# Глава 4

# Компактность

Et por l'achaison de celle bataille et de celle ghere nulo home ne pooit aler per chemin qui ne fust pris : et ce estoit deverç dont il estoient venu ; mes avant pooient il bien aler. Et adonc les deus frers distroient entr'aus "puis que nos ne poons retorner a Gostantinople con notre mercaandie, or alon avant por la voie dou levant ...

M.P.

# 4.a Ультрапроизведения

Всякий изучающий топологию слышал о *фильтрах* : если $I$ – непустое множество, то фильтром называется семейство $F$ подмножеств $I$, такое, что:

– $I \in F, \quad \emptyset \notin F$ ,

– если $X$ и $Y$ из $F$ , то $X \cap Y \in F$ ,

– если $X \in F$ и $X \subset Y$ , то $Y \in F$ .

Примеры фильтров:

– семейство $F_{\{A\}}$ подмножеств $I$, содержащих непустое подмножество $A \subset I$;

– семейство, называемое фильтром Фреше, коконечных подмножеств бесконечного множества $I$ .

*Предбаза фильтра* $B$ – семейство подмножеств $I$ , содержащееся в некотором фильтре. Это означает, что любое конечное пересечение элементов из $B$ не пусто. Фильтр $F_B$ , образованный всеми подмножествами $I$ , содержащими некоторое конечное пересечение элементов $B$ , есть наименьший фильтр, содержащий $B$ : это – фильтр, *порождённый* семейством $B$ . Если, кроме этого пересечение любых двух элементов $B$ есть снова элемент $B$ , то говорят, что $B$ – *база фильтра*: тогда $F_B$ – семейство подмножеств $I$ , содержащих некоторый элемент $B$ .

Примеры баз фильтров:

– $\{A\}$ , где $A \neq \emptyset, \ A \subset I$ ,

– пусть $J$ – множество, и пусть $I$ – множество конечных подмножеств $J$ ; для любого $i \in I$ пусть $I_i = \{j : j \in I, \ j \supseteq i\}$ , и пусть $B$ – семейство всех $I_i$ ; так как $I_i \cap I_j = I_{i \cup j}, \ i \in I_i$ то B замкнуто относительно конечных пересечений и не содержат $\emptyset$ , значит оно есть база фильтра. Фильтр $F_B$ или его близкие родители часто используются в теории моделей.

*Ультрафильтр* по определению, есть максимальный фильтр.

**Теорема 4.1** *Фильтр $F$ над $I$ является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого подмножества $A \subset I$ либо $A$ , либо его дополнение $I \setminus A$ содержится в $F$ .*

**Доказательство.** Пусть $F$ – ультрафильтр и предположим $A \notin F$ ; по максимальности $F$ , $F \cup \{A\}$ не является предбазой фильтра и существует $B$ из $F$, такой, что $A \cap B = \emptyset$ ; и так как $B \subset I \setminus A$ , то $I \setminus A \in F$ . Если $F$ – фильтр, удовлетворяющий предположению, и $A \notin F$ , то $F \cup \{A\}$ не является предбазой фильтра, поскольку $I \setminus A \in F$ и $(I \setminus A) \cap A = \emptyset$ . Значит, $F$ – ультрафильтр.

$\square$

**Теорема 4.2** *Пусть $U$ – ультрафильтр над $I$ ; если $\{A_1, \ldots, A_n\}$ – конечное покрытие $I$ , т.е. $I = A_1 \cup \ldots A_n$ то одно из $A_i$ принадлежит $U$ , если, сверх того, множества $A_i$ попарно не пересекаются, то только одно лишь $A_i$ , принадлежит $U$ .*

**Доказательство.** Если $A_i \notin U$, то $I \setminus A_i \in U$, и невозможно, чтобы все $I \setminus A_i$ были в $U$, поскольку их пересечение пусто. И, если $A_i \in U$ и $A_j \in U$ , то $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ . □

В качестве примеров ультрафильтров, нам почти нечего предложить, кроме $U_a$ – семейства всех подмножеств $I$ , содержащих элемент $a$ из $I$ : эти ультрафильтры называются *главными*. Для них характерно, что пересечение любого множества элементов из $U_a$, даже бесконечного, снова принадлежит $U_a$ . Эти ультрафильтры, очевидно, не представляют никакого интереса. По теореме 4.2 , если ультрафильтр содержит конечное множество $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ , то он главный : примените разбиение $I \setminus A$, $\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}$ . Неглавные ультрафильтры могут существовать только над бесконечным множеством $I$ , и в этом случае неглавными ультрафильтрами являются в точности те ультрафильтры, которые содержат фильтр Фреше.

