Глава 20

Размерность в моделях тотально трансцендентной теории

In fact, after the appearance of the author's abstract (6), SHELAH informed me that he had been familiar with our theorem for a long time and pointed out the terse statement in (16) where he announces that ...

A.H.L.

20.a Порядок Рудин–Кейслера

Всюду в этой главе, символ T обозначает тотально трансцендентную теорию. Иногда это ограничение сделано только лишь для того, чтобы упростить жизнь, так как выдвигаемые аргументы часто остаются в силе в рамках стабильной или суперстабильной теории, при условии, что рассматриваются только достаточно насыщенные модели. В других случаях напротив, наша работа еще более усложнится. Так как мы проявляем большое честолюбие и допускаем достаточно сильную гипотезу о тотальной трансцендентности, то попытаемся классифицировать все модели теории T , когда это возможно, а не только те которые достаточно насыщенны. Средства, которые нам будут служить для решения этой задачи, не будут иметь всегда такое простое поведение, на что можно было надеяться.

Типичный случай хорошего поведения, это теорема о разложении на регулярные типы 19.25 относительно D-порядка; теорема 19.26 ясно показывает, что этот порядок имеющий такие превосходные свойства, является адекватным средством для построения или изучения, достаточно насыщенных моделей, а именно $\aleph_\varepsilon$-насыщенных, то есть ω-насыщенных моделей в тотально трансцендентном случае.

Вводим теперь порядок R еще называемый порядком RK , являющийся аналогом порядка D при отсутствии насыщенности функционирующий для всех моделей, и который на него достаточно похож и, тем не менее, не является ему идентичным. Так же как D-порядок суперстабильной теории, построенный на регулярных типах, этот порядок R строится на сильно регулярных типах, которые существуют в силу тотальной трансцендентности. Но надо сказать, что его положение совсем не будет таким же хорошим. Добавим с самого начала, чтобы читатель экономящий свои силы и находящий изложение этого параграфа также как и параграфа 19.d, немного бессмысленным, может их читать просто по диагонали, сосредоточив свое внимание на сильно регулярных типах: именно они полезны в конструкциях касающихся классификации моделей.

В этом параграфе, рассмотрим в основном полные типы над моделями T . Если p в $S_n(M)$ и q в $S_m(M)$, то скажем, что *p выше q относительно порядка R* (символ R означает "реализации") *над M* , в обозначении $p \geq_R q$, если каждое элементарное расширение M , реализующее p реализует q . Ввиду существования для всех $\bar{a}$ простой модели $M(\bar{a})$ над $M \cup \{\mathrm{a}\}$ это означает, что возможно реализовать p кортежом $\bar{a}$ и q кортежом $\bar{b}$ так, чтобы тип b над $M(\bar{\mathrm{a}})$ был изолирован. Ясно, что мы имеем дело с частичным порядком или точнее, предпорядком. Если $p \geq_R q$ и $q \geq_R p$, то скажем, что p и q R-эквивалентны. Некоторые называют порядок R *порядком Рудина-Кейслера.* Как это делалось в предыдущей главе, исключаем реализованные типы из обсуждения (в частности, когда говорим о R-минимальных типах) .

Таким образом мы видим, что существует порядок R , определенный моделью M теории T ; когда модель изменяется, появляющиеся различные порядки R не без взаимосвязи между ними, так как рассматриваемые свойства передаются по наследию, как это будет установлено позднее. С принятыми соглашениями, порядок D касается типов над ω-насыщенными моделями: чтобы сравнить два типа, сравнивают в действительности их наследников над достаточно насыщенной моделью. Порядок D является аналогом порядка R для ω-насыщенных моделей, и далее будет доказано, что $p \geq_R q$ влечет $p \geq_D q$, *но обратное утверждение ложно даже если M очень насыщенна .*

Важно помнить следующий контрпример. Язык теории T включает символ унарной функции s и символ бинарного отношения E ; ее аксиомы говорят, что s является биекцией без цикла, а E отношение эквивалентности с бесконечным числом классов, каждый класс которой замкнут относительно s . Ясно, что каждый класс E образован из некоторого числа копий множества целых чисел, снабженного функцией следования. Так как в ω-насыщенной модели T каждый класс должен содержать бесконечное число этих копий, легко видеть челноком, что T полна и элиминирует кванторы. Берем в качестве p тип, который говорит, что класс x не имеет представителя в M , а в качестве q тип от двух переменных утверждающий, что x_1 и x_2 конгруэнтны по модулю E , их класс не представлен в M , и что ни один не является n-последователем другого для $n \in \omega$. Если добавить к M новый класс так, чтобы получить ω-насыщенную модель, то надо будет расположить обязательно бесконечное число копий Z в этом классе. Значит p и q D-эквивалентны. Речь идет о двух типах веса 1 , которые даже регулярны $RU(p) = 1$, $RU(q) = 2$. Напротив, даже если M очень насыщенна, p минорирует q строго относительно порядка R , так как чтобы получить любую модель T реализующую p можно добавить класс, содержащий только единственную копию Z .

Лемма 20.1 *Пусть N элементарное расширение модели M , p и q два типа над M и p', q' их соответствующие наследники над N . Тогда, если $p \geq_R q$, то $p' \geq_R q'$. Обратное утверждение истинно, если M ω-насыщенна.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ реализует p и p' , а $\bar{b}$ реализует q . Тип $\bar{b}$ над $M \cup \{\bar{a}\}$ изолирован формулой $f(\bar{x}, \bar{a}, \bar{c})$, где $\bar{c}$ из M ; я утверждаю, что эта формула изолирует также некоторый тип над N , который может быть только наследником q' типа q (возьмите неотклоняющийся $\bar{b}$) . Иначе, можно было найти $\bar{d}$ в N , и формулу $g(\bar{x}, \bar{a}, \bar{d})$ такие, что $g(\bar{x}, \bar{a}, \bar{d}) \wedge f(\bar{x}, \bar{a}, \bar{c})$ также как и $\neg g(\bar{x}, \bar{a}, \bar{d}) \wedge f(\bar{x}, \bar{a}, \bar{c})$ были обе совместными, иначе говоря

$$p' \vdash \exists \bar{y}[f(\bar{y}, \bar{x}, \bar{c}) \wedge g(\bar{y}, \bar{x}, \bar{d})] \wedge \exists \bar{z}[f(\bar{z}, \bar{x}, \bar{c}) \wedge \neg g(\bar{z}, \bar{x}, \bar{d})] \ ;$$

Так как p' является наследником p , то можно найти в действительности $\bar{d}_1$ в M такой, чтобы это было также истинно когда $\bar{d}$ заменяется на $\bar{d}_1$, что опровергает изолирующее свойство $f(\bar{x}, \bar{a}, \bar{c})$.

Для обратного утверждения, можно предполагать N ω-насыщенной. Рассмотрим элемент $\bar{a}$ реализующий p' и $\bar{b}$ реализующий q , тип $\bar{b}$ над $N \cup \{\bar{a}\}$ изолирован формулой $f(\bar{x}, \bar{a}, \bar{c}')$. Мы знаем, что p и q определяются над конечными подмножествами A и B модели M ; так как эта последняя ω-насыщенна, то можно найти $\bar{c}$ в M реализующий над $A \cup B$ тот же тип, что и $\bar{c}$; тогда ясно, что $f(\bar{x}, \bar{a}, \bar{c})$ изолирует тип над $M \cup \{\bar{a}\}$, ограничение которого на M есть q .

$\square$

Проблема все еще открытая, состоит в том, что можно ли обойтись без гипотезы "M ω-насыщенна" для обратного утверждения леммы 20.1.

Лемма 20.2 *Пусть M модель теории T . Если тип $\bar{b}$ над $M \cup \{\bar{a}\}$ изолирован, тогда $\bar{a}$ слабо поглощает $\bar{b}$ над M (если $\bar{b}$ и $\bar{c}$ независимы над M , то $\bar{a}$ и $\bar{c}$ также независимы над ним) .*

Доказательство. Пусть $\bar{c}$ зависит от $\bar{b}$ над M , тогда найдется формула $f(\bar{x}, \bar{b})$ с дополнительными параметрами из M , которая изолирует $\bar{c}$ от элементов M . Пусть $g(\bar{y}, \bar{a})$ формула изолирующий тип $\bar{b}$ над $M \cup \{\bar{a}\}$.

Тип $\bar{c}$ над $M \cup \{\bar{a}\}$ удовлетворяет формуле $\exists y[f(\bar{x}, \bar{y}) \wedge g(\bar{y}, \bar{a})]$. Если он не отклоняется, то эта формула будет выполнима в M и можно было найти $\bar{c}$ в M и где-то $\bar{b}'$ такие, что формула $f(\bar{c}', \bar{b}') \wedge g(\bar{b}', \bar{a})$ была истинной. Так как $\bar{b}$ и $\bar{b}'$ имеют один и тот же тип над $M \cup \{\bar{a}\}$, то формула $f(\bar{c}', \bar{b})$ также истинна. Это противоречит тому, что $f(\bar{x}, \bar{b})$ не выполнима в M .

□

Отметим следующий на первый взгляд немного странный факт : предположим, что $tp(\bar{a}^\frown\bar{b}/N)$ не отклоняется над M и $tp(\bar{a}/N \cup \{\bar{b}\})$ изолирован, тогда $tp(\bar{b}/N \cup \{\bar{a}\})$ также изолирован и если $\bar{a}$ слабо поглощает $\bar{b}$ над N , то он его поглощает также над M . Действительно из-за 20.1, имеется сильное поглощение при предположениях леммы 20.2.

Следствие 20.3 *Если тип p мажорирует тип q в порядке R , то он его мажорирует также относительно порядка D .*

Доказательство. Поднимаемся до достаточно насыщенной модели по 20.1, затем используем 20.2.

□

Следствие 20.4 *Если типы p и q (слабо) ортогональны, то они не имеют общих R-минорант.*

Доказательство. Если p и q имеют общую R-миноранту (не реализованную!) , то можно их реализовать кортежами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ так, чтобы существовал элемент c , тип которого над $M \cup \{\bar{a}\}$ так же как и над $M \cup \{\bar{b}\}$ изолирован. Тогда $\bar{a}$ поглощает $\bar{c}$ над M и так как $\bar{b}$ и $\bar{c}$ зависимы, то $\bar{a}$ и $\bar{b}$ также зависимы.

□

Следствие 20.5 *Если $p \geq_R q$ и p (слабо) ортогонален r , тогда r и q (слабо) ортогональны; (слабая) ортогональность инвариантна относительно D-эквивалентности.*

Доказательство. Реализуем тип p кортежом $\bar{a}$ и q кортежом $\bar{b}$ так, чтобы тип $\bar{b}$ над $M \cup \{\bar{a}\}$ был изолированным ; никакая реализация $\bar{c}$ типа r не может отклоняться из-за $\bar{a}$, таким образом, не может отклоняться также из-за $\bar{b}$. Так как $\bar{a}$ поглощает $\bar{b}$, то это дает результаты относительно слабой ортогональности, для варианта с сильной ортогональностью используем 20.1.

