B имеет $\varkappa$-изолированный тип над A. Вот аналог леммы 10.6 :

Лемма 18.17 *Если $\varkappa$ регулярен, то понятие $\varkappa$-атомности транзитивно: если $A \subset B \subset C$, B $\varkappa$-атомно над A, C $\varkappa$-атомно над B, тогда C $\varkappa$-атомно над A.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ – λ-кортеж, $\lambda < \varkappa$, извлеченный из C; его тип над B $\varkappa$-изолирован формулами $f_i(\bar{x}, \bar{b}_i)$, где $\bar{b}_i$ – конечные кортежи; предположим, что это множество формул замкнуто относительно конечных конъюнкций; каждый $\bar{b}_i$ имеет тип над A, $\varkappa$-изолированный формулами $g_{ij}(\bar{y})$ с параметрами из A, которые, предположим, также образуют семейство, замкнутое относительно конечных конъюнкций. Тип $\bar{a}$ определен формулами $\exists \bar{y}[f_i(\bar{x}, \bar{y}) \wedge g_{ij}(\bar{y})]$; действительно, если $\bar{a}'$ удовлетворяет всем этим формулам, то совместно, что существует B' такого же типа, что B над A так, чтобы тип $\bar{a}'$ над B' был тем, что соответствует типу $\bar{a}$ над B. Если $\varkappa$ регулярен, то это множество формул имеет мощность, строго меньшую $\varkappa$.

□

Следовательно, $\varkappa$-конструируемая модель $\varkappa$-атомна; чтобы показать единственность конструируемой модели остается только определить понятие замыкания, делая пакеты уже не конечными, а мощности, строго меньшей $\varkappa$, и мы применяем челночный метод между замкнутыми множествами.

Вы поняли правило игры: то, что было возможным с конечными множествами, становится возможным с множествами мощности, строго меньшей $\varkappa$, и то, что было возможно со счетными множествами, становится возможным с множествами мощности $\varkappa$; в частности, любое $\varkappa$-перечисление $\varkappa$-атомного множества является конструкцией.

Как мы знаем, каждый тип стабильной теории является неотклоняющимся расширением своего ограничения на множество параметров мощности $|T|$ (следствие 15.8); кроме того, если $A \subset B$, $p \in S_1(A)$, $q \in S_1(B)$ и q является неотклоняющимся и $\varkappa$-изолированным сыном типа p, тогда p сам $\varkappa$-изолирован: это простое следствие теоремы об открытом отображении (следствие 16.7). Этого достаточно для приспособления доказательства предложения 18.1 к нашему случаю, так что единственность простой $\varkappa$-насыщенной модели доказана.

Существует достаточно впечатляющее количество разных простых моделей, входящих в эту рамку, все придуманные Шелахом. Для большинства из них удается доказать существование и единственность простой модели, следуя развитой выше схеме, но иногда это наталкивается на технические трудности. Одно понятие, приспособленное для суперстабильных теорий, это понятие *$\aleph_\varepsilon$-насыщенной простой модели*: модель M называется $\aleph_\varepsilon$-насыщенной, если для каждого конечного кортежа $\bar{a}$ из M каждый сильный тип над $\bar{a}$ реализуется в M: если каждый тип имеет конечную кратность, то это то же самое, что понятие $\aleph_0$-насыщенности.

18.e Модели Эренфойхта

Простые модели, которые мы рассмотрели, имеют естественную характеристику, очень приятную для разума: это модели, обволакивающие A, добавляя к нему минимум возможного. Чтобы показать существование таких моделей и тем более чтобы показать их единственность, нам были необходимы сильные гипотезы стабильности, позволяющие полностью управлять их конструкцией.

Без этих гипотез приходится довольствоваться более приблизительными понятиями; если нет простых моделей, то можно по крайней мере попытаться строить модели, которые не добавляют слишком многого к A.

Крайний случай существования простых моделей – это когда T, как в случае арифметики, имеет *функции Сколема*, простая модель над A есть не что иное, как рациональное замыкание A: функция $\varphi(\bar{y})$ называется функцией Сколема для формулы без параметра $f(x, \bar{y})$, если следующая аксиома лежит в T:

$$\forall \bar{y}[\exists x f(x, \bar{y}) \to f(\varphi(\bar{y}), \bar{y})] \ .$$

Если теория T не обладает функциями Сколема, то их можно добавить; увеличиваем язык T, вводя новый символ функции $\varphi_f(\bar{y})$ для каждой формулы $f(x, \bar{y})$ языка T; отметим, что над любой моделью T можно интерпретировать φ_f так, чтобы удовлетворить каждую аксиому

$$\forall \bar{y}[\exists x f(x, \bar{y}) \to f(\varphi_f(\bar{y}), \bar{y})] \ ,$$

где $\varphi_f(\bar{b})$ интерпретируется как подходящий элемент, удовлетворяющий формулу $f(x, \bar{b})$, если таковые имеются, и неважно как, в противном случае.