Трудность приведения "явного" примера неглавного ультрафильтра будет понятна лишь читателю, который будет углубляться в теорию множеств. Одна из аксиом этой теории, являющаяся ослабленной версией аксиомы выбора, такова :

**Аксиома ультрафильтра**. *Каждый фильтр содержится в некотором ультрафильтре.*

Мы допускаем эту аксиому, подтверждающую существование многочисленных ультрафильтров; она используется в "обычной" математике. Мы обсудим её законность, когда будем говорить об ординалах. Польза ультрафильтров для теории моделей заключается в том, что они позволяют строить новые структуры из первоначально заданных.

Пусть $I$ – непустое множество, $U$ – ультрафильтр над $I$ . Выберем для каждого $i$ из $I$ структуру $S_i$ с непустым носителем $E_i$ , имеющую один и тот же тип подобия $\sigma$ . Мы собираемся определить структуру $S$ типа подобия $\sigma$ , называемую *ультрапроизведением $S_i$ по ультрафильтру $U$* и обозначаемую через $S = \prod S_i/U$.

Прежде всего определим базу $E$ структуры; мы рассмотрим следующее отношение над множеством произведения $\prod E_i$ : говорим, что $I$-последовательность $a = (\ldots, a_i, \ldots)$ и $I$-последовательность $b = (\ldots, b_i, \ldots)$ равны по модулю $U$ , если $\{i : a_i = b_i\}$ принадлежит $U$. Это равенство по модулю $U$ , очевидно, рефлексивно и симметрично; оно транзитивно, поскольку

$$\{i : a_i = c_i\} \supset \{i : a_i = b_i\} \cap \{i : b_i = c_i\} .$$

Значит, это – отношение эквивалентности, и мы в качестве $E$ возьмем фактор-множество $E = \prod E_i/U$, т.е. множество его классов. Таким образом, элементом $\alpha$ множества $E$ является класс по модулю $U$ некоторой $I$-последовательности $a = (\ldots, a_i, \ldots)$ из $\prod E_i$ ; на практике мы естественно, хоть и несправедливо, отождествляем $a$ и $\alpha$.

Теперь определим интерпретацию символов сигнатуры $\sigma$ в структуре $S$.

– если $c$ – константный символ, то обозначим через $c_i$ его интерпретацию в $S_i$ ; по определению, $c^S$ есть класс $I$-последовательности $(\dots, c_i, \dots)$ .

– если $f$ – символ $n$-местной функции, то обозначим через $f_i$ его интерпретацию в $S_i$ ; для данных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из $E$ мы определим $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ в смысле $S$ ; выберем представителей $a_1, \dots, a_n$ в классах $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , пусть $a_1 = (\dots, a_{1i}, \dots), \dots, a_n = (\dots, a_{ni}, \dots)$; и определим в качестве значения $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ класс по модулю $U$ $I$-последовательности $(\dots, f_i(a_{1i}, \dots, a_{ni}), \dots)$. Мы должны проверить, что это значение не зависит от представителей, т.е. что, если $a_1$ и $b_1$, ..., $a_n$ и $b_n$ равны по модулю $U$, то так же равны $(\dots, f_i(a_{1i}, \dots, a_{ni}), \dots)$ и $(\dots, f_i(b_{1i}, \dots, b_{ni}), \dots)$. Это мы оставляем читателю.

– если $r$ – символ $n$-арного отношения, мы обозначим через $r_i$ его интерпретацию в $S_i$ и мы определим его интерпретацию в $S$ следующим образом: если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из $E$ , мы выберем представителей с каждого $\alpha_i$ и скажем, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ удовлетворяет $r^S$ , если множество таких $i$ , что $(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})$ удовлетворяет $r_i$ принадлежит $U$. Мы оставляем читателю проверку того, что это не зависит от выбора представителей, т.е. если $a_1$ и $b_1$, ..., $a_n$ и $b_n$ равны модулю $U$ ,то

$$\{i : (a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in r_i\} \in U \iff \{i : (b_{1i}, \dots, b_{ni}) \in r_i\} \in U \ .$$