□

Следствие 20.6 *Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ независимы над M , и модели N_1, N_2 атомны соответственно над $M \cup \{\bar{a}\}$ и над $M \cup \{\bar{b}\}$, тогда они независимы над M , в частности $N_1 \cap N_2 = M$.*

Доказательство. По 20.2 , N_1 и $\bar{b}$ независимы, затем также N_1 и N_2 независимы . Для доказательства второго утверждения можно заметить, что если c не принадлежит M , то $tp(c/M \cup \{c\})$ отклоняется над M !

□

Следствие 20.7 *Пусть $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_\alpha, \ldots$ независимая последовательность над M и $\{M_\beta\}$ возрастающая последовательность моделей, построенная так, что :*

- *$M_0 = M$, и для предельного α $M_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} M_\beta$*
- *$M_{\alpha+1}$ проста над $M_\alpha \cup \{\bar{a}_\alpha\}$.*

Тогда для каждого α модель M_α проста над $M \cup \{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_\beta, \ldots\}_{\beta<\alpha}$.

Доказательство. Достаточно вложить последовательно каждую модель M_β, $\beta \leq \alpha$, в модель N_α простую над $M \cup \{\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_\beta, \ldots\}_{\beta<\alpha}$. На предельных этапах, это происходит само собой и как только вложилась M_β , заметим, что тип $\bar{a}_\beta$ над M_β является обязательно наследником своего ограничения на M . Следовательно подмодель N_α , которая проста над $M_\beta \cup \{\bar{a}_\beta\}$ обязательно изоморфна $M_{\beta+1}$.

□

Маленький комментарий к следствию 20.7 : если взять сначала простую модель M_1 над $M \cup \{\bar{a}\}$, затем простую модель M_2 над $M_1 \cup \{\bar{b}\}$, то получим модель вкладывающуюся и таким образом, M-изоморфную простой модели N над $M \cup \{\bar{a}, \bar{b}\}$. Проблема в том, что эта конструкция не имеет ничего канонического, существует много способов вложений M_1 в N и не всегда получаем один и тот же тип $\bar{b}$ над M_1 . Она напротив, каноническая если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ независимы над M .

Напомним теперь определение понятия типа p из $S_n(M)$, ортогонального формуле $f(\bar{x}, \bar{b})$ с параметрами $\bar{b}$ из M : p ортогонален f если, в простой модели $M(\bar{a})$ над $M \cup \{\bar{a}\}$, где $\bar{a}$ реализует p , все кортежи удовлетворящие $f(\bar{x}, \bar{b})$ принадлежат M . Как показано в 18.12 это свойство передается по наследству. По правде говоря, это разобрано только для 1-типов и формул с одной переменной, что является обычно важнейшим случаем и простой игрой записи формул переводится на общий случай.

Лемма 20.8 *Тип p ортогонален формуле $f(\bar{x}, \bar{a})$ если и только, если он ортогонален всем не реализованным типам q из $S_m(M)$, содержащим эту формулу.*

Доказательство. Предположим, что p ортогонален f , реализуем его кортежом $\bar{a}$, и кортежом $\bar{b}$ реализуем тип q содержащий формулу f . Если $g(\bar{x}, \bar{c})$ является формулой типа $\bar{b}$ над $M(\bar{a})$, то можно найти в $M(\bar{a})$ кортеж удовлетворяющий $g(\bar{x}, \bar{c}) \wedge f(\bar{x})$. Такой кортеж лежит обязательно в M и тип $\bar{b}$ над

$M(\bar{a})$ конаследует свое ограничение на M . Это дает слабую ортогональность p и q , а также их сильную ортогональность, так как наследник p остается ортогональным к f .

Если, обратно, p не ортогонален f , то он R-мажорирует не реализованный тип удовлетворяющий f и ему не ортогонален.

□

Для данной формулы $f(\bar{x}, \bar{b})$ с параметрами $\bar{b}$ из M тип p из $S_1(M)$ называется *f-регулярным*, если p удовлетворяет f и он (слабо) ортогонален каждому типу из $S_1(M)$ удовлетворяющему f отличному от него самого. Например, если p ортогонален ко всем типам строго меньшего ранга Морли, то он f-регулярен для каждой формулы f , которая изолирует его от типов того же ранга Морли. Иногда говорят, что тип *сильно регулярен*, если он регулярен для некоторой формулы f . Тем же способом можно определять сильно регулярные типы n-ок, но это не очень полезно по крайней мере с точностью до R-эквивалентности, так как будет показано, что сильно регулярные типы соответствуют R-минимальным классам.

Лемма 20.9 *Тип p является f-регулярным если и только, если в модели $M(a)$ простой над M и реализацией a типа p , все элементы удовлетворяющие f и не лежащие в M , реализуют тип p .*

Доказательство. По теореме об открытом отображении все элементы c из $M(a)$ не лежащие в M имеют тип над $M(a)$, отклоняющийся над M . Можно этот же факт объяснить тем, что элемент a поглощает все $c \in M(a)$. Значит тип c над M не ортогонален p . Поэтому если p регулярен, то он имеет требуемые свойства.

Обратно, если p не ортогонален q , где $p \neq q$ и q удовлетворяет f , то p не ортогонален каждой формуле $f(x, \bar{b}) \wedge g(x, \bar{c})$, где формула g удовлетворяет типу q , но не p . Следовательно, эта формула должна расти при переходе от M к $M(a)$.

□

Лемма 20.10 *Пусть N элементарное расширение M и f формула с параметрами из M , p тип над M и p' его наследник над N . Тогда p является f-регулярным если и только, если p' является f-регулярным.*

Доказательство. Предположим p не f-регулярен, тогда найдется элемент из $M(a)$ не лежащий в M , тип которого над M изолирован формулой $g(x, a, \bar{b})$ такой, что g влечет f и противоречива с p . Следовательно найдется формула h такая, что

$$p \vdash \exists y[g(y, x, \bar{b}) \wedge f(y) \wedge h(x, \bar{b}) \wedge \neg h(y, \bar{b})] ,$$

в то время как не существует c из M такого, что $p \vdash g(c, x, \bar{b})$. Эта ситуация переносится по выполнимости кортежом $\bar{b}$ некоторой формулы модели (M, dp) , использующий как параметры те, которые входят в f .

□

Одним из следствий леммы 20.10 является то, что сильно регулярный тип регулярен.

Предложение 20.11 *Всякий f-регулярный тип R-минимален и R-минорирует каждый тип не слабо ортогональный ему. Каждый тип мажорирует относительно порядка R некоторый сильно регулярный тип, R-минимальными являются типы D-эквивалентные некоторому f-регулярному и даже типу, который ортогонален каждому типу строго меньшего ранга Морли.*

Доказательство. Пусть тип p является f-регулярным, а q меньше p относительно порядка R , или даже только не ортогонален p . Если реализовать q элементом $\bar{b}$ зависимым от a , то мы утверждаем, что p должен быть реализован в $M(\bar{b})$. Пусть, действительно, F множество элементов $M(\bar{b})$, удовлетворяющих f . Как известно тип a над $M(\bar{b})$ является единственным неотклоняющимся расширением своего ограничения на $M \cup F$, которое тогда отклоняется над M . Так как p сильно ортогонален любому другому типу удовлетворяющему f , то F обязательно содержит реализацию p .

Пусть теперь p произвольный тип и рассмотрим элемент b из $M(\bar{a}) - M$ имеющий над M тип минимального ранга Морли. Формула g с параметрами из M имеющая ранг Морли строго меньше, чем ранг типа q кортежа b над M не может расти при переходе от M к $M(b)$, которая входит в $M(\bar{a})$. Тип q ортогонален g и значит q ортогонален каждому типу строго меньшего ранга Морли. Он f-регулярен для всякой формулы f , изолирующей его от типов того же ранга Морли.

□

Предложение 20.12 *Любые два R-минимальных типа p и q либо ортогональны либо R-эквивалентны. Для двух таких типов слабая ортогональность так же, как и R-эквивалентность передается по наследству.*

Доказательство. Выберем тип p_1 R-эквивалентный p и q_1 R-эквивалентный q , оба минимального ранга Морли. Каждый из них ортогонален любому типу с меньшим RM , предположим например, что $RM(p_1) \leq RM(q_1)$ и пусть f формула изолирующая q_1 от типов того же ранга Морли. Если p_1 и q_1 не слабо ортогональны, то при реализации p_1 заставляет расти f и он может это сделать только добавляя реализацию q , значит p и q R-эквивалентны.

Согласно следствию 20.5 типы p_1 и q_1 слабо ортогональны только если таковы p и q и это происходит только если p ортогонален f , что является свойством передаваемым по наследству.

□

Лемма 20.13 (Пиллэй) *Если тип $p = tp(a/M)$ является f-регулярным, $\bar{b} \notin M$ и $tp(\bar{b}/M \cup \{a\})$ изолирован, то $tp(a/M \cup \{\bar{b}\})$ изолирован.*

Доказательство. Ясно, что $tp(\bar{b}/M \cup \{a\})$ отклоняется над M . Тогда пусть $g(x, \bar{b})$ формула изолирующая a от элементов M . Поймем, что любой элемент удовлетворяющий этой формуле имеет над M тип p . Если это не так, то можно найти формулу $h(x)$ с параметрами из M такую, что $p \vdash h(x)$ и $\exists x[h(x) \wedge g(x, \bar{b})]$ была истинна. Значит можно было найти такой x в $M(\bar{b})$. Но это противоречит тому, что хотя $M(\bar{b})$ входит в $M(a)$, все элементы $M(b)$ удовлетворяющие g и не лежащие в M имеют тип p .

В этих условиях формула $g(x, \bar{b}) \wedge k(x, \bar{b})$, где формула $k(a, \bar{y})$ изолирует тип $\bar{b}$ над $M(a)$, изолирует тип a над $M \cup \{\bar{b}\}$. Действительно, если a' удовлетворяет этой формуле, то a' и a имеют один и тот же тип над M и поэтому $a' \frown \bar{b}$ и $a \frown \bar{b}$ имеют один и тот же тип над M .

□

Следствие 20.14 *Если тип $tp(a/M)$ является R-минимальным, то модель N изоморфна $M(a)$ если и только, если все модели $N' \neq M$ такие, что $M \prec N' \prec N$ будут M-изоморфными N .*

Доказательство. Если N имеет указанное свойство, то рассмотрим элемент a из $N - M$ имеющий минимальный ранг Морли над M . Тогда $tp(a/M)$ сильно регулярен и N изоморфна $M(a)$.

Для доказательства обратного утверждения сначала отметим, что $M(a)$ не содержит несчетную неразличимую над M последовательность $b_0, \ldots, b_\alpha, \ldots$ В противном случае начиная с некоторого числа n подпоследовательность $b_{n+1}, \ldots, b_\alpha, \ldots$ стала бы морлиевской над $M \cup \{a, b_0, \ldots, b_n\}$. Это противоречит тому, что модель $M(a)$ будучи простой также над этим множеством не может содержать несчетную последовательность неразличимую над этим последним (лемма 18.3) . Пусть тогда элемент b лежит в $N - N'$, по лемме Пиллэя N , а также N' являются атомными над $M \cup \{b\}$. Так как они не содержат несчетную неразличимую последовательность над $M \cup \{b\}$ это две копии простой модели над $M \cup \{b\}$.

