Глава 19

Стабильность, неразличимые последовательности и вес

> Si vous voulez simplifier, évitez de compliquer, car ce n'est pas en compliquant que vous simplifierez.
>
> (Essai sur la vulgarisation)
>
> M.T.

19.a Неразличимые последовательности

Много раз речь заходила о неразличимых последовательностях в главе 12 , а также в 16.c ; теперь я собираюсь изучить их свойства, которые в сущности мы уже знаем, при предположении, что теория T стабильна; как обычно, я рассматриваю только последовательности элементов, но все можно обобщить без проблем и на последовательности кортежей.

Рассмотрим последовательность $a_0, \ldots, a_\alpha, \ldots$, индексированную ординалом (можно также рассматривать последовательности, индексированные произвольными цепями) и образованную из элементов модели M теории T ; изучим некоторые свойства этой последовательности относительно множества параметров A , которое может быть и пустым, и о котором мы не будем упоминать постоянно. Обозначим через $A_\alpha = A \cup \{a_\beta\}_{\beta<\alpha}$ и через p_α тип a_α над A_α .

Говорим, что эта последовательность является :

– *возрастающей*, если p_α является сыном p_β каждый раз, когда $\beta > \alpha$; в этом случае обозначим через p предел всех p_α ;

– *неразличимой*, если каждый раз, когда $\alpha_0 < \cdots < \alpha_n$, то $(a_{\alpha_0}, \ldots, a_{\alpha_n})$ и $(a_0, \ldots, a_n)$ имеют один и тот же тип над A;

– *независимой*, если для всех α тип p_α не отклоняется над A;

– *последовательностью Морли*, если она независима и если все a_α имеют один и тот же сильный тип на A.

Неразличимая последовательность, очевидно, возрастающая; если она бесконечна, то мы знаем, что ввиду стабильности она *тотально неразличима*, то есть $(a_0, \ldots, a_n)$ и $(a_{\alpha_0}, \ldots, a_{\alpha_n})$ имеют один и тот же тип над A, как только $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ попарно различны; а также, что она *неделима* (свойство, которое не зависит от A), то есть для любой формулы $f(x, \bar{b})$ имеется лишь конечное число a_α удовлетворяющих $f(x, \bar{b})$, или конечное число a_α удовлетворяющих $\neg f(x, \bar{b})$; кроме того, эти конечные числа ограничены в зависимости только от $f(x, \bar{y})$. Тогда называем *средним типом* или *предельным типом* нашей последовательности над B тип, образованный из формул с параметрами из B, удовлетворяющихся всеми a_α , за исключением конечного числа. Чтобы вспомнить все это, вернитесь к главе 12, разделы с 12.c по 12.g .

Напоминаем, что если последовательность $a_0, \ldots, a_\alpha, \ldots$ независима, тогда множество $\{a_0, \ldots, a_\alpha, \ldots\}$ независимо. Это означает, что для всех α тип a_α над $A \cup \{a_\beta\}_{\beta\neq\alpha}$ не отклоняется над A. Вследствие финитистского характера отклонения, достаточно проверить это для конечной последовательности $a_0, \ldots, a_n$; по определению, тип a_n над $A \cup \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ не отклоняется над A ; по симметричности и транзитивности отклонения мы видим, что если поменять два соседних элемента последовательности, то получаем снова независимую последовательность; посредством конечного числа транспозиций, переводим любой a_i на последнее место, что доказывает требуемое.

Теперь ясно, что то, что мы называем здесь последовательностями Морли, являются последовательностями Морли сильных типов, которые были определены в 16.c ; они являются неразличимыми.

Возрастающая, достаточно длинная последовательность (или лучше достаточно большой конфинальности) будет сильно стремится стать последовательностью Морли начиная с некоторого индекса; более точно, если последовательность имеет длину α и α имеет конфинальность по крайней мере $\kappa(T)$, то типы p_β, $\beta < \alpha$, не могут быть конфинально ответвляющимися расширениями один другого, так что начиная с некоторого β_0 последовательность становится независимой над A_{β_0} ; она может не стать тем не менее морлиевской, так как a_β, $\beta > \beta_0$ необязательно имеют один и тот же сильный тип над A_{β_0} ; рассмотрим отношение эквивалентности E с n классами, определенное формулой с параметрами из этого множества; если a_{β_0} не конгруэнтен a_{β_0+1} по модулю E, то он не конгруэнтен никакому следующему из-за роста последовательности; так же, если a_{β_0+1} не конгруэнтен a_{β_0+2} , то он не конгруэнтен никакому следующему, и т.д. Так как E имеет только n классов, то обязательно начиная с a_{β_0+n-1} все эти элементы будут в одном и том же классе. Если, таким образом, кратность p конечна, то через конечное число шагов получаем морлиевскую последовательность над A_{β_0+n} ; иначе, возможно потребуется ω шагов, чтобы определить сильный тип, но не больше, каким бы ни было число классов E, которые нужно рассмотреть, и в любом случае последовательность становится морлиевской над $A_{\beta_0+\omega}$, если однако у нее останутся еще элементы !

В случае когда последовательность,кроме того, неразличима, обязательно a_{β_0} и a_{β_0+1} будут конгруэнтны по модулю E, так как иначе E будет иметь бесконечное число классов; следовательно, в этом случае, последовательность становится стационарной с шага, следующего за β_0 .

Начиная с главы 14 мы пользуемся тем фактом, что большинство элементов длинной неразличимой последовательности реализуют средний тип над $\bar{b}$ этой последовательности (см. лемму 14.1) ; обобщим это свойство, показывая, что кортеж $\bar{b}$ может заставить отклоняться лишь небольшое число элементов независимой последовательности.

Лемма 19.1 *Пусть $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_\alpha, \ldots$ – независимая последовательность кортежей над A; для данного $\bar{b}$, число индексов α, таких, что тип $\bar{a}_\alpha$ над $A_\alpha \cup \{\bar{b}\}$ отклоняется над A, строго меньше $k(T)$; оно конечно, если $tp(\bar{b}/A)$ суперстабилен.*

Доказательство. Так как $tp(\bar{a}_\alpha/A_\alpha)$ не отклоняется над A, то $tp(\bar{a}_\alpha/A_\alpha \cup \{\bar{b}\})$ отклоняется над A, если и только если он отклоняется над A_α , и если и только если, по симметричности, $tp(\bar{b}/A_\alpha \cup \{\bar{a}_\alpha\} = tp(\bar{b}/A_{\alpha+1})$ отклоняется над A_α ; это происходит меньше $k(T)$ раз, а в действительности меньше, чем кардинал, ограничивающий убывающие ординальные цепи ниже грани $tp(\bar{b}/A)$ в фундаментальном порядке.

□

Если, таким образом, уберем из нашего независимого множества ограниченное число этих a_α , тип которых над $A_\alpha \cup \{\bar{b}\}$ отклоняется над A, *то увидим что множество, образованное из $\bar{b}$ (его надо поставить первым) и других a_β , независимо над A.*

Следующий факт также является непосредственным следствием этой леммы: в независимой последовательности *имеется строго меньше, чем $k(T)$, кортежей a_α , таких, что $tp(a_\alpha/A \cup \{\bar{b}\})$ отклоняется над A.*

19.b Неравенства Ласкара

Начнем этот параграф с небольшого экскурса в ординальную арифметику. Напомним, что ординальная *сумма* двух ординалов α и β получается расположением впритык копии β после копии α , и каждый элемент первого будет меньше каждого элемента второго; сумма может также определяться индукцией по β :

– $\alpha + 0 = \alpha$,

– если β – предельный ненулевой ординал, то $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$,

– $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$.

Эта сумма ассоциативна, но не коммутативна $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$; она сократима слева, так как $\alpha + \beta$ имеет только единственный начальный сегмент, изоморфный α , но не сократима справа.

Произведение $\alpha \cdot \beta$ получается лексикографическим упорядочением декартового произведения $\alpha \times \beta$, *давая приоритет второй координате*: $\alpha \times \beta$ является суммой β копий α ; его также можно определять индукцией:

– если β – предельный ординал, то $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma \ : \ \gamma < \beta\}$, в частности $\alpha \cdot 0 = 0$,

– $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$.

Произведение ассоциативно, но не коммутативно: $2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2 = \omega + \omega$; оно дистрибутивно слева, но не справа, для суммы: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Определим теперь степень α^β индукцией по β :

– $a^0 = 1$,

– если β – предельный ненулевой ординал, то $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \ : \ \gamma < \beta\}$,

– $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.

Нетрудно показать индукцией по γ , что $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$. Именно для того, чтобы иметь это тождество, мы определили произведение таким способом.

Не путайте ординальную и кардинальную степени; с точки зрения мощности, ω^ω обозначает множество отображений из ω в ω , мощность которого равна 2^ω ; с точки зрения ординалов, $2^\omega = \sup\{2^n \ : \ n \in \omega\} = \omega$, и $\omega^\omega = \sup\{\omega^n \ : \ n \in \omega\} = \omega^\omega$ являются счетными ординалами; так как контексты, где появляются этих два понятия достаточно дизъюнктны, мы не вводим два вида обозначений.