Заметим, что эта конструкция не представляет никакого интереса, если $U$ – главный ультрафильтр: если $U$ порождается элементом $j$ , то $\prod S_i/U$ изоморфно $S_j$ . Определение ультрапроизведения естественно и, в целом, легко усваивается. То, что его делает немного трудным для восприятия, – это многочисленные индексы и обозначения, необходимые для его введения. Если вам трудно понять, чему соответствует это понятие, то может помочь следующий пример: пусть $S_i$ являются группами $G_i$ и $G = \prod G_i$ , и пусть $G_U$ – множество элементов из $G$ , равных 1 по модулю $U$ ; другими словами, $(\dots, a_i, \dots)$ лежит в $G_U$ , если $\{i : a_i = 1\}$ лежит в $U$ ; $G_U$ – нормальная подгруппа в $G$ и ультрапроизведение групп $G_i$ изоморфно $G/G_U$ . Или ещё $S_i$ являются кольцами $A_i$, $A = \prod A_i$, $A_U$ – множество элементов $A$ , равных нулю по модулю $U$, $A_U$ – двусторонний идеал кольца $A$ и ультрапроизведение колец $A_i$ изоморфно $A/A_U$ .

Следующая теорема – смысл существования ультрапроизведений[1].

**Теорема 4.3 (Лось)** *Пусть $U$ – ультрафильтр над $I$ , структуры $S_i$ индексированные элементами $I$ , имеют одну и ту же сигнатуру $\sigma$ ; пусть $f(\bar{x})$ – формула языка $\sigma$ , $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – кортеж элементов из $\prod S_i/U$, $a_1, \dots, a_n$ – представители из $\prod S_i$ для классов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ; тогда $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ истинна в $\prod S_i/U \iff \{i : S_i \vdash f(a_{1i}, \dots, a_{ni})\}$ принадлежит $U$ .*

**Доказательство.** Утверждение теоремы верно по определению ультрапроизведения, если $f$ – атомная формула. Докажем общий случай индукцией по сложности формулы $f$ .

[1]Прим. переводчика : автор пишет, что "Los" произносится как "Уош"

Если $f(\bar{x}) = \neg g(\bar{x})$ , то множество $\{i : S_i \vdash f(a_{1i}, \dots, a_{ni})\}$ – дополнение к $\{i : S_i \vdash g(a_{1i}, \dots, a_{ni})\}$. Если первое множество принадлежит $U$ , то второе – нет, по гипотезе индукции $S \not\vdash g(\bar{\alpha})$ , значит $S \vdash f(\bar{\alpha})$. Иначе, так как $U$ – ультрафильтр, его дополнение – второе множество принадлежит $U$ , значит, по предположению индукции $S \vdash g(\alpha)$ и $S \not\vdash f(\alpha)$ .

Если $f(\bar{x}) = g(\bar{x}) \wedge h(\bar{x})$ , то

$$\{i : S_i \vdash f(a_{1i}, \dots, a_{ni})\} = \{i : S_i \vdash g(a_{1i}, \dots, a_{ni})\} \cap \{i : S_i \vdash h(a_{1i}, \dots, a_{ni})\}$$

и пересечение этих двух множеств лежит в $U \iff$ оба множества лежат в $U$ (и по предположению индукции) $\iff S \vdash g(\bar{\alpha})$ и $S \vdash h(\alpha)$ .

Если $f(\bar{x}) = (\exists y) g(\bar{x}, y)$ , то предположим сначала, что $S \vdash f(\bar{\alpha})$ ; значит, существует $\beta$ из $\prod S_i/U$ , представимое $I$-последовательностью $b = \{\dots, b_i, \dots\}$ и такое, что $S \vdash g(\bar{\alpha}, \beta)$ ; по гипотезе индукции $\{i : S_i \vdash g(a_{1i}, \dots, a_{ni}, b_i)\}$ лежит в $U$ , а вместе с ним его надмножество $\{i : S_i \vdash \exists y g(a_{1i}, \dots, a_{ni}, y)\}$. Обратно, если множество $\{i : S_i \vdash \exists y g(a_{1i}, \dots, a_{ni}, y)\}$ лежит в $U$ , то для каждого $i \in X$ мы можем найти $b_i$, такой, что $S_i \vdash g(a_{1i}, \dots, a_{ni}, b_i)$ ; для $i$ вне $X$ в качестве $b_i$ берём любой элемент из $E_i$ ( мы предположили в определении ультрапроизведения, что все структуры $S_i$ имеют непустую базу $E_i$ ) ; пусть $\beta$ – класс по модулю $U$ $I$-последовательности $(\dots, b_i, \dots)$ ; по предположению индукции $S \vdash g(\bar{\alpha}, \beta)$ , значит, $S \vdash \exists y g(\bar{\alpha}, y)$ . Пункты для $\vee$ и $\forall$ оставляем читателю; впрочем, можно их просто заменить булевой комбинацией $\neg$, $\wedge$, $\exists$ .