□

Следствие 20.15 *Если типы $tp(\bar{a}/M)$ и $tp(\bar{b}/M)$ являются R-минимальными, то они R-эквивалентны если и только, если модели $M(a)$ и Mb M-изоморфны.*

Доказательство. Модели $M(a)$ и $M(b)$ вкладываются одна в другую, следовательно заключение следует из 20.14 .

□

Неизвестно остается ли следствие 20.15 верным без предположения R-минимальности типов.

Следствие 20.16 *Пусть N элементарное расширение модели M , p тип над M и p' его наследник над N . Тогда p R-минимален если и только, если таковым является p' .*

Доказательство. Если тип p R-минимален, то он R-эквивалентен сильно регулярному типу и это свойство сохраняется по наследству. Если тип p' R-минимальный, то реализуем его элементом $\bar{a}$. Модель $N(\bar{a})$ содержит копию $M(\bar{a})$ и по 20.2 , $tp(M(\bar{a})/N)$ наследует свое ограничение над M . Возьмем любой элемент b из $M(a) - M$, так как его тип не отклоняется, то b не лежит в N и по лемме Пиллэя тип a над $N \cup \{b\}$ изолирован. Вследствие неотклоняемости $tp(\bar{a} \frown b/N)$ над M $tp(\bar{a}/N \cup \{b\})$ есть неотклоняющееся расширение $tp(\bar{a}/M \cup \{b\})$ и этот последний изолирован по теореме об открытом отображении. Это доказывает, что $tp(\bar{a}/M)$ и $tp(b/M)$ R-эквивалентны и значит $tp(\bar{a}/M)$

R-эквивалентен каждому типу, который R-меньше его и, следовательно, он R-минимальный.

□

Прояснив свойства R-минимальных типов, попытаемся дать по крайней мере фрагментарное описание порядка R посредством этих минимальных типов. Начнем с легкой леммы:

Лемма 20.17 *Тип p из $S_n(M)$ мажорирует только конечное число попарно неэквивалентных R-минимальных типов.*

Доказательство. Если тип q мажорирует $p_1, \ldots, p_n$, которые R-минимальны, то реализуем q кортежем $\bar{b}$. В модели $M(\bar{b})$ имеются реализации $a_1, \ldots, a_n$ этих типов, которые независимы над M ввиду сильной ортогональности типов p_i . Так как $\bar{b}$ заставляет отклоняться тип каждого элемента a_i , то их не более чем вес q .

□

Замечание. *Внимательный читатель может быть заметил что-то странное в доказательстве леммы 20.17. Имеем в качестве предположения, что p_i попарно сильно ортогональны, а используем то, что каждый из них ортогонален множеству остальных. Это не ошибка рассуждения, а следствие перехода сильной ортогональности по наследству.*

Введем теперь способ разложения типа на регулярные типы, который назовем *разложением Ласкара* и определяемый следующим образом. Реализуем тип q элементом $\bar{b}$ и рассмотрим простую модель $M(\bar{b})$ над $M \cup \{\bar{b}\}$. В этой модели возьмем элемент a_1 , тип которого p_1 является R-минимальным над M. Вкладываем модель $M_1 = M(a_1)$ в $M(\bar{b})$, если $\bar{b}$ лежит в M_1 , то останавливаемся. Иначе, рассмотрим элемент a_2 типа p_2 R-минимального над M_1 и вкладываем $M_2 = M_1(a_2)$ в $M(\bar{b})$ и т.д. Каков бы ни был способ этого построения, обязательно останавливаемся через конечное число шагов, так как на каждом шаге тип $\bar{b}$ отклоняется. Вот эта последовательность типов $p_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ и называется разложением Ласкара.

Если можно выбирать a_i независимыми над M , тогда по 20.7 $M(a_1, \ldots, a_n)$ будет также моделью $M(\bar{b})$. Тип $\bar{b}$ будет R-эквивалентен произведению сильно регулярных типов $p_1 \cdots p_n$ и его вес будет равным n . Но это разложение не имеет вообще говоря ту же природу, которая дана в 19.25 . Во-первых, потому что даже когда это возможно, ничто не обязывает a_i быть независимыми, нет ничего канонического в выборе вложения M_1 в $M(\bar{b})$ и вообще говоря, число n будет больше веса q . Во-вторых, потому что вообще говоря невозможно выбрать эти a_i независимыми, невозможно выбрать p_2 неотклоняющимся над M , как ясно показывает пример, данный в начале этого параграфа.

В таком виде, как мы определили, это разложение не обязывает даже тип $\bar{b}$ над M быть R-эквивалентным типу $a_1{}^\frown \ldots {}^\frown a_n$ над M . Чтобы это было так, конечно достаточно выбрать $\bar{a}_n = \bar{b}$ на последнем шаге!

Чтобы избежать неприятных неожиданностей, немного усилим это разложение, заменяя $a_1, \ldots, a_n$ кортежами $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ их содержащими и такими, что тип $\bar{a}_i$ над M_{i-1} не отклоняется над $M \cup \{a_{i-1}\}$. Для этого преобразуем последовательность начиная с конца, полагая $\bar{b}{}^\frown a_n = \bar{a}_n$ и возьмем $\bar{a}_{n-1}$ из M_{n-1}

содержащий a_{n-1} такой, что тип $\bar{a}_n$ над M_{n-1} был единственным неотклоняющимся расширением своего ограничения на $M \cup \{\bar{a}_{n-1}\}$. Затем берем $\bar{a}_{n-2}$ из M_{n-2} содержащий a_{n-2} такой, что тип $\bar{a}_{n-1}$ над M_{n-2} был единственным неотклоняющимся расширением ограничения на $M \cup \{\bar{a}_{n-2}\}$ и т.д. При этом получаем башню минимальных типов в каскаде, так как типы $\bar{a}_i$ и a_i над M_{i-1} R-эквивалентны.

Это разложение полезно, чтобы доказать следующую теорему:

Теорема 20.18 *В тотально трансцендентной теории T , два типа над моделями ортогональны как только они слабо ортогональны: слабая ортогональность переходит по наследству.*

Доказательство. Пусть p и q два слабо ортогональных типа над M . Вначале предположим, что p R-минимален. Тогда вводим разложение Ласкара $\bar{a}_1{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_n$ типа q , с $\bar{a}_n$ реализующим q усиленное так, чтобы тип $\bar{a}_{i+1}$ над M не отклонялся над $M \cup \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_i\}$. Тогда q R-эквивалентен типу $\bar{a}_1{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_n$ над M и соответствующие наследники этих типов над элементарным расширением N модели M также R-эквивалентны.

Реализуем наследника второго типа следующим образом: пусть $\bar{a}'_1$ реализация наследника $tp(\bar{a}_1/M)$ и N_1 является моделью $N(\bar{a}'_1)$ содержащей $M_1 = M(\bar{a}')$. Реализуем кортежом $\bar{a}'_2$ наследника над N_1 типа $tp(\bar{a}_2/M_1)$, что однозначно определяется независимо от вложения M_1 в N_1 , так как речь идет о единственном неотклоняющемся расширении $tp(\bar{a}_2/M \cup \{a_1\})$ и продолжаем в том же духе.

Так как p и q слабо ортогональны, реализация p не может заставить отклоняться $tp(\bar{a}_1{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_n/M)$. Отсюда p слабо ортогонален $tp(\bar{a}_1/M)$ и затем наследник p над M_1 являющийся впрочем его единственным расширением над этой моделью, слабо ортогонален $tp(\bar{a}_2/M_1)$ и т.д. Наследник p над моделью M_i всегда слабо ортогонален $tp(\bar{a}_2/M_1$. По предложению 19.12 , так как речь идет о R-минимальных типах, эти слабые ортогональности переходят по наследству и значит они сильно ортогональны.

Пусть теперь $\bar{a}$ реализует наследника p над N . Элементы $\bar{a}$ и $\bar{a}_1$ таким образом независимы над N и точно так же согласно следствия 20.6 независимы $\bar{a}$ и N_1 . Тип $tp(\bar{a}/N_1)$ является наследником p . Также элементы $\bar{a}$ и $\bar{a}_2$ независимы над N_1 и $tp(\bar{a}/N_2)$ является наследником p , и т.д. Таким образом типы $tp(\bar{a}/N)$ и $tp(\bar{a}_1{}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_n/N)$ слабо ортогональны, откуда и следует заключение.

Значит теорема верна, если один из типов R-минимален. Чтобы доказать общий случай, снова проводим аналогичное доказательство, разлагая q тем же методом.

□

20.b Типы и размерностные теории

Рассмотрим теперь R-минимальный тип p на моделью M теории T . Так как всё, что мы собираемся сказать, сохраняется при R-эквивалентности, то можно всегда брать тип p сильно регулярным и рассматривать тип элемента вместо типа кортежа. Тип p определим над конечным множеством $\bar{a}$ параметров; например, можно брать в качестве $\bar{a}$ кортеж параметров формулы $f(x, \bar{a})$, которая его изолирует от типов того же ранга Морли: в действительности ясно, что то, что p удовлетворяет $g(x, \bar{b})$ зависит только от типа $\bar{b}$ над $\bar{a}$ (это происходит если и только, если $RM(p) = RM(g(x, \bar{b}) \wedge f(x, \bar{a}))$) и что $dg(\bar{y})$ может быть выбран с параметрами из $\bar{a}$. Если необходимо, можно перейти в T^{eq} , где найдется с точностью до рациональности *канонический параметр* $\bar{a}$, который позволяет определить p .

Чтобы прибавить пафос этому параметру, обозначим через p_a наш тип и если a' элемент модели M^{eq} , реализующий тот же тип над $\emptyset$, что и a , то обозначим через p'_a тип, полученный заменой a на a' в определении p .

Скажем, что тип p_a (который напоминаем R-минимален) размерностен, если какова бы ни была модель M , в которой a и b реализуют один и тот же сильный тип над $\emptyset$, то p_a и $p_{a'}$ R-эквивалентны.

Замечание. *Говоря, что p_a и q_b ортогональны или, напротив, R-эквивалентны, воздержимся от уточнения модели M для порядка R . Можно взять простую модель над $a^\frown b$ или любую модель, содержащую a и b , так как ортогональность передается по наследству.*

Лемма 20.19 *Если тип p_a не размерностный и $a_0, \ldots, a_\alpha, \ldots$ образуют последовательность реализаций типа a , независимую и неразличимую над $\emptyset$, тогда типы p_{a_α} ортогональны.*

Доказательство. По неразличимости, типы p_{a_α} или все R-эквивалентны, или все попарно ортогональны (т.е. каждый ортогонален произведению остальных!) . Впрочем ясно, так как все a_α имеют один и тот же сильный тип, для которого они составляют последовательность Морли, что если p_a размерностен, то все p_{a_α} R-эквивалентны.

Предположим тогда, что тип p_a не размерностный и возьмем элементы b_1 и b_2 того же типа, что и a имеющих одинаковый сильный тип и такие, что p_{b_1} и p_{b_2} ортогональны (т.е. не R-эквивалентны) . Рассмотрим последовательность $a'_0, \ldots, a'_\alpha, \ldots$ реализаций типа a в этом сильном типе и тип которых над b_1, b_2 не отклоняется над $\emptyset$. Тогда $b_1, a'_0, \ldots, a'_\alpha, \ldots$ и $b_2, a'_0, \ldots, a'_\alpha, \ldots$ являются двумя копиями последовательности Морли этого сильного типа и они неразличимы. Так как $p_{a'_\alpha}$ не может быть одновременно R-эквивалентным p_{b_1} и p_{b_2} , которые не R-эквивалентны, они должны быть ортогональными. Точно такими же должны быть p_{a_α} , так как последовательности параметров имеют один и тот же тип.