Теперь рассмотрим полную теорию T^* в этом обогащенном языке, содержащем T и все эти новые аксиомы; такая теория называется *сколемизацией* T. Нет естественного выбора для этого пополнения; кроме того, свойства стабильности или многие другие для теории T не наследуются теорией T^*. Честно говоря, T^* сколемизирует только формулы языка T, что достаточно для наших целей; чтобы иметь теорию с функциями Сколема, надо повторить конструкцию ω раз.

Чтобы построить нечто вроде простых моделей, поступаем так: сначала берем множество A параметров из некоторой модели T; его можно рассматривать, но не каноническим образом, как множество параметров для T^*, так как каждая модель T имеет элементарное расширение, которое можно обогатить до модели T^*; теперь берем замыкание A функциями Сколема из языка T^* (это называется *оболочкой Сколема* A) , затем забываем добавленные символы: получаем таким образом структуру $M(A)$ языка T, являющуюся моделью T, так как она удовлетворяет тесту Тарского. Мы видим, что в конструкции $M(A)$ имеются по крайней мере два совсем не канонических этапа: выбор сколемизации T^* и пополнение теории A в новом языке.

Когда множество A является неразличимой последовательностью относительно данного порядка *для теории* T^*, то говорят, что $M(A)$ модель Эренфойхта; такая модель, таким образом, определяется тремя вещами:

– выбором T^*;

– множеством Эренфойхта в смысле T^* для неразличимой последовательности A (мы рассматриваем только множества бесконечных последовательностей);

– типом изоморфизма порядка I индексов элементов A.

На практике мы предполагаем, что два первых выбора уже сделаны, так что довольствуемся обозначением $M(I)$ такой модели. В качестве I можно брать любую цепь.

Ясно, что любой автоморфизм I продолжается до автоморфизма $M(I)$, что любой изоморфизм между I и J продолжается до изоморфизма между $M(I)$ и $M(J)$, что любое сохраняющее порядок вложение I в J продолжается до элементарного вложения $M(I)$ в $M(J)$.

Первоначальной целью этой конструкции была построение модели T, имеющей много автоморфизмов. Она мастерски была использована Шелахом, чтобы доказать следующую теорему:

Теорема 18.18 *Если теория T нестабильна, $\lambda \geq |T|$, λ – несчетный кардинал, тогда T имеет 2^λ попарно не изоморфных моделей мощности λ.*

Чтобы ее доказать, Шелах рассматривает модели Эренфойхта, соответствующие неразличимым последовательностям (кортежей), *упорядоченных некоторой формулой языка T*: это возможно по лемме 12.36 ; он доказывает, что если цепи I и J достаточно различные, то модели $M(I)$ и $M(J)$ не могут быть изоморфными; это дает максимум возможных моделей, равный 2^λ. Кроме того, тот же Шелах преуспел в том, чтобы распространить свой результат на несуперстабильные теории, ценой ужасно сложного доказательства, строя модели Эренфойхта вокруг "неразличимых" множеств, индексированных уже не цепями, а деревьями, заполненными формулами T.

Теорема 18.19 *Если теория T не суперстабильна и $\lambda > |T|$, тогда T имеет 2^λ попарно не изоморфных моделей мощности λ.*

Я не буду здесь приступать к доказательству этих теорем и не потому, что преуменьшаю их значимость (они должны быть врезаны в память каждого теоретико-моделиста, и даже каждого алгебраиста), а потому, что их доказательства нас увлекут к тонкой комбинаторной технике, чуждой духу этого курса, и еще потому, что я неспособен предложить чувствительные упрощения к аргументам Шелаха, на которые я сошлюсь. Отметим тем не менее, что мы получили в 14.11 совсем другим методом частный случай 18.18 .