□

Мы видим, в частности, что предложение $f$ истинно в $\prod S_i/U$ если и только, если $\{i : S_i \vdash f\}$ принадлежит $U$ ; часто в этом случае говорят, что $f$ "истинно почти для всех $i$ по модулю $U$ или "множество индексов, для которых $f$ ложно, ничтожно по модулю $U$ ".

Предположим, что все $S_i$ – копии одной и той же структуры $S$ , их ультрапроизведение называется *ультрастепенью* $S$ по $U$ и обозначается $S^U$ ; если элементу $a \in S$ мы поставим в соответствие класс по модулю $U$ для $I$-последовательности, состоящей только из элементов, равных $a$ , мы получаем вложение $S$ в $S^U$ , называемое *каноническим диагональным вложением* $S$ в $S^U$ ; очень часто $S$ отождествляется со своим образом в $S^U$ при этом включении. В качестве непосредственного следствия теоремы Лося имеем, что это *каноническое диагональное вложение элементарно* и $S^U$ *элементарное расширение* $S$ .

Читатель заметил, что мы дали определение ультрапроизведения только для структур с непустыми базами; если он не хочет исключить случай пустых баз и при этом сохранить теорему 4.3, то нужно поступить так :

- если множество $J$ индексов $i$ таких, что база $S_i$ непуста, принадлежит ультрафильтру $U$ , то обозначим через $V$ ультрафильтр над $J$ , являющийся следом $U$ над $J$ , и полагаем, по определению $\prod S_i/U$ равным $\prod S_j/V$ ,

- иначе, если множество индексов $i$ таких, что база $S_i$ пуста, принадлежит ультрафильтру, тогда $\prod S_i/U$ будет иметь пустую базу; функциональные символы, а также символы отношений положительной арности будут иметь единственную возможную интерпретацию на пустой базе; и если $r$ – символ 0-арного отношения, он будет интерпретироваться как "истина", если множество таких $i$ , что $r_i$ истина, принадлежит ультрафильтру, и как "ложь" в противном случае, в соответствии с предыдущим определением ультрапроизведений (для непустых баз).

Читатель без труда убедится, что с этим соглашением теорема Лося остается в силе во всей общности.

## 4.b Компактность, теорема Левенгейма-Сколема, теорема об общем элементарном расширении

Зафиксируем язык $L$ , соответствующий сигнатуре $\sigma$ ; мы собираемся снабдить множество $\mathcal{J}$ всех полных теорий в языке $L$ топологией: любому предложению $f$ этого языка поставим в соответствие множество $\langle f \rangle$ всех полных теорий, содержащих $f$ ; таким образом $T \in \langle f \rangle$ означает $f \in T$ или ещё $T \vdash f$ (читается " $f$ следствие $T$ " или ещё " $f$ выводимо из $T$ "; чтобы не злоупотреблять символом $\in$ , мы остановимся на последнем обозначении). Так как $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle = \langle f \wedge g \rangle$ множества $\langle f \rangle$ образуют базу топологии, которой мы снабжаем $\mathcal{J}$ . Множество $\mathcal{J}$ с этой топологией образует сепарабельное пространство; на самом деле, если $T \neq T'$ , поскольку $T, T'$ – полные теории, то для некоторого предложения $f$, $T \vdash f$, $T' \vdash \neg f$ и $\langle f \rangle$ и $\langle \neg f \rangle$ – непересекающиеся окрестности соответственно $T$ и $T'$ .

Так как дополнением для $\langle f \rangle$ будет $\langle \neg f \rangle$ , открытые множества из базы будут одновременно закрытыми: $\mathcal{J}$ есть так называемое *вполне несвязное* пространство (пространство, допускающее базу открыто-замкнутых множеств); как следствие каждое непустое связное подмножество $\mathcal{J}$ состоит из одной точки.