Лемма 19.2 *Ординалы вида ω^α являются такими ординалами β, что для всех $\gamma < \beta$ верно $\gamma + \beta = \beta$.*

Доказательство. Предположим, что $\beta = \omega^\alpha$ и $\gamma < \beta$; если α – предельный ординал, то $\gamma < \omega^{\alpha'}$ для некоторого $\alpha' < \alpha$; по гипотезе индукции $\gamma + \omega^{\alpha'} = \omega^{\alpha'}$, откуда следует заключение леммы, так как $\omega^{\alpha'}$ является начальным сегментом ω^α . Если $\beta = \omega^{\alpha+1}$ то для некоторого n справедливо неравенство $\omega^\alpha \cdot n \leq \gamma < \omega^\alpha \cdot (n+1)$ и $\gamma = \omega^\alpha \cdot n + \gamma'$, где $\gamma' < \omega^\alpha$; по гипотезе индукции

$$\gamma + \omega^{\alpha+1} = \omega^\alpha \cdot n + \gamma' + \omega^\alpha \cdot \omega = \omega^\alpha \cdot n + \gamma' + \omega^\alpha + \omega^\alpha \cdot \omega =$$

$$= \omega^\alpha \cdot (n + 1 + \omega) = \omega^\alpha \cdot \omega = \omega^{\alpha+1}$$

Предположим теперь, что для всех $\gamma < \beta \quad \gamma + \beta = \beta$; тогда пусть α – наименьший ординал такой, что $\beta \leq \omega^\alpha$ (который существует, так как $\beta \leq \omega^\beta$) ; если α пределен, то $\beta = \omega^\alpha$; если $\alpha = \delta + 1$, то $\omega^\delta + \beta = \beta, \quad \omega^\delta + \omega^\delta + \beta = \beta$, и т.д. Значит, $\omega^\delta \cdot n < \beta$ для каждого n, $\beta \geq \omega^{\delta+1}, \quad \beta = \omega^\alpha$.

□

Все умеют записывать целые числа в десятичной системе. Среди тех, кто посещал среднюю школу, мало кто знает, что их можно записывать также в двоичной системе. Для ординалов можно выбрать произвольное основание системы, но мы сконцентрируем наше внимание над системой с основанием ω .

Лемма 19.3 *Каждый ненулевой ординал α записывается единственным способом в виде $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot n_m$, где $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_m$ и $n_l, n_2, \ldots, n_m$ ненулевые натуральные числа.*

Доказательство. Докажем сначала существование такой записи. Пусть α'_1 – наименьший ординал, такой, что $\omega^{\alpha'_1} > \alpha$, этот ординал не может быть предельным. Значит, $\alpha'_1 = \alpha_1 + 1$ и существует ненулевое число n_1 такое, что $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1} \cdot (n_1 + 1)$, тогда $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \beta_1$, с $\beta_1 < \omega^{\alpha_1}$. Если $\beta_1 = 0$, то получаем то, что требовалось, иначе повторяем процедуру для β_1 , и получаем разложение $\beta_1 = \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \beta_2$, где $\beta_2 < \omega^{\alpha_2}$. Процесс должен завершиться через конечное число шагов, так как последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ является убывающей последовательностью ординалов.

Для доказательства единственности заметим, что α_1 и n_1 характеризовались оценками $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1} \cdot (n_1 + 1)$, и воспользуемся тем, что сумма сократима слева.

□

Разложением Кантора ординала α называется его запись в виде $\alpha = \sum \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$, где все n_i , за исключением конечного числа, равны нулю и соответствующие ненулевым n_i показатели α_i следуют по убыванию. Предыдущая лемма утверждает существование и единственность этого разложения для любого ординала α .

Как сравнивать два ординала α и β зная их разложения Кантора $\alpha = \sum \omega^{\alpha_i} \cdot n_i$ и $\beta = \sum \omega^{\beta_i} \cdot m_i$? Рассмотрим сначала наибольшие слагаемые с ненулевыми коэффициентами: $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots$, $\beta = \omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \ldots$. Если $\alpha_1 > \beta_1$, тогда $\alpha > \beta$; если $\alpha_1 = \beta_1$ и $n_1 > m_1$, тогда также $\alpha > \beta$; если $\alpha_1 = \beta_1$ и $n_1 = m_1$, то надо сравнить два остатка, которые строго меньше ω^{α_1} . Таким образом, мы видим, что полный порядок ординалов выражается как лексикографический порядок на конечных последовательностях ненулевых натуральных чисел, индексированных ординалами, где приоритет дается наибольшему индексу (можно, впрочем, определить ω^α как множество отображений из α в ω , принимающих значение 0, за исключением конечного числа точек, упорядоченных по этому принципу) .

Как найти разложение Кантора суммы $\alpha+\beta$? По 19.2 слагаемое $\omega^{\beta_1}\cdot m_1$ поглощает все $\omega^{\alpha_p}\cdot n_p$ с $\alpha_p<\beta_1$; таким образом, если $\alpha_q=\beta_1$ то, возможно с нулевым n_q , мы имеем $\alpha+\beta=\omega^{\alpha_1}\cdot n_1+\cdots+\omega^{\beta_1}\cdot(n_q+m_1)+\cdots+\omega^{\beta_s}\cdot m_s$. Например, если $\alpha=\omega^\omega+\omega^3\cdot 6+\omega^2+4$, $\beta=\omega^3+\omega\cdot 6$, то $\alpha+\beta=\omega^\omega+\omega^3\cdot 7+\omega\cdot 6$.

Вводим теперь новую операцию, *естественную сумму* $\alpha\oplus\beta$ двух ординалов, являющийся ординалом, полученным суммированием разложения Кантора α и β : если $\alpha=\sum\omega^{\alpha_i}\cdot n_i$ и $\beta=\sum\omega^{\alpha_i}\cdot m_i$, тогда

$$\alpha\oplus\beta=\sum\omega^{\alpha_i}\cdot(n_i+m_i)\ .$$

Эта естественная сумма коммутативна, ассоциативна и сократима: все это является следствием единственности разложения Кантора. Она позволяет делать рекурсию одновременно по двум переменным: *если $\alpha\le\alpha'$ и $\beta\le\beta'$ и хотя бы одно из этих двух неравенств – строгое, тогда $\alpha\oplus\beta<\alpha'\oplus\beta'$.*

Чтобы говорить о неранжированных типах, добавим к ординалам символ ∞ , с соглашениями $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty$. Вся эта арифметика нам послужит в следующей теореме, позволяющей оценить, а в некоторых случаях точно подсчитать U-ранг n-ки через U-ранги типов элементов. *Надо подчеркнуть тот факт, что именно ранг U Ласкара наделен этим свойством, а не какой либо другой ранг.* Обозначаем через $tp(\bar a/A)$ тип $\bar a$ над A, а через $RU(\bar a/A)$ его ранг Ласкара.

Теорема 19.4 (Неравенство Ласкара)

$$RU(\bar b/A\cup\{\bar a\})+RU(\bar a/A)\le RU(\bar a^\frown\bar b/A)\le RU(\bar b/A\cup\{\bar a\})\oplus RU(\bar a/A)$$

Доказательство. Начнем с первого неравенства, и докажем индукцией по α , что если $RU(\bar a/A)\ge\alpha$, то $RU(\bar b/A\cup\{\bar a\})+\alpha\le RU(\bar a^\frown\bar b/A)$.

Если $\alpha=0$, то доказываем индукцией по ординалу β , что неравенство $RU(\bar b/A\cup\{\bar a\})\ge\beta$ влечет $RU(\bar a^\frown\bar b/A)\ge\beta$. Нет проблем, если β – предельный ординал, если же $RU(\bar b/A\cup\{\bar a\})\ge\beta+1$ и $tp(\bar b/A\cup\{\bar a\})$ – нестабильный, то видим через подсчет числа типов, что $tp(\bar a^\frown\bar b/A)$ – также нестабильный; иначе $tp(\bar b/A\cup\{\bar a\})$ имеет отклоняющегося сына с RU по крайней мере β. Тогда можно найти множество $B\supset A$, такое, что $RU(\bar b/B\cup\{\bar a\})\ge\beta$ и $tp(\bar b/B\cup\{\bar a\})$ отклоняется над A; по теореме 15.9 $tp(\bar a^\frown\bar b/B)$ нестабилен или отклоняется над A и по гипотезе индукции имеет RU по крайней мере β, откуда и следует заключение.