□

В тотально трансцендентной теории каждый тип имеет конечную кратность и расширяется только до конечного числа сильных типов. Следовательно, если тип p_a размерностен, то он имеет только конечное число сопряженных типов являющихся попарно ортогональными. Если p_a не размерностный, то он имеет их сколько угодно.

Можно охарактеризовать размерностность также следующим образом: *p размерностен если и только если, над каждой моделью M теории T име-*

ется только конечное число типов эквивалентных p относительно фундаментального порядка, которые попарно ортогональны. Действительно, тип эквивалентный p_a имеет вида $p_{a'}$, так как в T^{eq} можно охарактеризовать a как единственный элемент удовлетворяющий некоторому предложению модели (M^{eq}, dp) . Значит два типа эквивалентны в фундаментальном порядке если и только, если они имеют канонические параметры одного типа и определения одного вида. Попутно отметим, что R-минимальность p зависит только от его класса в фундаментальном порядке. Поскольку эта характеристика не зависит в действительности от параметра a , можно определить размерностность используя любой элемент a позволяющий определить p , в том числе не являющийся каноническим. Такой элемент a найдется в любой модели $(M, d\mathrm{p}')$, где p' эквивалентен p в фундаментальном порядке, лишь бы только она была достаточно насыщенной. Кстати, можно бы определить понятие размерностности для произвольных типов: если мы ограничились R-минимальным типом, то это потому, что только они здесь используются.

Возвращаясь к R-минимальным типам, легко понять. что если тип p_a R-эквивалентен q_b , то каждый $p_{a'}$ эквивалентен некоторому q_b так, что это понятие размерностности передается по R-эквивалентности. Скажем, что теория T размерностна, если все ее R-минимальные типы размерностны. Число R-классов R-минимальных типов (в принципе над ω-насыщенной моделью, но см. 20.31 в дальнейшем) будет называться *числом размерностей* теории T .

Например, ω_1-категоричная теория T размерностна и имеет размерность 1 . Действительно, так как нет пар Вота, никакой тип не может быть ортогональным формуле так, что все R-минимальные типы эквивалентны. Точно также, все тотально трансцендентные модули размерностны, и даже имеют особенно простое свойство размерностности: каждый тип R-эквивалентен типу, определимому без параметра. Действительно, в тотально трансцендентной группе не существует бесконечной строго убывающий последовательности определимых подгрупп, так как на каждом шаге убывает либо ранг Морли, либо степень Морли обсуждаемых групп. Действительно все смежные классы по подгруппе имеют один и тот же ранг и одну и ту же степень Морли. Следовательно, каждый фильтр примитивных подгрупп (см. 13.c , пример 16) главный, каждому p из $S_1(M)$ соответствует примитивная группа G и элемент a из M такие, что p аксиоматизируется формулой $x - a \in G$ и $x - b \not\in nH$ для каждого b из M и каждой примитивной собственной подгруппы H в G . Тип q элемента $x - a$, который R-эквивалентен p , определим без параметра.

Напротив, теория отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных классов не размерностна: если p_a не реализованный тип утверждающий, что x в классе элемента a (канонический параметр является тогда классом элемента a), мы видим, что два различных типа p_a ортогональны. Отметим, что эта теория интерпретируется в теории бесконечного множества. Возьмем пары (a, b) снабженные отношением "иметь одинаковую первую координату" и теория бесконечного множества интерпретируется в каждой теории (не имеющей конечной модели). Следовательно, это свойство размерностности не передается по интерпретируемости, ни в одном направлении, ни в другом.

Теорема 20.20 *Если тип $p_{\bar{a}}$ не размерностный, $\bar{a}$ и A независимы над $\emptyset$ и M*

содержащая их модель, то $p_{\bar a}$ ортогонален каждому типу над M , не отклоняющемуся над A .

Доказательство. Начнем с расширения A до ω-насыщенной модели N , независимой от $\bar a$ над $\emptyset$. Это может привести к расширению модели M , но это не имеет значения, так как ортогональность передается по наследству.

Предположим теперь, что $q_{\bar b} \geq_R p_{\bar a}$, где $\bar b$ лежит в N . Так как N достаточно насыщенна, в ней найдется $\bar a_1$ имеющий тот же сильный тип, что $\bar a$ над $\bar b$ и снова потому, что N ω-насыщенна $q'_{\bar b} \geq_R p'_{\bar a_1}$. Эти два типа указывают на соответствующие расширения $q_{\bar b}$ и $p_{\bar a}$ над N . Рассматриваемый порядок R определен этой моделью N и также в N найдется $\bar a_2$ реализующий сильный тип $\bar a$ над $\bar b^\frown \bar a_1$, и $q'_{\bar b} \geq_R p'_{\bar a_2}$, и так далее. Следовательно, $q'_{\bar b}$ мажорирует $p'_{\bar a_1}, \ldots, p'_{\bar a_n}, \ldots$, но это невозможно, так как p_a не размерностный и $\bar a_1, \ldots, \bar a_n, \ldots$ образуют последовательность Морли над $\emptyset$, то типы $p_{\bar a_n}$ попарно ортогональны.

$\square$

Из доказанной теоремы, частности, легко понять что если тип $p_{\bar a}$ R-минимальный, не размерностный и $\bar a_1$, $\bar a_2$ независимы, тогда $p_{\bar a_1}$ и $p_{\bar a_2}$ ортогональны. Дотошный читатель может быть обеспокоен тем, что в 20.19 и в 20.20 нам нужна была независимость именно над $\emptyset$. Можно естественно добавить множество A параметров в язык, и утверждать эти теоремы относительно теории $T(A)$, но надо отметить, что размерностность в смысле T может изменить значение в смысле $T(A)$!

Рассмотрим теперь сильно регулярный тип $p_{\bar a}$ над моделью M и подмножество A в M содержащее $\bar a$. Назовем *базой типа $p_{\bar a}$ над A в модели M* максимальное множество B реализаций ограничения $p_{\bar a}$ на A в модели M независимое над A. Не упускайте из вида, что $p_{\bar a}$ обозначает тип над моделью, которую мы часто не упоминаем, являющийся единственным неотклоняющимся расширением своего ограничения на $\bar a$. Так как $p_{\bar a}$ регулярен и имеет вес 1 , все эти базы имеют одну и ту же мощность, которая называется *размерностью $p_{\bar a}$ над A в M.*

В дальнейшем, когда скажем, что $p_{\bar a}$ сильно регулярен, то предполагаем, что $p_{\bar a}$ является f-регулярным для формулы f с параметрами из $\bar a$. Если впрочем $p_{\bar a}$ ортогонален всем типам со строго меньшим рангом Морли, то можно брать в качестве $\bar a$ его канонический параметр.

Лемма 20.21 *Если тип p сильно регулярен, множество B является базой $p_{\bar a}$ над A в M и b является реализацией неотклоняющегося расширения $p_{\bar a} \upharpoonright A$ над $A \cup B$, тогда тип b над M не отклоняется над A .*

Доказательство. Пусть f формула с параметрами из A такая, что $p_{\bar a}$ f-регулярен. Так как b удовлетворяет f , мы знаем, что его тип над M не отклоняется над $A \cup F$, где F является множеством элементов M удовлетворяющих f . Кроме того если $\bar c$ кортеж образованный из элементов F не лежащих в B , то каждый элемент $\bar c$ реализует тип, отличный от неотклоняющегося расширения ограничения $p_{\bar a}$ на $A \cup B$ и не может заставить отклоняться тип b по f-регулярности.

$\square$

Теорема 20.22 *Если тип $p_{\bar{a}}$ сильно регулярен, $\bar{a} \subset A \subset M \prec N$ и B_1 база $p_{\bar{a}}$ над A в M и B_2 база $p_{\bar{a}}$ над M в N , тогда $B_1 \cup B_2$ является базой $p_{\bar{a}}$ над A в N . Размерность $p_{\bar{a}}$ над A в N является суммой размерностей $p_{\bar{a}}$ над A в M и $p_{\bar{a}}$ над M в N .*

Доказательство. Чтобы расширить множество B_1 до базы $p_{\bar{a}}$ над A в N необходимо начать с добавления к нему элемента b_0 реализующего над $A \cup B_1$ неотклоняющееся расширение ограничения $p_{\bar{a}}$ на A . По 20.21 этот элемент реализует $p_{\bar{a}}$ над M . Значит $B_1 \cup \{b_0\}$ является базой в модели $M(b_0)$ простой над M и b_0 . Затем необходимо добавить элемент, который реализует наследника $p_{\bar{a}}$ над $M(b_0)$ и продолжать так насколько возможно.

□

Теорема 20.23 *Предположим тип $p_{\bar{a}}$ сильно регулярен и не размерностный. Если A и $\bar{a}$ независимы над $\emptyset$ и M простая модель над $A \cup \{\bar{a}\}$, тогда размерность $p_{\bar{a}}$ над $\bar{a}$ в M не более чем счетна, это в действительности размерность простой модели над $\bar{a}$.*

Доказательство. Перечисляем в ходе процесса множество A полагая $A = \{a_0, \dots, a_\alpha, \dots\}$ и обозначив через A_α начальный фрагмент $\{a_0, \dots, a_\beta, \dots\}_{\beta \leq \alpha}$. Полагаем M_0 простая модель над $\bar{a}$, размерность которой конечна или счетна, так как по лемме 18.3 она не содержит несчетную неразличимую последовательность над $\bar{a}$, какова бы ни была мощность T . Построим индукцией по α последовательность моделей M_α , где M_α содержит A_α и которые не увеличивают размерность M_0 . На предельных этапах, это происходит само собой. Предположим, что M_α уже построена, выберем a_α так, чтобы его тип над M не отклонялся над $A_\alpha \cup \{\bar{a}\}$. Так как A и $\bar{a}$ независимы, он не отклоняется также над A_α и по 20.20 этот тип ортогонален наследнику $p_{\bar{a}}$ над M_α . Следовательно, модель $M_{\alpha+1}$ простая над $M_\alpha \cup \{\bar{a}_\alpha\}$ не реализует этого наследника и по 20.22 размерность $p_{\bar{a}}$ над $\bar{a}$ одинакова как в M_α , так и в $M_{\alpha+1}$.

□

Следствие 20.24 *Если T не размерностна, то любая модель M теории T имеет элементарное расширение, которое не ω_1-насыщенно.*

Доказательство. Пусть тип $p_{\bar{a}}$ сильно регулярный, не размерностный. если M и $\bar{a}$ независимы, то по предыдущей теореме простая модель над $M \cup \{\bar{a}\}$ не ω_1-насыщенна.

□

Если $p_{\bar{a}}$ и $q_{\bar{b}}$ сильно регулярные R-эквивалентные типы над M , то ясно, что они имеют одну и ту же размерность над M в каждом элементарном расширении M . То, что происходит когда еще не поднялись до модели, дает повод двум деликатным леммам.