Мы применяем модели Эренфойхта только для приводимого ниже результата, необходимого в последующем параграфе:

Лемма 18.20 *Если $M(I)$ – модель Эренфойхта, соответствующая полному порядку I, и A – подмножество $M(I)$, то существует не более $|A|+|T|$ типов в $S_1(A)$, реализующихся в $M(I)$.*

Доказательство. Мы собираемся считать типы над A в смысле теории T^*, реализованных в $M(I)$; каждый элемент a множества A имеет вид $\varphi(b_1, \ldots, b_n)$, где b_i лежит в I, значит найдется подмножество B индексов I, конечное или той же мощности, что A, рациональное замыкание которого содержит A. Подсчитаем типы над B, так как любые два элемента, имеющие один и тот же тип над B, будут иметь один и тот же тип над A.

Элемент c из $M(I)$ имеет вид $c = \varphi(d_1, \ldots, d_j)$, где d_j принадлежат I; его тип определен заданием φ и типа $\bar{d}$ над B; имеется T возможностей для выбора функции φ, являющейся композицией функций Сколема; из-за неразличимости I в смысле T^*, тип $\bar{d}$ над B определен сечениями, образованными каждым из d_j над B; так как B является полным порядком, имеется только $|B| + 1$ сечений над B.

□

Напомним, что теория T называется *λ-категоричной*, если она имеет с точностью до изоморфизма только единственную модель в мощности λ.

Следствие 18.21 *Если теория T счетна и категорична в несчетной мощности λ, то она тотально трансцендентна.*

Доказательство. Если T не ω-стабильна, то она имеет модель M мощности λ, содержащую счетное множество A, такое, что M реализует по крайней мере $\aleph_1$ типов из $S_1(A)$; по лемме 18.20 эта модель не может быть изоморфна модели Эренфойхта $M(\lambda)$.

□

18.f Теорема о двух кардиналах ; ω_1-категоричные теории

В этом параграфе предположим, что имеем дело с *тотально трансцендентной* теорией; в действительности, нужное свойство – стабильность, и с помощью нескольких технических поправок, результаты обобщаются на стабильный случай.

Пусть M – модель теории T, $f(x, \bar{b})$ – формула с параметрами из M и p – тип над M. Говорим, что *p ортогонален* формуле $f(x, \bar{b})$, если, когда p реализуется элементом a, то простая модель N над $M \cup \{a\}$ не содержит элементов, удовлетворяющих $f(x, \bar{b})$, кроме тех, что уже в M. Мы исключаем из обсуждения реализованные типы p, ортогональные каждой формуле.

Лемма 18.22 *Факт ортогональности p к $f(x, \bar{b})$ зависит только от его класса в фундаментальном порядке $T(\bar{b})$; если q является наследником p над элементарным расширением N модели M, то q ортогонален к $f(x, \bar{b})$, если и только если ей ортогонален p.*

Доказательство. Если p не ортогонален к $f(x, \bar{b})$, то найдется c в простой модели над $M \cup \{a\}$, c вне M, удовлетворяющий $f(x, \bar{b})$; тип c на $M \cup \{a\}$

изолирован некоторой формулой $g(x,a,\bar{d})$; таким образом, существует $\bar{d}$ в M, такой, что p содержит $(\exists y)[f(y,\bar{b}) \wedge g(y,x,\bar{d})]$, в то время как ни для какого y из M тип p не содержит формулу $f(y,\bar{b}) \wedge g(y,x,\bar{d})$. Это выражается через выполнимость некоторого предложения с параметром $\bar{b}$ в модели (M,dp) .

□

Парой Вота называется модель M и формула $f(x,\bar{b})$ с параметрами из M и собственное элементарное расширение N модели M, не содержащее новых элементов удовлетворяющих $f(x,\bar{b})$. Мы исключаем из обсуждения тривиальный случай, когда $f(x,\bar{b})$ удовлетворяется только конечным числом элементов.

Если счетная теория имеет модель M мощности λ с формулой $f(x,\bar{b})$, удовлетворяющейся $\varkappa$ элементами M, где $\varkappa$ строго меньше λ, то получаем пару Вота беря элементарное ограничение M на N мощности $\varkappa$, содержащее $\bar{b}$ и все эти элементы.