Нет проблем также для любого ординала α, предельного и ненулевого. Если $RU(\bar a/A)\ge\alpha+1$, то или $tp(\bar a/A)$ нестабилен и тогда точно таким же является и $tp(\bar a^\frown\bar b/A)$, или он имеет неотклоняющегося сына с RU по крайней мере α. Тогда находим множество $B\supset A$, такое, что $RU(\bar a/B)\ge\alpha$, $tp(\bar a/B)$ отклоняется над A; располагаем B по отношению к $\bar b$ так, чтобы тип $\bar b$ над

$B \cup \{\bar{a}\}$ не отклонялся над $A \cup \{\bar{a}\}$ (можно предполагать, что тип $\bar{b}$ над $A \cup \{\bar{a}\}$ – стабильный, так как иначе тип $\bar{a}^\frown\bar{b}$ над A будет нестабильным); по гипотезе индукции $RU(\bar{b}/B \cup \{\bar{a}\}) + \alpha \leq RU(\bar{a}^\frown\bar{b}/B)$. Заключение следует из того, что $RU(\bar{b}/B \cup \{\bar{a}\}) = RU(\bar{b}/A^\frown\{\bar{a}\})$ и из того, что $tp(\bar{a}^\frown\bar{b}/B)$ отклоняется над A, по теореме 15.9.

Теперь докажем второе неравенство; оно очевидно, если один из членов правой стороны бесконечен; если $tp(\bar{a}^\frown\bar{b}/A)$ нестабилен, то через подсчет числа типов видим, как уже было отмечено, что $tp(\bar{a}/A)$ или $tp(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\})$ нестабилен. В других случаях доказываем индукцией по α , что если $RU(\bar{a}^\frown\bar{b}/A)$ больше или равен α, то тоже самое верно и для второго члена неравенства; это ясно, если α – предельный ординал. Если $RU(\bar{a}^\frown\bar{b}/A) \geq \alpha + 1$, то существует множество $B \supset A$ такое, что $RU(\bar{a}^\frown\bar{b}/B) \geq \alpha$ и $tp(\bar{a}^\frown\bar{b}/B)$ отклоняется над A ; по теореме 15.9 , $tp(\bar{a}/B)$ отклоняется над A или $tp(\bar{b}/B \cup \{\bar{a}\})$ отклоняется над B . По гипотезе индукции $\alpha \leq RU(\bar{b}/B \cup \{\bar{a}\}) \oplus RU(\bar{a}/B)$; заключение следует из того, что $RU(\bar{a}/B) \leq RU(\bar{a}/A)$, $RU(\bar{b}/B \cup \{\bar{a}\}) \leq RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\})$ и что одно из этих неравенств – строгое.

□

Неравенства Ласкара становятся равенствами в случае, когда RU конечны, или в большей общности, когда все RU имеют вид $\omega^\alpha \cdot n$, для одного того же α . Что касается общего случая, полезно будет размышлять над следующим примером: T является теорией дифференциально замкнутых полей нулевой характеристики, элемент a дифференциально трансцендентен над A, а b является производной от a :

$$RU(b/A \cup \{a\}) + RU(a/A) = 0 + \omega = \omega$$

$$RU(a/A \cup \{b\}) + RU(b/A) = 1 + \omega = \omega$$

$$RU(a^\frown b/A) = \omega$$

$$RU(b/A \cup \{a\}) \oplus RU(a/A) = 0 \oplus \omega = \omega$$

$$RU(a/A \cup \{b\}) \oplus RU(b/A) = 1 \oplus \omega = \omega\ .$$

Теорема 19.5 *Если $tp(\bar{a}/A)$ и $tp(\bar{b}/A)$ стабильны и если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ независимы над A , тогда $RU(\bar{a}^\frown\bar{b}/A) = RU(\bar{a}/A) \oplus RU(\bar{b}/A)$.*

Доказательство. Так как $RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) = RU(\bar{b}/A)$, то достаточно понять, что $RU(\bar{a}^\frown\bar{b}/A) \geq RU(\bar{a}/A) \oplus RU(\bar{b}/A)$. По теореме 19.4 это верно, если один из рангов RU равен ∞ ; в противном случае, индукцией по α доказываем, что если $RU(\bar{a}/A) \geq \alpha$ и $RU(\bar{b}/A) \geq \beta$, тогда $RU(\bar{a}^\frown b/A) \geq \alpha \oplus \beta$; действительно, рассмотрим $\alpha' < \alpha$; существует множество $B \supset A$ такое, что $RU(\bar{a}/B) = \alpha'$; кроме того, можно выбрать B так, что тип $\bar{b}$ над $B \cup \{\bar{a}\}$ не отклонялся над $A \cup \{\bar{a}\}$ так же, как над A. Кортежи $\bar{a}$ и $\bar{b}$ тогда будут независимыми над B и по индукционной гипотезе $RU(\bar{a}^\frown\bar{b}/B) \geq \alpha' \oplus \beta$. Так как $tp(\bar{a}/B)$ отклоняется над A, $tp(\bar{a}^\frown\bar{b}/B)$ также отклоняется над A. Отсюда $RU(\bar{a}^\frown\bar{b}/A) > \alpha' \oplus \beta$ и поэтому $RU(\bar{a}^\frown\bar{b}/A) \geq \alpha \oplus \beta$.

□

Теорема 19.6 *Если* $tp(\bar{a}/A\cup\{\bar{b}\})$ *суперстабилен и* $RU(\bar{a}/A) \geq RU(\bar{a}/A\cup\{\bar{b}\})\oplus \alpha$ *, то* $RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \alpha$ *.*

Доказательство. Индукцией по $RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus \alpha$; для данного $\beta < \alpha$ выбираем B, расширяющее A, такое, что $tp(\bar{a}/B)$ отклонялся над A, и так, чтобы $RU(\bar{a}/B) \geq RU(\bar{a}/A\cup\{\bar{b}\})\oplus\beta$; действительно, по 12.33 и 15.13 в качестве B можно брать фрагмент последовательности Морли некоторого сына $tp(\bar{a}/A)$, и тогда тип B над A будет стабильным. Располагаем B так, чтобы $tp(\bar{b}/B\cup\{\bar{a}\})$ не отклонялся над $A \cup \{\bar{a}\}$, и различаем два случая:

(i) $tp(\bar{b}/B)$ отклоняется над A, $RU(\bar{b}/A)$ бесконечен или строго больше $RU(\bar{b}/B)$; по гипотезе индукции
$RU(\bar{b}/B) \geq RU(\bar{b}/B \cup \{\bar{a}\}) + RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \beta$.

(ii) $tp(\bar{b}/B)$ не отклоняется над A; по симметрии тип B над $A \cup \{\bar{b}\}$ не отклоняется над A, но напротив тип B над $A \cup \{\bar{a}\}$ отклоняется над A, таким образом необходимо (следите за гранями), что тип B над $A \cup \{\bar{a}, \bar{b}\}$ отклоняется над $A \cup \{\bar{b}\}$, то есть $RU(\bar{a}/B \cup \{\bar{b}\}) < RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\})$, откуда $RU(\bar{b}/B) \geq RU(\bar{a}/B \cup \{\bar{b}\}) \oplus (\beta + 1)$ и по гипотезе индукции
$RU(\bar{b}/A) = RU(\bar{b}/B) \geq RU(\bar{b}/B \cup \{\bar{a}\}) + \beta + 1 = RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \beta + 1$.

В обеих случаях $RU(\bar{b}/A) > RU(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) + \beta + 1$, откуда результат следует по непрерывности суммы справа.

□

Следствие 19.7 (Лемма симметрии Ласкара) *Если* $tp(\bar{a}/A\cup\{\bar{b}\})$ *суперстабилен и* $RU(\bar{a}/A) \geq RU(A\cup\{\bar{b}\})+\omega^\alpha\cdot n$ *, то* $RU(\bar{b}/A) \geq RU(\bar{b}/A\cup\{\bar{a}\})+\omega^\alpha\cdot n$ *.*

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то $RU(\bar{a}/A \cup \{b\}) + n = RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus n$; иначе $\omega^\alpha\cdot n$ пределен и для всех β, строго меньших него, $RU(\bar{a}/A\cup\{\bar{b}\})+\omega^\alpha\cdot n > RU(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus \beta$; результат следует из предыдущей теоремы.

□

Лемму Ласкара надлежит интерпретировать как усиление свойства симметрии отклонения: если $\bar{b}$ заставляет отклоняться тип $\bar{a}$ по крайней мере $\omega^\alpha \cdot n$ раз, тогда $\bar{a}$ заставляет отклоняться тип $\bar{b}$ по крайней мере $\omega^\alpha \cdot n$ раз.

19.с Вес суперстабильного типа

Рассмотрим множество X элементов или кортежей из модели M стабильной теории T . Вследствие финитистского характера отклонения, существуют максимально независимые множества (над $\emptyset$ или над фиксированным множеством параметров A) из X : такое множество назовем *базой* X . Если, например, X составлено из реализаций типа p в модели M , и если мы сможем доказать, что две базы всегда имеют одно и то же число элементов, тогда получим инвариант соответствующий модели M , некоторый кардинал, который назовем *размерностью* X . Проблема в том, что две различные базы, вообще говоря, не обязаны иметь один и тот же кардинал; чтобы такой факт имел место, необходимо располагать аналогом *леммы о замене* о базисах векторных пространств, где один элемент некоторого базиса заменяется единственным элементом другого базиса.