Лемма 20.25 *Пусть M модель содержащая $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и предположим, что типы $p_{\bar{a}}$ и $q_{\bar{b}}$ сильно регулярны и R-эквивалентны. Тогда размерности в M типа $p_{\bar{a}}$ над $\bar{a}$ и типа $q_{\bar{b}}$ над $\bar{b}$ обе конечны или равны.*

Доказательство. Предположим сначала, что размерность $p_{\bar a}$ над $\bar a$ в $M(\bar a)$ конечна. Тогда так как $tp(\bar c/M(\bar a))$ имеет конечный вес, размерность $p_{\bar a}$ над $\bar a$ в любой модели $M(\bar a^\frown \bar c)$ по теореме 20.22 также конечна. Возьмем в качестве $\bar c$ параметр позволяющий изолировать $p_{\bar a}$ от $q_{\bar b}$ и вновь видим, что в модели $M(\bar a^\frown \bar b^\frown \bar c)$ вложенной в M типы $p_{\bar a}$ и $q_{\bar b}$ имеют одну и ту же размерность над $\bar a^\frown \bar b^\frown \bar c$, следовательно размерность $q_{\bar b}$ над $\bar b$ в $M(\bar a^\frown \bar b^\frown \bar c)$ должна быть конечной, иначе $\bar a^\frown \bar c$ заставил отклоняться бесконечную последовательность независимых элементов. Заключение следует из теоремы 20.22.

Если напротив размерность $p_{\bar a}$ над $\bar a$ в $M(\bar a)$ счетна, то такой же должны быть также размерности $p_{\bar a}$ над $\bar a^\frown \bar b^\frown \bar c$ в $M(\bar a^\frown \bar b^\frown \bar c)$ и типа $q_{\bar b}$ над $\bar a^\frown \bar b^\frown \bar c$ в $M(\bar a^\frown \bar b^\frown \bar c)$ и типа $q_{\bar b}$ над $\bar b$ в $M(\bar b)$. Заключение снова следует из 20.22.

□

В свете леммы 20.25, говорим что сильно регулярный тип $p_{\bar a}$ имеет *первый род*, если размерность $p_{\bar a}$ над $\bar a$ в $M(\bar a)$ конечна, и что он имеет *второй род* в противном случае, Ясно, что это определение не зависит от кортежа, который служит для определения типа: если размерность $p_{\bar a}$ над $\bar a$ в $M(\bar a)$ конечна, то точно такова же и размерность $p_{\bar a}$ над $\bar a^\frown \bar b$ в $M(\bar a^\frown \bar b^\frown \bar c)$! Мы узнали, что R-эквивалентность сохраняет род; так же ясно, что если p и p' сопряжены, то они имеют один и тот же род.

Лемма 20.26 *Пусть M модель T содержащая кортежи $\bar a_1$ и $\bar a_2$ одного сильного типа над $\emptyset$. Если тип $p_{\bar a}$ сильно регулярен и размерностен, то размерность $p_{\bar a_1}$ над $\bar a_1$ в M равна размерности $p_{\bar a_2}$ над $\bar a_2$ в M .*

Доказательство. Ясно, что при этих условиях $p_{\bar a_1}$ и $p_{\bar a_2}$ являются R-эквивалентными. Предположим сначала, что $\bar a_1$ и $\bar a_2$ независимы. Так как они составляют начало последовательности Морли, то кортеж $\bar a_1{}^\frown \bar a_2$ имеет тот же тип, что и $\bar a_2{}^\frown \bar a_1$ и существует автоморфизм простой модели M_0 над $\bar a_1{}^\frown \bar a_2$, который их переставляет. Тогда теорема истинна для этой модели M_0 , которая вкладывается в M , затем используем 20.22.

Переходим теперь к общему случаю, пусть $\bar a$ имеет тот же сильный тип, что $\bar a_1$ и $\bar a_2$ расширение которого над $\bar a_1{}^\frown \bar a_2$ не отклоняется над $\emptyset$ и пусть N простая модель над $M \cup \{\bar a\}$. Как показано в N соответствующие размерности $p_{\bar a_1}$ над $\bar a_1$ и $p_{\bar a_2}$ над $\bar a_2$ равны размерности $p_{\bar a}$ над $\bar a$. Так как типы $p_{\bar a_1}$ и $p_{\bar a_2}$ R-эквивалентны, их размерности над M в N равны и эта размерность *является конечным числом*, мажорированным весом типа $\bar a$ над M . Заключение вновь следует из теоремы 20.22.

□

Теорема 20.27 *Если теория T тотально трансцендентна и не размерностна, то T имеет по крайней мере $|\omega + \alpha|^{|\alpha|}$ различных моделей мощности $\aleph_\alpha$, для каждого кардинала $\aleph_\alpha$ большего или равного мощности T .*

Доказательство. Рассмотрим функцию f из α в ординал $\omega+\alpha+1$, которая каждому ординалу $\beta < \alpha$ сопоставляет некоторый ординал $f(\beta) \leq \omega+\alpha$. Пусть $p_{\bar a}$ сильно регулярный, не размерностный тип. Построим модель M_f мощности $\aleph_\alpha$, обладающую следующим свойством: зафиксируем $\beta < \alpha$ и рассмотрим реализации $\bar{a}_i$ типа $\bar{a}$ над M такие, что размерность $p_{\bar{a}_i}$ над $\bar{a}_i$ в M была не более чем счетной, если $\beta = 0$ и $\aleph_\alpha$ иначе. По лемме 20.25, если $p_{\bar{a}_j}$ R-эквивалентен $p_{\bar{a}_i}$, то он также будет иметь это свойство. Число таких $p_{\bar{a}_i}$ с точностью до R-эквивалентности будет в точности n если $f(\beta) = n$, и будет равно $\aleph_\alpha$, если $f(\beta) = \omega + \gamma$.

Ясно, что функция f инвариант модели, что по двум различным функциям строятся две неизоморфные модели. Для этого, рассмотрим $\aleph_\alpha$ независимых реализаций $\bar{a}_i$ типа $\bar{a}$ над $\emptyset$. Тогда мы знаем, что типы $p_{\bar{a}_i}$ попарно ортогональны и что в простой модели M_0 над всем этим, размерность каждой $p_{\bar{a}_i}$ над $\bar{a}_i$ конечна или счетна 20.23.

Объединяем тогда эти $\bar{a}_i$ в виде пакетов, пакет с номером β включает n из них, если $f(\beta) = n$ и $\aleph_\alpha$ если $f(\beta) = \omega + \gamma$. После этого возможно, если сумма рассмотренных мощностей является слишком маленькой, что некоторое число $\bar{a}_i$ должны остаться вне этих пакетов. Ввиду ортогональности $p_{\bar{a}_i}$, можно увеличивать размерность одного из них, не касаясь размерности других, получаем таким образом модель M_1 такую, что размерность $p_{\bar{a}_i}$ над $\bar{a}_i$ в M_1 будет $\aleph_\beta$, если $\bar{a}_i$ в пакете с номером β и $\aleph_\alpha$, если $\bar{a}_i$ остался вне пакетов.

В модели M_1 могут появляться новые типы $p_{\bar{a}}$, ортогональные всем $p_{\bar{a}_i}$. Чтобы их уничтожить, расширяем M_1 до модели M_2 дающей им размерность $\aleph_\alpha$, не касаясь размерностей $p_{\bar{a}_i}$ и повторяем такую процедуру ω раз.

$\square$

Сделаем теперь попытку классификации моделей теории T , которую можем довести до конца в следующем параграфе для размерностной теории. Пусть M модель теории T , выберем в каждом R-минимальном классе типов над M сильно регулярного представителя $p_{\bar{a}}$. Назовем *основой* модели M множество A содержащее параметры $\bar{a}$ каждого для каждого типа $p_{\bar{a}}$ (раз типы $p_{\bar{a}}$ выбраны, можно более канонически перейти к T^{eq} и взять в качестве A объединение канонических параметров; но выбор $p_{\bar{a}}$ в их R-классе остается запятнанным произволом) . Назовем *базой* M над A множество B являющееся объединением баз $p_{\bar{a}}$ над A в M для каждого $p_{\bar{a}}$. Ввиду ортогональности типов $p_{\bar{a}}$, база является независимым множеством над A , и тип B над A полностью определяется данными размерностями каждого $p_{\bar{a}}$ над A .

Лемма 20.28 *Если A основа модели M и B база M над A , тогда M проста и даже минимальна, над $A \cup B$.*

Доказательство. Вложим в M простую модель M_0 над $A \cup B$. Если $M_0 \neq M$, то M содержит элемент b , тип q которого над M_0 R-минимален. Таким же будет его наследник над M , и он R-эквивалентен одному из типов $p_{\bar{a}}$. Тип q R-эквивалентен ограничению $p_{\bar{a}}$ на M_0 , так как в этом случае R-эквивалентность не что иное как ортогональность, что коммутирует с наследованием. Следовательно M реализует ограничение типа $p_{\bar{a}}$ на M_0 , что противоречит свойству максимальности B .

$\square$

Эта лемма полезна только если модель имеет относительно маленькую основу. Она позволит в действительности классифицировать, то есть описать с точностью до изоморфизма, все модели размерностной теории, так как далее покажем, что все они имеют одну и ту же основу. Сейчас закончим параграф доказав обращение следствия 20.24. Это предоставит нам характеристику размерностности; к нему возвращаемся снова после 14.9 и 14.10.

Теорема 20.29 *Если теория T тотально трансцендентна и размерностна и $\lambda > |T|$, то каждое элементарное расширение λ-насыщенной модели T само λ-насыщенно.*

Доказательство. Пусть M_0 насыщенная модель мощности $|T|$. Модель M_0 вкладывается во все модели, которые мы рассмотрим и так как T размерностна, она является их основой, так как реализует все сильные типы над $\emptyset$. Имеются много способов вложения M_0 в M и соответствующие базы могут иметь различные размерности. В любом случае, для насыщенной модели мощности λ нет выбора: все размерности должны быть равны λ , каково бы ни было вложение M_0 . Точно также, если M λ-насыщенна, то все размерности должны быть по крайней мере λ , каково бы ни было вложение M_0 в M .

Покажем обратно, что если для *некоторого* вложения M_0 в M все размерности равны по крайней мере λ , тогда M λ-насыщенна. Это докажет теорему, так как размерности могут только расти при элементарном расширении. Действительно, рассмотрим множество A мощности меньшей λ содержащееся в M . Пусть N элементарное ограничение M мощности λ содержащее A , M_0 и λ элементов в каждом подмножестве базы, соответствующего некоторому $p_{\bar{a}}$. (Таких $p_{\bar{a}}$ имеется не более $|T|$, т.е. не более чем типов над M_0) . Каждая из размерностей над M_0 этой модели N равна по крайней мере λ и не больше λ , являющейся его мощностью. Значит N насыщенная модель мощности λ , которая реализует все типы над A .

□

20.c Классификация моделей размерностной теории

Для более точных результатов по сравнению с предыдущим разделом, нам нужно зафиксировать нашу основу; на самом деле, если теория T размерностна, то простая модель M_0 может служить основой во всех моделях: это является следствием двух следующих лемм.