Предложение 18.23 (Теорема двух кардиналов для тотально трансцендентной теории) *Если теория T тотально трансцендентна и имеет пару Вота с соответствующей формулой $f(x,\bar{b})$, то для любых мощностей $\varkappa$ и λ, где $|T| \leq \varkappa \leq \lambda$, существует модель M теории $T(\bar{b})$ мощности λ, в которой имеется точно $\varkappa$ элементов, удовлетворяющих $f(x,\bar{b})$.*

Доказательство. Если имеется пара Вота (N,M), то найдется нереализованный тип p из $S_1(M)$ ортогональный к $f(x,\bar{b})$: возьмите тип любого элемента из $N \setminus M$. По 18.22 находим такой p над моделью M, содержащей $\bar{b}$, той же мощности, что и T. Начнем с расширения M до модели M_0 мощности $\varkappa$, содержащей $\varkappa$ элементов, удовлетворяющих $f(x,\bar{b})$, что делается простым применением теоремы Левенгейма-Сколема. Пусть p_0 – наследник p над M_0, реализующийся элементом a_0: в модели M_1, простой над $M_0 \cup \{a_0\}$, нет новых элементов, удовлетворяющих $f(x,\bar{b})$; затем элементом a_1 реализуем наследник p_1 типа p_0 над M_1 ; в модели M_2 простой над $M_1 \cup \{a_1\}$ также нет новых элементов, удовлетворяющих $f(x,\bar{b})$; затем повторяем λ раз, беря пределы на предельных шагах. Модель M_λ полученная в конце является тем, что и нужно, она в действительности проста над M_0 и последовательностью Морли p_0 (см. 20.a).

□

Предложение 18.24 *Пусть теория T тотально трансцендентна, и кардинал λ строго больше, чем мощность T. Тогда T λ-категорична, если и только, если она не имеет пар Вота.*

Доказательство. Если T имеет пару Вота для формулы $f(x,\bar{b})$, то по 18.23 можно строить модель M теории T мощности λ, содержащую только $|T|$ элементов, удовлетворяющих $f(x,\bar{b})$; эта модель не изоморфна насыщенной модели мощности λ.

Сильно минимальной формулой называют формулу $f(x,\bar{a})$ ранга Морли 1 и степени Морли 1; это означает, что для любой формулы $g(x,\bar{b})$ одна из формул $g(x,\bar{b}) \wedge f(x,\bar{a})$ или $\neg g(x,\bar{b}) \wedge f(x,\bar{a})$ (и только одна!) удовлетворяется конечным числом элементов; так как где-то должны существовать типы ранга

Морли 1, такая формула существует. Докажем сначала, что отсутствие пар Вота обязывает существование сильно минимальной формулы с параметрами из простой модели M_0 теории T.

Отметим, что с каждой формулой $f(x,\bar{y})$ ассоциировано натуральное число n, такое, что для $\bar{a}$, как только имеется n элементов, удовлетворяющих $f(x,\bar{a})$, то их найдется бесконечное число (другими словами можно выражать некоторым предложением с параметрами $\bar{a}$ факт, что формула $f(x,\bar{a})$ – неалгебраическая); иначе, для каждого n нашелся бы кортеж $\bar{a}_n$ в модели M_n теории T, такой, что $f(x,\bar{a}_n)$ удовлетворяется конечным числом, но большим, чем n, элементов M_n ; собственное расширение N_n модели M_n не может, очевидно, содержать новые элементы, удовлетворяющие этой алгебраической формуле; тогда ультрапроизведение этих моделей дает формулу $f(x,\bar{a})$ с великолепной парой Вота (N,M).

Теперь рассмотрим, над простой моделью M_0, формулу $f(x,\bar{a})$ ранга Кантора 1 и степени Кантора 1; если эта формула имела бы ранг Морли или степень Морли выше 1, то мы могли бы ее разделить на две неалгебраические формулы $g(x,\bar{b})$ и $h(x,\bar{c})$, с параметрами $\bar{b}$ и $\bar{c}$ в элементарном расширении M_0; так как мы можем выражать неалгебраичность этих формул предложением о параметрах, мы бы нашли $\bar{b}'$ и $\bar{c}'$ в M_0, имеющие то же свойство: это противоречит определению ранга Кантора. Следовательно, $f(x,\bar{a})$ сильно минимальна.