Вот тут и вводится понятие *веса*; в случае векторных пространств, элементы, или скорее их типы, имеют единичный вес; если элемент имеет тип веса n, то в подходящей версии леммы о замене он сможет заменить до n элементов. Например, если T – теория бесконечного множества и $X = \{(a,b),(a,c),(b,d)\}$, где a,b,c,d – различные элементы, то имеем в качестве баз $\{(a,b)\}$ и $\{(a,c),(b,d)\}$: это вызвано тем фактом, что тип (a,b) имеет вес два (и эти пары становятся элементами в T^{eq}). Вес типа есть то, что мешает кардиналам баз выйти за пределы некоторых границ.

Пусть тип p лежит в $S_1(A)$; говорим, что *вес p строго меньше $\varkappa$*, если для всех множеств B, содержащих A, и всех a , реализующих неответвляющееся расширение p над B, в каждой независимой над B последовательности s можно удалить меньше $\varkappa$ элементов из s так, чтобы получить последовательность s' , независимую над $B \cup \{a\}$. *Вес p* будет максимумом кардиналов $\varkappa$, если он существует, для которых вес p не строго меньше $\varkappa$; с этим соглашением возможно, что тип имеет вес строго меньше ω и не имеет конечного веса; в применениях мы главным образом рассмотрим типы конечного веса. Вес характеризуется также следующим образом:

Лемма 19.8 *Вес типа p меньше $\varkappa$, если и только если для всех B, расширяющих A, каждой независимой последовательности s над B и всех a, реализующих неответвляющееся расширение p над B, имеется меньше $\varkappa$ элементов из s, тип которых над $B \cup \{a\}$ отклоняется над B.*

Доказательство. Если вес p меньше $\varkappa$, то критерий подтверждается, так как все такие элементы должны быть удалены, чтобы образовать s'.

Обратно, рассмотрим B,a,s, такие, как в определении веса и пусть s' – максимальная подпоследовательность s, независимая над $B \cup \{a\}$; полагаем $B' = B \cup s'$, тогда тип a над B' не отклоняется над B, и для каждого $b \in s - s'$, тип b над $B' \cup \{a\}$ отклоняется над B'.

□

Элемент веса 0, который не может ничего заставить отклоняться, даже самого себя, является алгебраическим; его можно повторять сколько угодно в независимой последовательности. По этой тривиальной причине, когда считаем базы, то исключаем эти элементы из обсуждения.

По лемме 19.2 мы понимаем, что вес p строго меньше $\kappa(T)$ и даже кардинала, который ограничивает длину ординальных убывающих последовательностей в фундаментальном порядке ниже p . Действительно, если $a_0,\ldots,a_\alpha,\ldots$ обозначает независимую последовательность, то число элементов a_α , для которых тип a_α над $B_\alpha \cup \{a\}$ отклоняется над B_α, меньше $\kappa(T)$, и если удалить эти a_α , то получаем независимую последовательность над $B \cup \{a\}$. Тем не менее, не надо из этого заключать, что вес является максимальным числом, сколько a_α может заставить отклоняться p_α ; это число, вообще говоря, больше веса. Возьмем в качестве примера теорию T дифференциально замкнутых полей нулевой характеристики, a_0 – дифференциально трансцендентный элемент, a_1 –

трансцендентная константа; легко видеть, с помощью подсчета степени трансцендентности над Q поля $Q(a_0, a_1)_d$, что a_0 и a_1 автоматически независимы на $\emptyset$, и это будет следствием общего результата, доказанного в 19.15; полагаем $a = a_0 + a_1$. Элемент a заставляет отклоняться p_0 , так как $a' = a_0'$ и он заставляет также отклоняться p_1 , который не реализован; однако тип a , имея ранг ω , имеет вес 1 . Легко видеть, что лемма о замене работает, и значит, a и a_0 , или a и a_1 независимы.

Если тип имеет ранг RU, равный n , то он может заставить отклоняться p_α только n раз, и его вес мажорирован числом n ; но как только его RU ранг равен ω , то он может заставить отклоняться p_α произвольно большое конечное число раз, что легко понимается видоизменением вышеприведенного примера. Все это говорится для того, чтобы избежать рассмотрения следующей теоремы как тривиальность.

Теорема 19.9 *В суперстабильной теории каждый тип (элемента или кортежа) имеет конечный вес. Если* $RU(p) = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot n_m$ *является разложением Кантора U-ранга типа p , то вес p мажорирован числом* $n_1 + \cdots + n_m$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $s = (a_0, \ldots, a_\alpha, \ldots)$, независимую над B, и реализацию a неотклоняющегося расширения p над B . Рассмотрим индекс α, такой, что тип a_α над $B_\alpha \cup \{a\}$ отклоняется по крайней мере ω^{α_1} раз над B_α ; это означает, что $RU(a/B_\alpha)$ имеет ненулевой коэффициент при ω^{α_1} в своем разложении Кантора и что коэффициент при ω^{α_1} в $RU(a/B_{\alpha+1})$ строго меньше его. Следовательно, имеется не более n_1 таких элементов.

Сотрем все эти элементы из последовательности s и получаем последовательность $s' = (a_0', \ldots, a_\alpha', \ldots)$. Тип a_α' над $B_\alpha = B \cup \{a_\beta\}_{\beta<\alpha}$ не отклоняется над $B_\alpha' = B \cup \{a_\beta'\}_{\beta<\alpha}$; что касается ранга U типа a_α' над $B_\alpha' \cup \{a\}$, то он больше ранга типа a_α' над $B_\alpha \cup \{a\}$: a заставляет отклоняться p_α' меньше, чем p_α ! Так как по лемме симметрии Ласкара a не может заставить тип a_α' над B_α отклоняться ω^{α_1} раз, то он не делает этого также с типом a_α' над B_α'. Когда мы рассмотрим индексы, для которых этот тип отклоняется по крайней мере ω^{α_2} раз, то увидим, что их не может быть больше n_2 . Снова рассуждаем по симметрии: действительно, в ранге U типа a , ведущий коэффициент не изменяется, в то время как следующий, коэффициент при ω^{α_2} , уменьшается каждый раз по крайней мере на единицу.

Сотрем тогда все эти элементы, и повторяем эту операцию m раз.

$\square$

Отметим, что это доказательство использовало не только суперстабильность p, а также суперстабильность элементов независимой последовательности. Сравните следующую лемму с 19.5.

Лемма 19.10 *Если a и b независимы над A , то вес* $tp(\bar{a}^\frown\bar{b}/A)$ *равен сумме весов* $tp(\bar{a}/A)$ *и* $tp(\bar{b}/A)$.

Доказательство. Если имеем независимую последовательность, то стираем меньше элементов, чем вес типа $tp(a/A)$, чтобы получить независимую последовательность над $A \cup \{a\}$, затем меньше элементов, чем вес $tp(b/A)$, чтобы получить независимую последовательность над $A \cup \{a, b\}$.

Для обратного утверждения используем второе определение вес,а данное леммой 19.8 : мы можем найти такие независимые a_α , число которых равно весу $tp(a)$, что a заставляет отклоняться тип каждого из них; также мы находим независимые b_β число которых равно весу $tp(b)$, что b заставляет отклоняться тип каждого из них; расположим $\{a, \ldots, a_\alpha, \ldots\}$ и $\{b, \ldots, b_\alpha, \ldots\}$ независимым образом.

□

Теорема 19.11 (о замене) *Пусть $A \subset M$, X – подмножество (или множество кортежей) M, образованное из элементов, тип которых над A имеет вес 1 ; тогда любые две базы (т.е. максимально независимые подмножества) X над A имеют всегда одну и ту же мощность.*

Доказательство. Пусть B и C – две базы в X и такие, что $|B| \leq |C|$; перечислим B, $B = \{b_0, \ldots, b_\alpha, \ldots\}$, и полагаем $B_\alpha = \{b_\beta\}_{\beta<\alpha}$. Строим индукцией убывающую последовательность C^α подмножеств C, такую, что $B_\alpha \cup C^\alpha$ независима. Полагаем $C^\alpha = \cup_{\beta<\alpha} C^\beta$ для всех предельных ординалов α, и что $C^{\alpha+1}$ была получена удалением не более одной точки из C^α .

Начнем с $C = C^0$; так как $tp(b_0/A)$ имеет вес 1 получим C^1, удаляя не более одного элемента из C^0 так, чтобы множество $C^1 \cup \{b_0\}$ было независимым над A . Можно удалить элемент из C^1 так, чтобы получить C^2 такое, что множество $C^2 \cup \{b_0, b_1\}$ будет независимым над A, и т.д. Тогда понятно, что делать на последовательных шагах. На предельных шагах α все идет как по маслу, потому что каждое конечное подмножество $B_\alpha \cup C^\alpha$ содержится в некотором $B_\beta \cup C^\beta$ с $\beta < \alpha$.