Лемма 20.30 *Сильно регулярный тип p является размерностным если и только, если он не ортогонален типу q не отклоняющемуся над $\emptyset$.*

Доказательство. Если q не отклоняется над $\emptyset$, то в T^{eq} его каноническое множество определения может иметь только конечное число сопряженных, так как $q/\emptyset$ имеет конечную кратность. Это еще означает, что q определим над алгебраическим замыканием $\emptyset$ в M^{eq} . Если $p_{\bar{a}}$ меньше в порядке R чем q , то такими же будут все $p_{\bar{a}_i}$, где $\bar{a}$, $\bar{a}_i$ реализуют последовательность Морли сильного типа $\bar{a}$ над $\emptyset$. Действительно, в T^{eq} иметь один и тот же сильный тип над $\emptyset$ означает то же самое, что иметь один и тот же тип над алгебраическим замыканием $\emptyset$. Так как q имеет конечный вес, то типы $p_{\bar{a}_i}$ не могут быть ортогональными и значит $p_{\bar{a}}$ размерностен.

Обратно предположим, что p из $S_1(M)$ размерностный. Рассмотрим модель M' того же сильного типа, что и M над $\emptyset$, причем M и M' независимы. Пусть p' тип над M' соответствующий типу p : мы знаем, что когда поднимемся до модели содержащей M и M' , типы p и p' будут иметь R-эквивалентные наследники. Пусть N простая модель над $\mathrm{M} \cup \mathrm{M}' \cup \{b'\}$, где b' реализует наследника p над моделью $\mathrm{M} \cup \mathrm{M}'$, которая содержит копию N_0 простой модели над $\mathrm{M} \cup \mathrm{M}'$. В этих условиях наследник p над N_0 реализуется элементом b из N . По построению, тип $M'^\frown b'$ над M не отклоняется над $\emptyset$. Так как b лежит в N , b и N зависимы над M . Это означает, что b и $M'^\frown b'$ зависимы над M. По следствию 20.5, так как N проста над $\mathrm{M} \cup \mathrm{M}' \cup \{b'\}$. Следовательно p не ортогонален типу над M некоторого конечного кортежа из $M' \cup \{b'\}$, то есть типу, который не отклоняется над $\emptyset$.

$\square$

Лемма 20.31 *Если $M_0 \prec M$ и p является R-минимальным, размерностным типом из $S_1(M)$, то он R-эквивалентен типу, не отклоняющемуся над M_0.*

Доказательство. Заменив p одним из его наследников, можно предполагать, что модель M очень насыщенна. Рассмотрим модель $M(a)$ простую над $M \cup \{a\}$, где a реализует p . Пусть b_1 точка из $M(a) - M$ выбираемая так, чтобы тип $RM(b_1/M_0)$ был минимален. Найдем формулу $f(x)$ с параметрами из M_0 изолирующую $tp(b_1/M_0)$ от типов того же ранга Морли. Отметим, что любые два элемента из $M(a) - M$ удовлетворяющие f имеют один и тот же тип над M .

Заметим, что $q_1 = t\mathrm{p}(b_1/M)$ является R-минимальным типом, R-эквивалентным p . Пусть M_1 модель небольшой мощности, промежуточная между M_0 и M такая, что q_1 является наследником своего ограничения на M_1 . Так как M очень насыщенна, в ней можно реализовать последовательность Морли $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ типа M_1 над M . Ей соответствует последовательность $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ типов, которые сопряжены с q_1 над M_0 .

Из леммы 20.30 следует, что p R-мажорирован типом r , не отклоняющимся над $\emptyset$. Он R-мажорирует также q_1 и, так как p определим с параметрами из M_0 , он R-мажорирует все q_n . Так как r имеет конечный вес, невозможно чтобы q_n были попарно ортогональны. Значит все они R-эквивалентны.

Если тогда M_3 обозначает простую модель над $M_1 \cup M_2$, то можно найти реализацию наследника над M_3 ограничения q_2 на M_2 , имеющий тип над $M_3 \cup \{b_1\}$ изолированный формулой $\varphi(y, b_1, \bar{d})$. Его тип над $M_1 \cup M_2 \cup \{b_1\}$, очевидно, изолирован формулой $(\exists z)[\varphi(y, b_1, \bar{z}) \wedge \psi(\bar{z})]$, где $\psi(\bar{z})$ изолирует тип $\bar{d}$ над $M_1 \cup M_2$ и которая изолирует также его тип над $M_1 \cup M_2 \cup b_1$. Так как b_1 и M_2 независимы над M_1 (следствие 20.6) , то по теореме об открытом отображении, тип b_2 над $M_1 \cup M_2 \cup b_1$ отклоняется над M_2 и так как положение симметрично, то b_1 и $M_2{}^\frown b_2$ зависимы над M_1 и можно найти истинное предложение $g(\bar{c}_1, b_1, \bar{c}_2, b_2)$ с $\bar{c}_1$ в M_1 и $\bar{c}_2$ в M_2 , в то время как $g(\bar{c}_1, b_1, \bar{c}, b)$ с $\bar{c}$ и b в M_1 всегда ложно. Все будет точно таким же и если $\bar{c}$ и b в M , так как $tp(b_1/M)$ наследует $tp(b_1/M_1)$.

Покажем, что в действительности q_1 не отклоняется над M_0 , то есть $q_1 = q_2$, что решает нашу проблему. Если бы это было не так, нашлись бы параметры из M_2 , которые можно добавить к нашему $\bar{c}_2$ и предложение $h(b_2, \bar{c}_2)$ истинное для b_2 , где формула $h(x, \bar{y})$ опускается типом $tp(b_2/M_0)$, который не что иное как $tp(b_1/M_0)$. Тогда

$$f(b_2) \wedge g(\bar{c}_1, b_1, \bar{c}_2, b_2) \wedge h(b_2, \bar{c}_2)$$

$$\exists y[f(y) \wedge g(\bar{c}_1, b_1, \bar{c}_2, y) \wedge h(y, \bar{c}_2)] .$$

Однако по построению $\bar{c}_1{}^\frown b_1$ и $\bar{c}_2$ независимы над M_0 и можно найти $\bar{c}$ в M_0 такой, что

$$\exists y[f(y) \wedge g(\bar{c}_1, b_1, \bar{c}, y) \wedge h(y, \bar{c})] .$$

Один такой y должен тогда существовать в $M(a) = M(b_1)$. Так как он удовлетворяет формуле $g(\bar{c}_1, b_1, \bar{c}, y)$, то не может лежать в M' . Наконец, так как y удовлетворяет формуле $h(y, \bar{c})$, то он не имеет тот же тип над M_0 , что и b_1 , что противоречит определению формулы f .

□

Нерешенный вопрос: всегда ли R-минимальный, размерностный тип R-эквивалентен типу, не отклоняющемуся над $\emptyset$. Это намного бы упростило задачу, которая далее последует. Действительно, если T размерностна, это бы означало, что при переходе в T^{eq} алгебраическое замыкание $\emptyset$ могло бы послужить основой в любой модели. Эта основа была бы полностью канонической, так как она соответствует уникальному множеству определенному в каждой модели M . Лемма 20.31 позволяет нам в размерностном случае в качестве основы брать только простую модель M_0 , вкладывающуюся в каждую модель M теории T , но к сожалению многими способами.

Начиная с этого момента предполагаем, что T размерностна. Следовательно каждый R-минимальный класс имеет представителя $p_{\bar{a}}$ в $S_1(M_0)$, где тип $\bar{a}$ над $\emptyset$ изолирован. Выберем для упрощения такие $p_{\bar{a}}$ для каждого R-минимального класса, хотя на самом деле результаты не будут зависеть от этого выбора.

Автоморфизмы простой модели M_0 индуцируют над R-минимальными классами группу G перестановок, называемую *группой ориентации.* Так как класс $p_{\bar{a}}$ может иметь только конечное число сопряженных по G , мажорированное числом сильных типов расширяющих $tp(\bar{a}/\emptyset)$. Каждая орбита G конечна и G содержится в проективном пределе своих ограничений на конечные объединения своих орбит: легко видеть, по компактности, что G равна целиком этому проективному пределу, что G проконечная группа. Это в действительности образ группы автоморфизмов алгебраического замыкания $\emptyset$ в M^{eq} , так как класс образа $p_{\bar{a}}$ зависит только от того, что происходит с сильным типом $\bar{a}$!

Определим теперь инвариант, соответствующий каждой модели M , который назовем её *мотивом.* С этой целью, начнем с выбора вложения M_0 в M и определим мотив M относительно этого вложения так: это отображение сопоставляющее каждому R-минимальному классу некоторый кардинал;

злоупотребляя языком, если тип $p_{\bar{a}}$ R-минимален в $S_1(M_0)$, то обозначим через $\mu(p_{\bar{a}})$ значение функции μ для его класса. Она определяется для каждого $p_{\bar{a}} \in S_1(M_0)$ так:

– $\mu(p_{\bar{a}})$ является размерностью $p_{\bar{a}}$ над $\bar{a}$ в M если эта размерность бесконечна ,

– иначе, $p_{\bar{a}}$ тип первого рода (см. определение после 20.25) и в качестве $\mu(p_{\bar{a}})$ берем разницу между размерностью $p_{\bar{a}}$ над $\bar{a}$ в M и размерности $p_{\bar{a}}$ над $\bar{a}$ в M_0 , равную еще размерности $p_{\bar{a}}$ над M_0 в M .

В других терминах, $\mu(p_{\bar{a}})$ всегда равен размерности $p_{\bar{a}}$ над M_0 в M , за исключением случая, когда $p_{\bar{a}}$ второго рода и эта размерность конечна, в этом случае полагают $\mu(p_{\bar{a}}) = \omega$. Ясно, что если типы $p_{\bar{a}}$ и $q_{\bar{b}}$ лежат в $S_1(M)$ и R-эквивалентны, то они дают одно и то же значение для функции-мотива.

Поймем, что произойдет если возьмем другое вложение M'_0 модели M_0 в M . Существует автоморфизм M'_0 такой, что M_0 и M'_0 имеют один и тот же сильный тип. Чтобы это понять, лучше перейти в M^{eq} и там рассматривать алгебраическое замыкание A пустого множества в M_0 , которое в качестве множества является тем же, что A' в M'_0 , затем переставить A' так, чтобы A и A' имели один и тот же сильный тип. Ясно, что любой автоморфизм A' расширяется до автоморфизма M'_0 . После этого на мотив соответствующий M_0 подействуем перестановкой группы ориентации. Как только это сделано, два мотива совпадут по лемме 20.26. Если $p_{\bar{a}'}$ соответствует $p_{\bar{a}}$ при этом действии, то $\bar{a}$ и $\bar{a}'$ имеют один и тот же сильный тип.