Зафиксируем сильно минимальную формулу $f(x,\bar{a})$ с параметрами из простой модели M_0. Пусть M – модель мощности λ; так как тип $\bar{a}$ над $\emptyset$ изолирован, то он реализуется в M кортежом, который мы обозначим также через $\bar{a}$; если обозначим через A множество элементов M, удовлетворяющих $f(x,\bar{a})$, отсутствие пары Вота для $f(x,\bar{a})$ вынуждает M быть простой, и даже минимальной, над $\bar{a}^\frown A$; обозначим через p тип над $\bar{a}$ ранга Морли 1, удовлетворяющий $f(x,\bar{a})$; пусть B – максимальное независимое множество реализаций p: так как A содержится в алгебраическом замыкании $\bar{a}^\frown B$, M проста над этим множеством; из мощностных соображений необходимо, чтобы B была последовательностью Морли типа p длины λ, что определяет полностью тип $\bar{a}^\frown B$, а значит, так же и тип M.

$\square$

Следствие 18.25 (Теорема Морли) *Если теория T счетна и категорична в несчетной мощности, то она категорична в каждой несчетной мощности.*

Доказательство. По 18.21 теория T ω-стабильна.

$\square$

Эти теории называются очень просто $\aleph_1$-*категоричными*, или ω_1-*категоричными* ; будьте осторожны в том, что теория, интерпретируемая в $\aleph_1$-категоричной теории, сама таковой, вообще говоря, не является (вопреки тому, что это проходит с ω-категоричностью); например, возьмите структуру или язык, включающий унарный предикат $A(x)$, удовлетворяющийся бесконечным числом элементов, и биекцию s между A и его дополнением. Она ω_1-категорична; забудьте s и вы найдете три модели T мощности $\aleph_1$.

Как уже часто делалось в этом курсе, я доказал теорему 18.25 преждевременно; она, в действительности, следствие более точной теоремы из раздела

20.b . Если я ее выдвинул вперед, то это прежде всего потому, что она не требует слишком сложного технического арсенала как тот, который читатель должен переварить в двух следующих главах, а также из уважения к истории. Это доказательство не очень отличается от оригинального доказательства Майкла Морли, являющегося точкой отсчета изучения стабильности, то есть современной теории моделей.

18.g Исторические и библиографические примечания

Красивое доказательство единственности простой модели, в 18.2 из [ШЕЛАХ, 1979]; второе, 18.5, рассматривающее длины неразличимых последовательностей, представленных в модели, – более старое: [ШЕЛАХ, 1972]; конец 18.b взят из [ПУАЗА, 1981b].

Изучение теории Галуа-Колчина в свете теории моделей было сделано в [ПУАЗА, 1983c]. Для ссылок на дифференциальные поля смотри примечания к главам 6 и 10 . Простые $|T|^+$-насыщенные модели являются частным случаем пяти главных видов простых моделей, придуманных Шелахом в [ШЕЛАХ, 1978]; положение с тех пор осложнилось.

Функции Сколема восходят к [СКОЛЕМ, 1920], а модели Эренфойхта к [ЭРЕНФОЙХТ-МОСТОВСКИЙ, 1956], вместе с доказательством 18.20 ; они позволили Шелаху построить много моделей для нестабильной теории, [ШЕЛАХ, 1971], [ШЕЛАХ, 1978]; для другого подхода к проблеме, см. [ШАРТОН-ПУЗЕ, 1983]. Теорема 18.23 из [МОРЛИ, 1965].

Пары Вота появились в [ВОТ, 1965]; впоследствии, теоретиков моделей, кажется, охватило уже что-то вроде бешенства привязывать свои имена к "теоремам двух кардиналов" (один для модели, один для формулы), откуда невероятное многообразие теорем такого рода расцвело в конце шестидесятых годов.

Как я уже сказал и повторил, теорема Морли 18.25 является нашим вторым рождением [МОРЛИ, 1965]; он ответил на одно предположение Лося. Можно в ней элиминировать гипотезу "T счетна" (т.е. если T категорична в мощности строго большей мощности T, то она категорична во всех таких мощностях); это было сделано в несколько этапов, [РОУБОТТОМ, 1964], [РЕССЭР, 1969], [ШЕЛАХ, 1969]; см. [ШЕЛАХ, 1978] , с. 469 и с. 512.

Всякая ω_1-категоричная теория имеет конечный ранг Морли, и, какова бы ни была рассматриваемая модель, ранг Морли типа равен его рангу Кантора [БОЛДУИН, 1973]; он также равен его рангу Ласкара [ПУАЗА, 1978].

Теорема Морли обсуждается в книге [САКС, 1972], представляющей наглядный труд, сегодня устаревший, но который был очень полезным в свое время и чтение которого покажется приятным отдыхом для читателя, который собирается приступить к изучению последних двух глав настоящей книги.