Когда процесс закончится, то должны уже исчерпаться все элементы C, так как иначе B не была бы максимально независимым множеством; таким образом, $|B| = |C|$.

□

Теорема 19.12 *Пусть $A \subset M$ – и X подмножество M, образованное из элементов, неалгебраических над A и имеющих над A тип с весом строго меньшим $\varkappa$, где $\varkappa$ – регулярный кардинал. Тогда если A имеет базу мощности, большей или равной $\varkappa$, то все его базы имеют одну и ту же мощность.*

Доказательство. Мы повторяем то же доказательство, что в 19.11 , удаляя на этот раз из C на каждом шаге число элементов строго меньше $\varkappa$; если $|C| = \varkappa$, то заключение следует из регулярности $\varkappa$; если $C > \varkappa$, то можно прямо удалять $\varkappa$ элементов на каждом этапе.

□

По совершенно такой же причине, если все элементы X имеют вес не более n и если B и C две базы X , то $(1/n) \cdot |B| \leq |C| \leq n \cdot B$.

В заключение отметим, что размерности вполне определены для произвольной стабильной теории, как только они выше $|T|^+$; они вполне определены для суперстабильной теории, как только они бесконечны; и если они конечны и вес ограничен, то они могут колебаться только в определенных пределах.

Чтобы иллюстрировать понятие веса, докажем следующую теорему :

Теорема 19.13 *Если T счетна, суперстабильна и не ω-категорична, то она имеет бесконечное число попарно неизоморфных счетных моделей.*

Доказательство. Если T имеет менее 2^ω счетных моделей, то над каждой n-кой параметров существует простая модель (см. теорему 10.10 и 10.c); если T не ω-категорична, то существует кортеж $\bar{a}$, тип p которого над $\emptyset$ не изолирован; обозначим через k его вес, а через M_n простую модель над кортежем $\bar{a}_n$, образованном из $(k+1)^n$ независимых реализаций p.

Модели M_n попарно не изоморфны, так как M_{n+1} не может элементарно вкладываться в M_n ; иначе, каждый составляющий кортеж из $\bar{a}_{n+1}$ будет иметь изолированный тип над a_n , но не изолированный тип над $\emptyset$; по теореме об открытом отображении этот тип отклоняется над $\emptyset$, что невозможно, так как вес типа $\bar{a}_n$ над $\emptyset$ равен $k(k+1)^n$, что строго меньше $(k+1)^{n+1}$.

□

19.d Независимость и поглощение

Если p и q – два типа над A , то говорим, что они *слабо ортогональны*, если каждый раз когда a реализует p и b реализует q , тогда a и b независимы над A; p и q *ортогональны*, если каждый раз когда B содержит A и p' и q' – неответвляющиеся сыновья p и q над B , тогда p' и q' слабо ортогональны.

Если A является моделью M теории T (которая предполагается стабильной), слабая ортогональность означает, что объединение $p(x_1)$ и $q(x_2)$ определяет единственный полный тип над M от двух переменных; в случае произвольного множества параметров, это верно если один из типов стационарен. Определение также имеет смысл когда p является типом n-ки, а q типом m-ки.

Лемма 19.14 *Пусть $M \prec N$ – две модели T, p и q – два типа над M, p' и q' – их наследники над N; если p' и q' слабо ортогональны, то p и q также слабо ортогональны; если M $|T|^+$-насыщенна и p и q слабо ортогональны, p' и q' также слабо ортогональны.*

Доказательство. Если a реализует p и b реализует q и зависимы над M, то помещаем N так, чтобы тип $a^\frown b$ над N не отклонялся над M; элементы a и b зависимы над N и реализуют соответственно p' и q', которые не ортогональны.

Если, обратно, p' и q' не (слабо) ортогональны, то можно реализовать p' элементом a и q' элементом b, вместе с элементом $\bar{c}$ в N так, чтобы выполнялась формула $f(a,b,\bar{c})$, не представимая ни в p' , ни в q' ; если M $|T|^+$-насыщенна, то можно найти $\bar{c}'$ в M, имеющий тот же тип, что и $\bar{c}$, над множеством параметров, служащих для определения p и q, которые не слабо ортогональны.

□

Таким образом, над достаточно насыщенной моделью, ортогональность и слабая ортогональность являются двумя эквивалентными понятиями. Мы ввели в 18.f понятие типа p, ортогонального формуле f; в 20.a будет показано, что из этого следует, что p ортогонален каждому типу, удовлетворяющему f.

Слабая ортогональность является на самом деле очень слабым понятием, когда рассматривается типы над произвольным множеством параметров; например, если T теория дифференциально замкнутых полей нулевой характеристики и C поле констант, то тип p минимального уравнения $x' = 0$ слабо ортогонален типу q минимального уравнения $x' = 1$; но они уже не такие, как только базовое поле содержит примитив из 1 .

Она более значима, когда рассматривается типы над моделями T ; если T тотально трансцендентна, то покажем, что она передается по наследству, то есть что в этом случае она равносильна ортогональности.

Но в в общем случае это не так; вот очень простой контрпример: T является теорией группы Z ; единственные подгруппы nZ являются также ее единственными определимыми подгруппами, и имеется только два фильтра возможных подгрупп (см. 13.c пример 16): фильтр реализованных типов, который содержит 0, и фильтр подгрупп nZ, для $n \neq 0$; следовательно, каждый не реализованный тип имеет U-ранг, равный 1, и определен заданием его класса по модулю nZ для каждого n , т.е. своим сильным типом над $\emptyset$; имеется 2^ω нереализованных типов над каждой моделью T.

Тип ранга один может отклоняться только становясь алгебраическим; если, таким образом, p и q – два типа над M и p не реализован в алгебраическом замыкании $M \cup \{b\}$, где b реализует q, тогда p и q слабо ортогональны; следовательно, если M счетна, p слабо ортогонален ко всем нереализованным типам, за исключением счетного числа; отметим мимоходом, что если T является теорией с U-рангом равным 1, то каждое алгебраически замкнутое множество содержащее модель T, удовлетворяет тесту Тарского и таким образом само является моделью T.

Предположим теперь, что M является моделью T , реализующей все сильные типы над $\emptyset$, например, ω_1-насыщенная модель; если p не реализованный, и a реализует в M его сильный тип над $\emptyset$, то $x - a$ является нереализованным типом, делимым на все n. Над такой моделью, два нереализованных типа переводятся друг на друга сдвигом с помощью элемента M, и следовательно, они не ортогональны.

Лемма симметрии Ласкара позволяет доказать ортогональность некоторых суперстабильных типов :

Теорема 19.15 *Если p и q суперстабильны и не ортогональны, то они имеют некоторый общий индекс α_i , соответствующий ненулевому коэффициенту из разложения Кантора их ранга U; в частности, тип, имеющий RU-ранг ω^α, ортогонален каждому типу со строго меньшим рангом RU .*

Доказательство. Если p и q не ортогональны, то можно реализовать их или некоторые их неответвляющиеся расширения элементами a и b, зависимыми над множеством A. Пусть ω^α – наибольшая степень ω, такая, что тип a над $A \cup \{b\}$ отклоняется по крайней мере ω^α раз над A. Когда переходим от разложения Кантора $RU(a/A)$ к разложению $RU(a/A \cup \{b\})$, коэффициент, соответствующий ω^α , должен уменьшится по крайней мере на единицу, в то время как коэффициенты высшего порядка, чем ω^α , остаются неизменными. По лемме симметрии Ласкара то же самое явление происходит при переходе от $RU(b/A)$ к $RU(b/A \cup \{a\})$. Следовательно, ω^α имеет ненулевой коэффициент как в $RU(a/A)$, так и в $RU(b/A)$.

$\square$

Мы говорим, что тип p над множеством A *регулярен*, если он имеет следующее свойство: для каждого B , расширяющего A , каждый неответвляющийся сын p над B ортогонален каждому ответвляющемуся сыну p; таким образом, предыдущая теорема утверждает, что тип ранга ω^α регулярен. Значит, для такого типа p, если $a_0, \ldots, a_\alpha, \ldots$ является последовательностью независимых реализаций p и если a реализует p, тогда он может заставить отклоняться p_α только один раз; таким образом, определение влечет, что в некотором роде p имеет вес 1 по отношению к своей собственной последовательности Морли; мы увидим, что p действительно имеет вес 1.

Лемма 19.16 *Пусть p – стационарный тип над A и p' – неответвляющееся расширение p над B , тогда p регулярен, если и только если p' регулярен.*

Доказательство. По определению регулярности, если p регулярен, то p' также регулярен; если p нерегулярен, то можно найти расширение C множества A и элемент $\bar{a}$, реализующий неответвляющееся расширение p над C, и элемент $\bar{b}$, реализующий ответвляющееся расширение p над C, такие, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будут зависимыми над C; расположите B так, чтобы $tp(\bar{a}^\frown\bar{b}/B \cup C)$ не отклонялся над C.