В других терминах можно сказать, что мотив M определяется с точностью до ориентации, независимо от вложения M_0 в M . Получен настоящий инвариант модели. Какие мотивы возможны? Ясно, что ввиду ортогональности $p_{\bar{a}}$, можно выбрать $\mu(p_{\bar{a}})$ независимо от других, единственное ограничение брать $\mu(p_{\bar{a}}) = \omega$, если тип $p_{\bar{a}}$ второго рода. Действительно, взяв M простой над M_0 и над последовательностями подходящих длин, получаем модель M имеющую желанный мотив. Значит имеется по крайней мере столько моделей сколько мотивов, что нам позволяет уже их подсчитать:

Теорема 20.32 *Если теория T размерностна, с бесконечным числом δ размерностей и $\aleph_\alpha$ является несчетным кардиналом большим или равным мощности $|T|$, то T имеет в точности $|\alpha+1|^\delta$ попарно не изоморфных моделей мощности $\aleph_\alpha$.*

Доказательство. Модель M теории T , рассматриваемая как расширение M_0 , определена заданием размерностей каждого $p_{\bar{a}}$ над M_0 (лемма 20.28) . Если M имеет мощности $\aleph_\alpha$, то каждая размерность не больше $\aleph_\alpha$, и это дает только $(\omega+\alpha+1)^\delta$ возможностей. Если α конечен, то

$$|\omega+\alpha+1|^\delta = \omega^\delta \le \delta^\delta \le 2^{\delta\times\delta} = 2^\delta \ .$$

Если α бесконечен, то $|\omega+\alpha+1| = |\alpha+1| = |\alpha|$. Значит имеется $|\alpha+1|$ расширений M_0 мощности $\aleph_\alpha$, попарно не M_0-изоморфных. Здесь может быть несколько способов вложения M_0 в M , но в любом случае имеем не больше $|\alpha+1|^\delta$ моделей T мощности $\aleph_\alpha$.

Чтобы построить по крайней мере $|\alpha+1|^\delta$ моделей , рассмотрим мотивы инвариантные относительно группы ориентации, которые имеют только бесконечные размерности, меньшие чем $\aleph_\alpha$ и одна равна по крайней мере $\aleph_\alpha$. Каждому из этих мотивов соответствует по крайней мере одна модель. Так как каждый R-минимальный класс имеет только конечное число сопряженных, имеются δ конечных пакетов сопряженных классов и для каждого из этих пакетов мы должны выбрать некоторую размерность, независимо от размерностей выбранных для других пакетов: таким образом, число этих мотивов равно $|\alpha+1|^\delta$.

□

Лемма 20.33 *Если теория T размерностна и имеет конечное или счетное число размерностей, то ее простая модель M_0 имеет элементарное расширение M_1 изоморфное ей и такое, что для каждого типа $p_{\bar a}$ второго рода из $S_1(M_0)$, размерность $p_{\bar a}$ над M_0 в M_1 бесконечна (счетна) .*

Доказательство. Предположим, что тип $p_{\bar a}$ имеет второй род и пусть $a_0,\dots,a_n,\dots$ последовательность независимых реализаций ограничения $p_{\bar a}$ на $\bar a$. Пусть M_0' простая модель над $\{\bar a, a_1,\dots,a_n,\dots\}$, содержащаяся в M_0 . Поймем, что тип a_0 над M_0' не отклоняется над $\bar a$. Допустим, что $\bar b$ в M_0' имеет его тип над $\{\bar a, a_1,\dots,a_n,\dots\}$ и изолирован формулой с параметрами из некоторого подмножества $\{\bar a, a_1,\dots,a_m\}$. По неразличимости все элементы $a_n, \quad n>m$ имеют над этим множеством тот же тип, что и a_0 , так как выполнимость $f(\bar b, a_n)$ может зависеть только от типа a_n над $\{\bar a, a_1,\dots,a_m\}$. Следовательно a_0 реализует над M_0' средний тип последовательности $\{a_1,\dots,a_n,\dots\}$.

Если проделаем это в другом направлении, и реализуем $p_{\bar a}$ элементом a_0 , то увидим, что простая модель над $M_0\cup\{a\}$ содержится в некоторой копии простой модели, которая ей таким образом изоморфна. Можно повторить такую процедуру и получаем модель $M_0(a_0,\dots,a_n)$ изоморфную M_0 , где $\{a_0,\dots,a_n\}$ независимые реализации типа $p_{\bar a}$. Модель полученная в пределе, если повторить процедуру ω раз, атомна над $\emptyset$. Она не содержит неразличимую последовательность длины $\aleph_1$, так как является объединением счетной возрастающей последовательности моделей, которые таких не содержат. Значит, речь идет еще об одной копии простой модели.

Пронумеруем тогда классы R-минимальных типов, пусть это будет список $p_1,\dots,p_n,\dots$. Можно построить последовательность моделей

$$M_0 \prec N_1 \prec \dots \prec N_n \prec \dots ,$$

изоморфных простой модели M_0 . Размерность типа p_n над M_0 в N_n будет бесконечной. Предел M_1 моделей N_n является счетной атомной моделью и без неразличимой последовательности длины $\aleph_1$ отвечает на наш вопрос.

□

Лемма 20.33 остается верной, даже если число размерностей несчетно, что позволяет классифицировать модели размерностной теории произвольной мощности. Действительно, реализуем над простой моделью M_0 теории T счетное число независимых реализаций каждого типа второго рода. Затем возьмем простую модель M_1 над всем этим. Как показано в доказательстве 20.33 это атомная модель. Она не может содержать неразличимую последовательность длины $\aleph_1$, так как иначе некоторый регулярный тип будет иметь в ней размерность по меньшей мере $\aleph_1$. Значит M_1 копия простой модели.

Следствие 20.34 *Если теория T размерностна и имеет конечное или счетное число размерностей (в частности, если T счетна), то каждая модель M теории T характеризуется с точностью до изоморфизма своим мотивом, определенным с точностью до ориентации; число моделей совпадает с числом этих мотивов.*

Доказательство. Предположим, что задан мотив модели M с точностью до ориентации, и рассмотрим произвольное вложение M_0 в M . Действуя на нее автоморфизмом, приводим мотив к хорошей ориентации. После этого, заменим M_0 одним из ее элементарных ограничений M_0' так, чтобы для каждого типа p второго рода размерность p над M_0' в M_0 была бесконечной. Так как простая модель остается таковой над конечным множеством своих параметров, то естественно размерности типов первого рода не изменяются. Тогда для каждого R-минимального типа p из $S_1(M_0')$ его размерность над M_0' в M является числом, задаваемым мотивом. Это определяет все M с точностью до M_0'-изоморфизма, и значит также с точностью до изоморфизма!

□

С характеризацией моделей полученной в следствии 20.34 можно даже уточнить при каких условиях M можно вложить элементарно в N : для этого необходимо и достаточно, чтобы было возможно выбрать ориентации мотивов M и N так, чтобы каждая размерность представленная в первой была меньше соответствующей размерности представленной во второй.

Можно также уточнить, при каких условиях модель M имеет собственные элементарные ограничения, изоморфные ей же. Это происходит как только одна из размерностей бесконечна и, в частности, как только имеются типы второго рода (это означает, что простая модель не минимальна) . Если все R-минимальные типы напротив первого рода, то модель чей мотив принимает только конечные значения, не может строго элементарно вкладываться в себя.

При гипотезах следствия 20.34, чтобы подсчитать модели достаточно подсчитать мотивы. Объединим результаты этого параграфа для ω-стабильной счетной теории T .

1. T размерностна, с единственной размерностью (говорят: одномерна) . Тогда теория T ω_1-категорична, так как в модели мощности $\lambda \geq \aleph_1$, размерность может быть только λ . Если ее минимальный тип имеет второй род, то она также ω-категорична. Если он имеет первый род, то она имеет бесконечное число счетных моделей $M_0, \ldots, M_n, \ldots, M_\omega$, соответствующих различным возможным размерностям.

2. T размерностный, с конечным числом размерностей (говорят: теория конечномерна) . Мотивы соответствующие моделям мощности λ те, размерности которых не более λ и хотя бы одна равна λ , если $\lambda > \omega$.

Если T является ω-категоричной, то значит все типы имеют второй род и только бесконечные размерности могут быть в мотивах и их только конечное число строго большее 1 , даже если считать с точностью до ориентации мотивы соответствующие моделям мощности $\aleph_n$. Это число легко вычисляется в зависимости от группы ориентации. Например, в самом неблагоприятном случае двух размерностей меняющихся местами под действием группы G , имеем $n+1$ модель мощности $\aleph_n$. Если $\alpha \geq \omega$, то имеется $|\alpha|$ моделей мощности $\aleph_\alpha$. Если напротив T не ω-категорична, то имеется по крайней мере один тип первого рода допускающий конечную размерность и имеется $|\omega + \alpha|$ моделей мощности $\aleph_\alpha$ (включая $\aleph_0$) .

3. T размерностна и имеет ω размерностей. Можно понять, но это трудно, что T не является ω-категоричной и всегда имеется по крайней мере один тип второго рода. Число моделей мощности $\aleph_\alpha$ для $\alpha > 0$ равно $|\alpha + 1|^\omega$. Число счетных моделей равно ω , если имеется только конечное число классов первого рода и 2^ω в противном случае.

4. T не размерностна, тогда число ее моделей мощности $\aleph_\alpha$ больше или равно $|\omega + \alpha|^\alpha$ согласно 20.27 . Это предложение верно, но теряет значение, когда $\alpha = 0$. Для теории T отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных классов, число моделей мощности $\aleph_\alpha$ равно в точности $|\omega + \alpha|^\alpha$.

Отметим, что если T тотально трансцендентна (что, в этом контексте, неважно), не ω_1-категорична и имеет только конечное число моделей мощности λ , тогда это λ есть $\aleph_n$ и T ω-категорична.

В заключении этого параграфа можно сказать, что намного труднее по настоящему классифицировать модели инвариантами, чем только подсчитать их число. Много лемм двух последних параграфов вовлекли читателя на очень скользкие склоны. Кроме того, для наиболее деликатных среди них, неизвестны примеры, где они были бы действительно необходимы и вполне возможно, хотя это маловероятно, что кто-то сумеет когда-нибудь их заменить структурными предложениями, одновременно более простыми и более мощными. Как я отмечал мимоходом, мой читатель не будет удивлен узнав, что они творение очень хитрого ума Даниеля Ласкара.

20.d DOP

Для размерностной теории, классификация проходит хорошо; в других случаях, можно попытаться разложить построение моделей в каскады реализаций регулярных типов. Имеются случаи, где это безнадежно, так как регулярные типы появляются вроде ниоткуда: тогда говорят, что теория T имеет DOP .

Прежде чем объяснять более подробно, что это такое, я приведу пример теории с DOP . Рассмотрим два отношения эквивалентности E и F , классы первого из них называются "строками", второго "столбцами" . Аксиомы теории T утверждают, что имеется бесконечное число строк и бесконечное число столбцов и что каждая строка пересекает каждый столбец в бесконечном числе точек. Ясно, что T полна и элиминирует кванторы. Она интерпретируема в теории равенства с помощью троек (a, b, c) : говорим, что две тройки лежат на одинаковой строке, если они имеют одну и ту же первую координату и, что они лежат в одинаковом столбце, если они имеют одну и ту же вторую координату (это доказывает, что DOP не передается, ни в одном направлении, ни в другом при интерпретации) .

Теория T ω-категорична и ее модели легко классифицировать, достаточно уточнить, что имеется в пересечении каждой строки и каждого столбца (как только число строк и столбцов установлены). Она имеет их максимально возможное число в каждой несчетной мощности λ , то есть 2^λ , так же как и бинарных отношений, с точностью до изоморфизма, между двумя множествами мощности λ (можно играть на счетных и несчетных пересечениях).