$\square$

Следующий результат намного менее очевиден.

Теорема 19.17 *Регулярный тип имеет вес* 1 .

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ реализует тип p из $S_m(M)$ и $(\bar{b}, \bar{c})$ независимы над M, в то время как $(\bar{a}, \bar{b})$ и $(\bar{a}, \bar{c})$ зависимы; мы должны показать, что p нерегулярен.

Пусть q – сильный тип $\bar{a}$ над $M \cup \{\bar{b}\}$; реализуем элементом $\bar{a}_1$ неответвляющееся расширение q над $M \cup \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, затем элементом $\bar{a}_2$ – неответвляющееся расширение q над $M \cup \{\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c}\}$, и т.д. Последовательность $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \ldots\}$ является последовательностью Морли типа q над $M \cup \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, в то время как $\{\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \ldots\}$ является последовательностью Морли q над $M \cup \{\bar{b}\}$.

Существует натуральное n, а значит также наименьшее натуральное n, такое, что последовательность $\{\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ не была независимой над M; иначе $\{\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \ldots\}$ будет последовательностью Морли p над M , и его средний тип над $M \cup \{\bar{b}\}$, т.е. q, должен был бы быть наследником p, что не верно.

По построению $tp(\bar{a}_1{}^\frown \ldots {}^\frown\bar{a}_n/M \cup \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\})$ точно так же, как и $tp(\bar{a}_1{}^\frown \ldots {}^\frown\bar{a}_n/M \cup \{\bar{b}, \bar{c}\})$, не отклоняется над $M \cup \{\bar{b}\}$; по симметрии $tp(\bar{c}/M \cup \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n, \bar{b}\})$ не отклоняется над $M \cup \{\bar{b}\}$ и не отклоняется также над M, так как $\bar{b}$ и $\bar{c}$ независимы над M. Отсюда заключаем, что $\bar{c}$ и $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ независимы над M .

По минимальности n и неразличимости $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ над $M \cup \{\bar{b}\}$ последовательность $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ независима над M. Тогда она над M образует начало последовательности Морли типа p над M . Так как она не отклоняется, то над $M \cup \{\bar{a}\}$ она является началом последовательности Морли наследника p .

Таким образом, $tp(\bar{a}_1/M \cup \{\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \bar{c}\})$ является наследником p; $tp(\bar{a}/M \cup \{\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \bar{c}\})$ не является наследником p, так как $\bar{a}$ и $\bar{c}$ зависимы над M . Тип $tp(\bar{a}_1/M \cup \{\bar{a}, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \bar{c}\})$ не является наследником p , так как $\bar{a}, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ зависимы над M и $tp(\bar{a}_1/M \cup \{\bar{a}, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\})$ не является наследником p . Иначе говоря, $\bar{a}$ и $\bar{a}_1$ зависимы над $M \cup \{\bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \bar{c}\}$ и мы нашли отклоняющегося сына p , не ортогонального наследнику p .

$\square$

Если типы p и q ортогональны, то подмножества моделей, связанных соответственно с p и с q могут в некотором роде быть построены автономно. То, что добавляется со стороны p, не влияет на то, что относится к q. Теперь введем противоположное понятие, означающее, что все что исходит от q, определено тем, что исходит от p .

Рассмотрим множество A и кортежи $\bar{a}, \bar{b}$. Говорим, что $\bar{a}$ *слабо поглощает* $\bar{b}$ над A , если для любого $\bar{c}$, такого, что $tp(\bar{c}/A \cup \{\bar{b}\})$ отклоняется над A, $tp(\bar{c}/A \cup \{\bar{a}\})$ также отклоняется над A ; иначе говоря, все то, что заставляет отклоняться $\bar{b}$, также заставляет отклоняться $\bar{a}$. Говорим, что $\bar{a}$ *поглощает* $\bar{b}$ над A, если для любого B, содержащего A, как только $tp(\bar{a}^\frown\bar{b}/B)$ не отклоняется над A, тогда $\bar{a}$ слабо поглощает $\bar{b}$ над B.

Почти очевидно, что поглощение влечет слабое поглощение и что если $tp(\bar{a}^\frown\bar{b}/B)$ не отклоняется над A и $\bar{a}$ не поглощает $\bar{b}$ над A , то он его не поглощает также над B : рассматривая элемент $\bar{c}$, зависимый от $\bar{b}$, но независимый от $\bar{a}$ над A, расположим его неответвляющимся образом, и т.д.

В следующей лемме проясняется одна жгучая проблема наследования.

Лемма 19.18 *Над $|T|^+$-насыщенной моделью M поглощение и слабое поглощение эквивалентны; если N является элементарным расширением M и $tp(\bar{a}^\frown\bar{b}/N)$ не отклоняется над M, тогда $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}$ над M, если и только если он его поглощает над N.*

Доказательство. Остается понять нетривиальное направление; если $\bar{a}$ не поглощает $\bar{b}$ над N, то найдется $\bar{c}$, такой, что $\bar{a}$ и $\bar{c}$ будут независимыми, а $\bar{b}$ и $\bar{c}$ – зависимыми над N; пусть A – подмножество M мощности $\leq |T|$, такое, что $tp(\bar{a}^\frown b/M)$ является единственным неответвляющимся расширением своего ограничения на A; пусть C – подмножество N мощности $|T|$, такое, что $tp(\bar{c})$ – единственное неответвляющееся расширение своего ограничения на C. Вследствие предположения о насыщенности M, можно реализовать в качестве множества C' в M тип C над A; и переводя туда определение $tp(\bar{c}/C)$, получаем кортеж $\bar{c}'$, независимый от $\bar{a}$ и зависимый от $\bar{b}$ над M.

$\square$

После этого говорим, что тип p *мощнее, чем* q, или *D-мажорирует* q, в обозначении $p \geq_D q$ (D для поглощения), если возможно реализовать p кортежом $\bar{a}$ и q кортежом $\bar{b}$ так, что $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}$; мы все сделали для того, чтобы это понятие сохранилось при наследовании и чтобы для сравнения двух типов было достаточно подниматься до некоторой насыщенной модели.

Отметим, что это понятие транзитивно: если p мажорирует q и q мажорирует r , тогда p мажорирует r ; для этого поднимаются по наследству до очень насыщенной модели, реализуют типы p, q, r кортежами a, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ так, что $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}$ и $\bar{b}$ поглощает $\bar{c}$. Все, что отклоняется из-за $\bar{c}$, отклоняется также из-за $\bar{b}$, и таким образом, из-за $\bar{a}$. Мажорируемость типов определяет предпорядок, и если $p \geq_D q$ и $q \geq_D p$, то говорим что p и q *имеют одну и ту же мощь*, или еще *D-эквивалентны*.

Исключим из обсуждения (в частности, когда мы говорим о D-минимальных типах) алгебраические типы, которые не могут заставить отклоняться ничего, и одновременно независимы от всех типов, и поглощаются всеми типами. Кроме этого случая, если p поглощает q , тогда p и q не ортогональны, так как q реализуясь, заставляет самого себя отклоняться.

Контрпример, построенный по поводу ортогональности показывает, что мы не могли обойтись без помощи достаточно насыщенных моделей, чтобы определить мажорируемость, так как два слабо ортогональных типа могут иметь D-эквивалентных наследников.

Так же, как ортогональность с независимостью, нельзя путать мажорируемость с поглощением; ортогональность и мажорируемость являются свойствами типов, а независимость и поглощение являются свойствами их реализаций; когда мы работаем в достаточно насыщенной модели, то p и q ортогональны если возможно их реализовать только независимым способом, и p мощнее, чем q, если их можно реализовать так, чтобы реализация p поглощала реализацию типа q.

Лемма 19.19 *Если тип p мощнее, чем q, то его вес больше или равен весу q , если p строго мощнее, чем q, то вес типа p $\geq$ (вес типа q) $+ 1$.*

Доказательство. Поднимаемся до достаточно насыщенной модели M , реализуем элементом $\bar{a}$ тип p , элементом $\bar{b}$ тип q так, чтобы $\bar{a}$ поглощал $\bar{b}$; можно найти последовательность $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k$ с длиной равной весу $tp(\bar{b}/M)$ независимую над M такую, что $\bar{b}$ заставляет отклоняться каждый $\bar{b}_i$ (лемма 19.8) ; и для каждого i элементы $\bar{a}$ и $\bar{b}_i$ зависимы над M .

Если, кроме того, $\bar{b}$ не поглощает $\bar{a}$, то можно найти $\bar{c}$, зависящий от $\bar{a}$ и не зависящий от $\bar{b}$ над M; тогда, помещаем $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k$, выбранных как выше так, чтобы $tp(\bar{b}_1{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{b}_k / M \cup \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\})$ не отклонялся над $M \cup \{b\}$; тип $\bar{c}$ над $M \cup \{\bar{b}, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k\}$ не отклоняется над $M \cup \{\bar{b}\}$, и значит и над M, так что $\bar{c}$ и $\bar{b}_1{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{b}_k$ независимы над M . Так как $\bar{a}$ заставляет отклоняться тип каждого из них, вес p равен по крайней мере $k+1$.