Перейдем к определению: рассмотрим модель M теории T , некоторое расширение N модели M содержащее два кортежа $\bar{a}$ и $\bar{b}$ независимых над M и сильно регулярный тип $p_{\bar{a}\frown\bar{b}}$ из $S_1(N)$. Следовательно модели M_1 и M_2 простые соответственно над $M \cup \{\bar{a}\}$ и $M \cup \{\bar{b}\}$ и вложенные в N , независимы над M . Тогда скажем, что T *имеет* DOP если возможно реализовать это положение так, чтобы $p_{\bar{a}\frown\bar{b}}$ был ортогонален каждому типу, не отклоняющемуся над M_1 и каждом типу, не отклоняющемуся над M_2 .

Если теперь заменить M_1 достаточно насыщенным элементарным расширением N_1 так, чтобы N_1 и M_2 были независимы над M . Тогда $p_{\bar{a}\frown\bar{b}}$ будет снова ортогонален каждому типу, определимому над N_1 : читатель приглашается на рассмотрение этого, как технической детали.

Если возьмем $\bar{a}'\frown\bar{b}'$ независимые от $\bar{a}\frown\bar{b}$ над M , то $\bar{a}\frown\bar{b}$ и $\bar{a}\frown\bar{b}$ имеют один и тот же тип. Тогда можно добавлять $\bar{b}'$ со стороны N_1 , и мы видим, что $p_{\bar{a}\frown\bar{b}}$ и $p_{\bar{a}\frown\bar{b}'}$ *ортогональны.* По той же причине, $p_{\bar{a}'\frown\bar{b}}$ и $p_{\bar{a}\frown\bar{b}}$ ортогональны.

Следовательно ситуация такова: если $\ldots, \bar{a}_i\frown\bar{b}_i, \ldots$ последовательность Морли типа $\bar{a}\frown\bar{b}$, то все $\bar{a}_i$ и $\bar{b}_j$ независимы и все $\bar{a}_i\frown\bar{b}_j$ имеют один и тот же тип. Каждой такой паре соответствует тип p_{ij} , и p_{ij} *ортогонален* p_{hk} *как только* $i \neq h$ или $j \neq k$.

Типы p_{ij} очевидно не размерностны, следовательно по 10.23 размерность p_{ij} над $\bar{a}_i\frown\bar{b}_j$ в модели N простой над множеством всех $\bar{a}_i$ и $\bar{b}_j$ та же самая, что и в простой модели над $\bar{a}_i\frown\bar{b}_j$, то есть не более чем счетна. Можно предполагать, что $tp(\bar{a}\frown\bar{b}/M)$ не отклоняется над $\emptyset$, добавив к языку при необходимости конечный кортеж. Так как p_{ij} попарно ортогональны, то можно увеличить как угодно размерность одного из них не трогая размерности других. Если тогда упорядочить произвольным способом множество I индексов, то можно построить модель N , в которой размерность p_{ij} является $\aleph_1$ если $i > j$ и $\aleph_0$ в противном случае. Это дает возможность определить аналог свойства порядка для элементов $\bar{a}_i\frown\bar{b}_j$ играя на размерностях, но теперь только не посредством формулы. Это объясняет три инициала D.O.P., откуда возникло слово DOP – сокращение для "dimensional order property".

Если теория T имеет DOP , то она имеет 2^λ моделей мощности λ для всех несчетных λ , больших или равных $\mid T \mid$. Этот результат был бы для нас доступным, если бы мы уже доказали, что нестабильная теория имеет то же свойство: просто-напросто, доказательство, показывающее, что в нестабильном случае модели Эренфойхта, конструируемые над достаточно различными цепями не могут быть изоморфными проходит также для моделей описанных в предыдущем абзаце. Таким образом, мой читатель добьется этого результата только если он решится выйти за пределы этого курса.

Однако он может подручными средствами доказать, что это истинно для каждого кардинала вида 2^λ , так как DOP позволяет также определить аналог свойства независимости посредством размерностей. Я ему оставляю в качестве упражнения заботу о том, чтобы кодировать ультрафильтры посредством последовательностей как в параграфе 14.d, теорема 14.11.

Если задан ультрафильтр U подмножеств λ , то он должен рассмотреть кортежи $\bar{a}_\alpha$, $\alpha < \lambda$, где $\bar{a}_0, \ldots, a_n, \ldots$ все независимые, и построить над ними модель M мощности 2^λ кодирующую этот ультрафильтр, то есть такую, что:

- для каждого подмножества w в λ , существует $\bar{b}_w$ в M независимый от $\bar{a}_\alpha$ и в нужном сильном типе такой, что размерность $p_{\bar{a}_\alpha \frown \bar{b}_w}$ в M равна $\aleph_1$ если $\alpha \in w$ и равна $\aleph_0$ если $\alpha not \in w$,

- для любого $\bar{b}$ из M независимого от $\bar{a}_i$ и в нужном сильном типе, если множество ординалов α таких, что размерность $p_{\bar{a}_\alpha \frown \bar{b}}$ в M несчетна, принадлежит U , тогда для достаточно большого n размерность $p_{\bar{a}_n \frown b}$ в M равна $\aleph_1$. Если напротив, это множество не лежит в ультрафильтре, то для достаточно большого n размерность $p_{\bar{a}_n \frown \bar{b}}$ в M счетна.

20.e Глубина и основной скачок

Когда есть DOP имеется действительно слишком много моделей, чтобы надеяться на тонкую и общую классификацию. Поэтому теперь предположим, что T не имеет DOP . Это оставляет надежду на несколько цивилизованное появление регулярных типов в каскаде. Тогда глубина $prof$ сильно регулярного типа $p \in S_1(M)$ определяется посредством следующей индукции:

- для предельного α неравенство $prof(p) \geq \alpha$ означает, что $prof(p) \geq \beta$ для всех $\beta < \alpha$, в частности, $prof(p)$ всегда не меньше 0 ,

- $prof(p) \geq \alpha + 1$ если выполняются перечисляемые ниже требования :
  - можно найти элементарное расширение N модели M и R-минимальный тип q в $S_1(N)$ реализующий p элементом a ,
  - $prof(q) \geq \alpha$ и q ортогонален каждому типу не отклоняющемуся над моделью M ,
  - q размерностен в $T(M \cup \{a\})$, являющейся теорией, полученной добавлением элементов M и a к языку T .

Следуя твердо установленной традиции считаем $prof(p) = \alpha$ если $prof(p) \geq \alpha$ и $prof(p) \not\geq \alpha + 1$.

Если имеется тип глубины ∞ , то говорят, что теория *глубокая* и доказывается достаточно тяжко, что имеется 2^λ моделей в каждой мощности λ выше мощности T .

Рассмотрим теперь неглубокую теорию, и без DOP . Чтобы охарактеризовать модель M этой теории T , начнем с вложения в нее простой модели M_0 , затем выбираем представителей a_i классов R-минимальных типов над M_0 реализованных в M и берем модель M_1 , простую над всем этим. На втором этапе, если взять a в M с R-минимальным типом $tp(a/M_1)$, то так как DOP отсутствует, этот тип R-эквивалентен типу, не отклоняющемуся над некоторым $M_0(a_i)$. Отсутствие DOP позволяет прогнозировать откуда вылезают новые регулярные типы! Так как теория имеет ординальную глубину процесс в конце концов завершится и мы получим какое-то дерево типов соответствующее модели более или менее канонически.

Шелах назвал "основным скачком" разделение между неглубокими теориями без DOP и остальными. Ниже основного скачка можно классифицировать модели, выше основного скачка их слишком много, чтобы классификация была возможна. Другие логики предпочитают видеть основной скачок между теориями с DOP и теориями без DOP .

Мой читатель будет счастлив узнать, что умеет считать модели ниже основного скачка: надо различать шесть случаев для счетной (тотально трансцендентной) теории. Его счастье будет безграничным, когда он узнает, что параллельная проблема для суперстабильных теорий также прояснена. Так как это решение очень трудное, то я сейчас воздержусь от проникновения туда. Мне когда-то надо закончить этот курс, представляющий основы современной теории моделей. Кроме того, я не могу сказать ничего оригинального об этом основном скачке.

Мой читатель или моя читательница, которого(ую) я удерживал до настоящего времени, может теперь обратиться к Богу, а не к его святым и достаточно знает, чтобы читать Тору без таргума, Веду без упанишада и Коран без тафсира. Хорошо бы ему спросить у Юргена Заффе, почему Шелах так счастлив[1].

20.f Исторические и библиографические примечания

Здесь как нигде до этого необходима каноническая предосторожность: *все что содержится в этой главе было сделано Шелахом.* Для размерностных теорий, которых он называет немногомерными, это содержится в [ШЕЛАХ, 1978] , для остальных это содержится в [ШЕЛАХ, 1982] и [ШЕЛАХ, 1983] .

Однако, размерностный случай был в основном известен Лахлану, который

[1]Прим. переводчика : Шелах, решив фундаментальную проблему классификации моделей, объявил об этом, опубликовав в 1981 году краткую заметку в пол-странички в Notices AMS под названием "Почему я счастлив". В работе [ЗАФФЕ, 1983] проведена классификация моделей ω-стабильной теории ниже основного скачка, но во-первых эта работа запоздала, во-вторых это конечно более частный случай результата Шелаха.

его изложил в [ЛАХЛАН, 1978]. Я из нее извлек в качестве эпиграфа к этой главе замечательную фразу о трех различных способах, с помощью которых автор ссылается на самого себя. Для счетных моделей таких теорий, см. также [МОРЛИ, 1967] , [БОЛДУИН-ЛАХЛАН, 1971] , и [ЛАХЛАН, 1975a] .

Лахлан сильно зависел от порядка выборки формул минимального ранга Морли и сумел подсчитать число моделей без настоящей классификации. Как поступает в точности Шелах, не так просто объяснить. Когда хочется составить связное изложение этой темы, всегда возникает много технических деталей, иногда деликатных, которых нужно отлаживать и эта глава обязана многим работе [ЛАСКАР, 1985], за главной линией которой мы следуем, в частности, его очень удачному определению размерностного типа.

Порядок Рудин-Кейслера называется так в работе [ЛАСКАР, 1975] , по аналогии с порядком, который Мари-Элен Рудин и Джером Кейслер определили на ультрафильтрах. Так как это достаточно далеко от нашей темы, несколько противозаконно называть так порядок R .

Лемма 20.13 содержится в [ПИЛЛЭЙ , 1982], разложения Ласкара вместе с эквивалентностью 20.18 между сильной и слабой ортогональностью, содержится в [ЛАСКАР, 1982] .

DOP появляется впервые, насколько я знаю, в [ШЕЛАХ, 1973] , без упоминания имени. Короткое доказательство существования большого количества моделей, когда имеется DOP , приведено в [ЗАФФЕ, 1982]. Тот же Заффе подсчитал число моделей ниже основного скачка [ЗАФФЕ, 1983] . В работах [БУСКАРЕН, 1983] и [БУСКАРЕН-ЛАСКАР, 1983] имеется много результатов о счетных моделях.

Как учебники по классификации моделей следует отметить, кроме книг [ЛАСКАР, 1986] и [ПИЛЛЭЙ , 1983] также готовящиеся к выходу книги Д. Болдуина и В. Ходжеса[2]

[2]эти книги вышли из печати см. [БОЛДУИН, 1988] и [ХОДЖЕС, 1993]