□

В действительности доказано больше, чем в условии леммы; если мы работаем в очень насыщенной модели M , то если $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}$ и если вес каждого из типов $tp(\bar{a}/M)$ и $tp(\bar{b}/M)$ конечен и они равны, тогда $\bar{b}$ поглощает $\bar{a}$.

Лемма 19.20 *Два типа веса 1 или ортогональны, или D-эквивалентны; тип веса 1 минимален для порядка D , и D-минорирует каждый не ортогональный ему тип.*

Доказательство. Мы располагаемся над очень насыщенной моделью M; пусть p имеет вес 1 и реализован элементом $\bar{a}$, и q реализован элементом $\bar{b}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ зависимы над M; если тип $\bar{c}$ над $M \cup \{\bar{a}\}$ отклоняется над M, тогда тип $\bar{c}$ над

$M \cup \{\bar{b}\}$ должен также отклоняться над M; иначе, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ будут независимыми над M и $\bar{a}$ бы заставил отклоняться их обеих и, таким образом, p имел бы вес по крайней мере два.

$\square$

Лемма 19.21 *Пусть M – модель теории T, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ зависимы над M; тогда существует элементарное расширение N модели M, такое, что $tp(\bar{a}/N)$ не отклоняется над M, $\bar{b}$ не лежит в N и $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}$ над N.*

Доказательство. Если $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}$ над M, это прекрасно; иначе не ответвляясь поднимаемся до достаточно насыщенной модели M_0 и находим элемент $\bar{c}_1$, такой, что $\bar{a}$ и $\bar{c}_1$ будут независимыми над M_0 , а $\bar{b}$ и $\bar{c}_1$ будут зависимы над M_0 . Пусть тогда M_1 – достаточно насыщенная модель содержащая M_0 и $\bar{c}_1$ и расположенная так, чтобы тип $\bar{a}^\frown\bar{b}$ над M_1 не отклонялся над $M_0 \cup \bar{c}_1$; отметим, что $tp(\bar{a}/M_1)$ является наследником $tp(\bar{a}/M)$, а $tp(\bar{b}/M_1)$ отклоняется над M; тип $\bar{a}$ над $M_1 \cup \{\bar{b}\}$ отклоняется над M, так как уже тип $\bar{a}$ над $M \cup \{\bar{b}\}$ отклоняется над M и, следовательно, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ зависимы над M_1 . Это влечет, что $\bar{b}$ не лежит в M_1 .

Если $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}$ над M_1 , то остановимся; иначе, возобновляем процедуру вводя $\bar{c}_2$ и M_2 , и т.д. На предельных шагах легко продолжать, беря пределы. Мы должны остановиться до кардинала $\kappa(T)$, так как тип $\bar{b}$ отклоняется на каждом шаге.

$\square$

Следствие 19.22 *Если типы p и q не ортогональны, то q имеет нереализованного сына, менее мощного, чем наследник типа p .*

Доказательство. Это просто перевод в другие термины предыдущей леммы.

$\square$

Следствие 19.23 *Если теория T суперстабильна, то каждый нереализованный тип над достаточно насыщенной моделью мощнее, чем некоторый регулярный тип (и даже тип, ортогональный ко всем типам с меньшим RU) .*

Доказательство. Пусть q – нереализованный тип минимального ранга U, который слабее чем p ; по лемме 19.22 и тому, что мы находимся над достаточно насыщенной моделью M, позволяющей спустить на M все, что получается в некотором элементарном расширении M, q ортогонален каждому типу со строго меньшим рангом RU; таким образом, он регулярен.

$\square$

Теорема 19.24 *Если T суперстабильна, то четыре следующих условия эквивалентны:*

(i) p имеет вес 1 ,

(ii) p D-минимален ,

(iii) *p D-эквивалентен некоторому регулярному типу,*

(iv) *p D-эквивалентен воображаемому типу (т.е. типу в смысле T^{eq}) ранга U вида ω^α .*

Доказательство. Каждое утверждение является непосредственным следствием того, что ему предшествует, за исключением пункта (iv). По 19.15 тип U-ранга ω^α регулярен; для обратного утверждения, мы располагаемся в T^{eq} , и рассмотрим D-минимальный тип q и тип p , минимального ранга U среди типов D-эквивалентных q ; по 19.23 p ортогонален каждому типу меньшего U-ранга; мы собираемся показать, что его ранг имеет вид ω^α , двумя последовательными применениями неравенств Ласкара 19.4 , не забывая, что в T^{eq} каждый тип имеет каноническое множество определения (см. 16.d).

Предположим, таким образом, что $RU(p) = \omega^\alpha \cdot k + \beta, \quad 0 < \beta < \omega^\alpha$; так как мы рассматриваем именно ранг U, p имеет сына p' ранга $\omega^\alpha \cdot k$, последовательность Морли которого мы обозначим $a_0, \ldots, a_n, \ldots$; по суперстабильности средний тип этой последовательности не отклоняется над одним из своих конечных фрагментов. Рассмотрим наименьшее n, такое, что $RU(\bar{a}_n/M \cup \{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{n-1}\})$ равен $\omega^\alpha \cdot k$; так как p' определим над $M \cup \{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n\})$, его каноническое множество определения A рационально над этим множеством, $RU(A/M \cup \{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_n\}) = 0$. Если вас смущает кортеж бесконечной длины, то вы можете заметить, что по суперстабильности p не отклоняется над конечным подмножеством A, алгебраическое замыкание которого есть A. Тогда оцениваем U-ранг множества $A^\frown \bar{a}_0{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_n$ посредством неравенства Ласкара:

$$RU(A/M \cup \{\bar{a}_n, \ldots, \bar{a}_0\}) \oplus RU(\bar{a}_n/M \cup \{\bar{a}_{n-1}, \ldots, \bar{a}_0\}) \oplus \cdots \oplus RU(\bar{a}_0/M) =$$

$$= 0 \oplus \omega^\alpha \cdot k \oplus \cdots \oplus (\omega^\alpha \cdot k + \beta) \geq RU(A^\frown \bar{a}_n{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_0/M) ;$$

$$RU(\bar{a}_n/M \cup \{A, \bar{a}_{n-1}, \ldots, \bar{a}_0\}) + \cdots + RU(\bar{a}_0/M \cup A) + RU(A/M) =$$

$$= \omega^\alpha \cdot k + \cdots + \omega^\alpha \cdot k + RU(A/M) \geq RU(\bar{a}_n{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_n{}^\frown A/M) .$$

Так как в двух членах полученного неравенства главной компонентой является $\omega^\alpha \cdot (k(n+1))$, то должно быть $RU(A/M) < \omega^\alpha < RU(p)$; это противоречие, так как A смог заставить отклоняться p , получив из него p' .

Предположим теперь, что $RU(p) = \omega^\alpha \cdot k$, с $k \geq 2$; рассмотрим на этот раз сына p' типа p ранга U равного $\omega^\alpha \cdot (k-1)$. Сделаем то же самое и на этот раз получаются такие неравенства, если мы обозначим через m последний индекс последовательности, где ранг равен $\omega^\alpha \cdot k$:

$$0 \oplus \omega^\alpha \cdot (k-1) \oplus \cdots \oplus (\omega^\alpha \cdot (k-1) + \beta_{m+1}) \oplus \omega^\alpha \cdot k \oplus \cdots \oplus \omega^\alpha \cdot k \geq$$

$$\geq RU(A^\frown \bar{a}_n{}^\frown \ldots {}^\frown a_0/M) ;$$

$$\omega^\alpha \cdot (k-1) + \cdots + \omega^\alpha \cdot (k-1) + RU(A/M) \leq RU(\bar{a}_n{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_0{}^\frown A/M) ;$$

Отсюда получаем неравенство

$$\omega^\alpha \cdot (n+1)(k-1) + RU(A/M) \le \omega^\alpha \cdot ((k-1)(n-m-1) + (m+1)k) + \beta \ ;$$

это нам дает $RU(A/M)$ в виде $\omega^\alpha \cdot (m+1) + \gamma, \quad \gamma < \omega^\alpha$.

Но можно предполагать, что $m = 0$, то есть что последовательность отклоняется начиная с $\bar{a}_1$; если бы это было не так, то мы бы заменили p его наследником над некоторой моделью N, содержащей $M \cup \{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{m-1}\}$; или еще, можно считать все RU над $M \cup \{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_{m-1}\}$ вместо M; после этого получаем ранг U для A строго меньше ранга p, что дает то же самое противоречие.

□

Вот очень простое доказательство 19.24(iv), полностью его уточняющее; это доказательство вдохновляется одним результатом Стивена Биклера[1].

Лемма. *Если $RU(p) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} n_k$ с $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$, тогда p не ортогонален некоторому (воображаемому) типу с U-рангом ω^{α_k} .*

Доказательство. Предположим, что p тип над M . Тогда он имеет расширение над моделью M_1 с U-рангом $\omega^{\alpha_1} n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k}(n_k - 1)$, которое реализуем элементом a. Пусть A – каноническое множество определения типа $tp(a/M_1)$.

Так как A заставляет отклоняться тип p , то должно быть $RU(A/M) \ge \omega^{\alpha_k}$ и мы найдем расширение N модели M такое, что $RU(A/N) = \omega^{\alpha_k}$. Тип $tp(A/M)$ действительно имеет ранг U, так как A – алгебраическое замыкание конечного множества параметров.

Расположим N и a независимым образом над $M^\frown A$. Тип a над $N^\frown A$ не отклоняется над $M^\frown A$. Так как множество A – каноническое для $tp(a/N^\frown A)$, и не содержится в N, то $tp(a/N^\frown A)$ отклоняется над N. По лемме о симметрии Ласкара, это отклонение должно понизить на единицу коэффициент при ω^{α_k} в $RU(a)$, то есть $RU(a/N) \ge \omega^{\alpha_1} n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} n_k$, и так как $RU(a/N) \le RU(a/M)$, то на самом деле имеем равенство. Тип $tp(a/N)$ является наследником $tp(a/M)$ и не ортогонален $tp(A/N)$.

□

Для данных типов $p_1, \ldots, p_n$ над моделью M назовем *произведением* этих типов тип кортежа $\bar{a}_1{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_n$, где $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ являются независимыми реализациями над M, соответственно $p_1, \ldots, p_n$; по симметричности отклонения, это произведение "коммутативно", по крайней мере с точностью до D-эквивалентности, и ассоциативно.

Теорема 19.25 *Пусть T – суперстабильная теория и M – модель T; каждый тип из $S_m(M)$ D-эквивалентен произведению конечного числа D-минимальных типов, это число равно весу обсуждаемого типа. Кроме того, это разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей: чтобы описать D-порядок типов конечных кортежей над M, образуем все коммутативные мономы от стольких неизвестных, сколько имеется классов D-минимальных типов над M и объявляем, что моном μ меньше, чем моном μ', если каждая частичная степень μ меньше соответствующей частичной степени μ'.*

[1]Прим. переводчика: добавлено из Post scriptum французского издания.

Доказательство. Реализуем тип q элементом $\bar{b}$ и рассмотрим последовательность $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k$ максимальной длины реализующей произведение $p_1 \cdots p_k$ D-минимальных типов, таких, что каждый $\bar{a}_i$ зависит от $\bar{b}$ над M; тогда k мажорировано весом q.

Так как мы находимся над достаточно насыщенной моделью, то чтобы проверить поглощение , достаточно понять это для D-минимальных типов (следствие 19.23); тогда докажем, что $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ поглощает $\bar{b}$ над M; иначе, мы бы нашли $\bar{a}_{k+1}$, зависимый от $\bar{b}$ и независимый от $\bar{a}_1{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_k$, с D-минимальным типом $tp(\bar{a}_{k+1}/M)$: это опровергает максимальность k. Следовательно, по 19.19 k является действительно весом q , и $\bar{b}$ поглощает также $\bar{a}_1{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_k$. Тип q D-эквивалентен произведению $p_1 \cdots p_k$.

Группируя эквивалентные p_i , получаем выражение q в виде $p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$, и оно единственно; действительно, легко видеть, используя попарную ортогональность p_i , сохраняющуюся при наследовании, что $p_i^{n_i}$ является наибольшей степенью p_i , являющейся более слабой, чем q. Описание порядка получается тогда немедленно.

□

Докажем наконец последний результат, показывающий, что порядок D имеет именно то значение, которое ему приписывается:

Теорема 19.26 *Пусть M – $|T|^+$-насыщенная модель теории T, p и q – два типа над M; тогда p мощнее, чем q, если и только если каждое $|T|^+$-насыщенное расширение M реализующее p, реализует также q.*

Доказательство. Предположим сначала, что p мощнее, чем q; тогда реализуем первый тип элементом $\bar{a}$, а второй элементом $\bar{b}$ так, чтобы $\bar{a}$ поглощал $\bar{b}$ над M. Если M_0 – ограничение M мощности $|T|$, такое, что $tp(\bar{a}{}^\frown\bar{b}/M)$ не отклоняется над M_0 , то $\bar{a}$ поглощает и, значит, слабо поглощает $\bar{b}$ над M_0 . Теперь, если N – $|T|^+$-насыщенная модель, содержащая M и $\bar{a}$, то она реализует кортежом $\bar{b}'$ тип $\bar{b}$ над $M_0 \cup \{bara\}$. Так как $\bar{a}$ и M независимы над M_0 , и над этой моделью $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}'$, то $\bar{b}'$ и M независимы над M_0 и $\bar{b}'$ реализует над M наследника $tp(\bar{b}'/M_0)$, то есть q.

Обратно, предположим, что q реализуется кортежом $\bar{b}$ в простой $|T|^+$-насыщенной модели над M и реализацией $\bar{a}$ типа p; это означает, что тип $\bar{b}$ над $M \cup \{a\}$ является $|T|^+$-изолированным, посредством $|T|$ формул $f_i(\bar{b}, \bar{a})$ с параметрами из M; докажем, что это влечет, что $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}$. Иначе, можно найти $\bar{c}$, независимый от $\bar{a}$ над M и удовлетворяющий формуле $g(\bar{c}, \bar{b})$, заставляющей его отклоняться, то есть изолирующий от M. Элемент $\bar{c}$ удовлетворяет формуле $\exists y[g(\bar{c}, \bar{y}) \wedge f_i(\bar{y}, \bar{a})]$. Пусть M_0 – модель маленькой мощности, позволяющая определить тип $\bar{a}$ над M, и $\bar{c}'$ – элемент M , реализующий $tp(\bar{c}/M_0)$: $\bar{c}'$ также удовлетворяет каждую из этих формул; следовательно, можно где-то найти $\bar{b}'$, такой, что $g(\bar{c}', \bar{b}')$ и все $f_i(\bar{b}', \bar{a})$ будут истинными. Элемент $\bar{b}'$ имеет, таким образом, тот же самый тип, что $\bar{b}$, над $M \cup \{\bar{a}\}$, и значит, получаем противоречие с тем, что никакой кортеж элементов из M не может удовлетворять $g(\bar{x}, \bar{b}')$.

□

Обратите внимание на то, что даже если наша модель M очень насыщенна, если $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}$, тогда тип $\bar{b}$ над $M \cup \{a\}$ не обязательно $|T|^+$-изолирован; это потому, что хотя понятие поглощения транзитивно, в то же время понятие изолированности таковым не является: если $\bar{b}$ $|T|^+$-изолирован над $\bar{a}$ и $\bar{c}$ – над $\bar{b}$, тогда $\bar{c}$ не обязательно таков над $\bar{a}$. Это не конфликтует с транзитивностью атомности, которая утверждает, что если $tp(\bar{b}/\bar{a})$ изолирован так же, как и $tp(\bar{c}/\bar{a}^\frown\bar{b})$, тогда $tp(\bar{c}/\bar{a})$ изолирован. Например, если T – теория дифференциально замкнутого поля нулевой характеристики и если a_1 и a_2 дифференциально трансцендентны над M и имеют одну и ту же производную a, то каждый поглощает другого, и тип a над $M \cup \{a_1\}$ так же, как и над $M \cup \{a_2\}$, изолирован, так же, как и типы a_1 и a_2 над $M \cup \{a\}$. Напротив, тип a_1 над $M \cup \{a_2\}$ не изолирован, и даже не $|T|^+$-изолирован когда M $|T|^+$-насыщенна, если константа $a_1 - a_2$ не лежит в M.

19.e Исторические и библиографические примечания

Неравенства Ласкара и его лемма симметрии появились в [ЛАСКАР, 1976]; он там мажорирует вес суперстабильного типа произведением коэффициентов разложения Кантора его ранга U и заменяет произведение суммой в [ЛАСКАР, 1984] . Понятия веса, регулярности, ортогональности и т.д. принадлежат Шелаху [ШЕЛАХ, 1978].

Теорема 19.13 о счетных моделях суперстабильной теории появилась в [ЛАХЛАН, 1973], но данное здесь доказательство принадлежит Ласкару; неизвестно, остается ли результат верным при предположении только стабильности.

Результаты раздела 19.d также принадлежат Ласкару, который ввел понятие поглощения (доминации) и D-порядка в [ЛАСКАР, 1982] , и использовал методы 19.d многократно, в частности для 19.21, 19.24, 19.25 ; изложение однако упрощено очень быстрым введением веса. Воображаемая характеристика регулярного типа 19.24 (iv), появилась в [ЛАСКАР, 1984] . Произведение типов является ласкаровской версией симметричности отклонения.