Итак, по определению, *открытое* подмножество $\mathcal{J}$ является объединением множеств вида $\langle f \rangle$, а *замкнутое* – пересечением таковых. Непустые замкнутые подмножества $\mathcal{J}$ соответствуют в точности неполным теориям в языке $L$ : если $F$ – пересечение множеств $\langle f_i \rangle$ , то ему ставится в соответствие теория $\theta$ , аксиоматизируемая предложениями $\langle f_i \rangle$ ; $F$ есть в точности множество полных теорий, содержащих $\theta$ (заметим, что $f$ выводимо из $A \iff$ каждая полная теория, содержащая $A$ , содержит $f$ ).

Следующая теорема компактности является одной из самых существенных для теории моделей; всё было сделано для того, чтобы обеспечить финитный характер формул, который обеспечивает её законность.

**Теорема 4.4 (компактности )** *Пространство $\mathcal{J}$ полных теорий в языке $L$ является вполне несвязным компактом.*

**Доказательство.** Мы уже показали, что $\mathcal{J}$ сепарабельно и вполне несвязно. Остается показать, что любой ультрафильтр над $\mathcal{J}$ сходится, т.е. является утончением фильтра окрестностей некоторой точки. Для каждой $T$ из $\mathcal{J}$

выберем модель $M_T$ для $T$ , и пусть $\theta$ – теория модели $\prod M_T/U$ ; если $A$ – окрестность $\theta$, $A$ содержит некоторое множество $\langle f\rangle$ такое, что $\theta \vdash f$ , то по теореме Лося $\{T : M_T \vdash f\} = \langle f\rangle$ принадлежит $U$ , так же как и $A$ . □

Вполне несвязный компакт часто называют *стоуновским* или *пространством Стоуна*; это – самое естественное обобщение понятия конечного пространства с дискретной топологией. Другая, может быть, более выразительная формулировка теоремы 4.4 – следующая :

**Теорема 4.5 (компактности )** *Для совместности бесконечного множества $A$ формул достаточна совместность каждой конечной части $A$ .*

**Доказательство.** Действительно, для сепарабельного пространства компактность эквивалентна следующему свойству : если $F_i$ – семейство замкнутых окрестностей, пересечение любого конечного подсемейства которого непусто (тогда говорят, что это семейство замкнутых имеет "свойство конечного пересечения"), тогда пересечение всех $F_i$ также непусто; и мы можем естественно, предполагать, что $F_i$ из базы и имеет вид $\langle f_i\rangle$ . Это в точности то, что утверждает теорема.

Другое, более прямое доказательство : пусть $I$ – множество конечных подмножеств $A$ ; мы знаем, что для $i \in I$ множества $I_i = \{j : j \in I, i \subset j\}$ образуют базу фильтра, содержащегося в некотором ультрафильтре $U$ . Для каждого $i$ из $I$ , существует модель $M_i$ для $i$ . Теперь с помощью теоремы Лося легко видеть, что $\prod M_i/U$ является моделью для $A$ .

□

**Теорема 4.6** *1) Если $A$ – противоречивое множество формул, то существует конечная противоречивая часть $A$ .*
*2) Если $f$ – следствие $A$ , то существует конечная часть $A$ , из которой следует $f$ .*

**Доказательство.** 1) эквивалентно предыдущему утверждению; чтобы доказать 2), заметим, что $f$ – следствие $A \iff A \cup \{\neg f\}$ противоречиво.

□

Можно сказать, что теорема компактности находит постоянное применение в теории моделей; здесь мы начнем с поразительных примеров этого применения.

**Теорема 4.7** *Открыто-замкнутыми подмножествами $\mathcal{J}$ являются множества вида $\langle f\rangle$ , где $f$ – предложение, и только они.*

**Доказательство.** По определению топологии в $\mathcal{J}$ множество $\langle f\rangle$ одновременно открыто и замкнуто. Обратно, пусть $A$ – открыто-замкнутое подмножество $\mathcal{J}$ . Поскольку $A$ открыто, оно является объединением непустого семейства множеств $\langle f_i\rangle$ (даже если $A$ – пустое множество, потому что $\emptyset = \langle f \wedge \neg f\rangle$ для любого предложения $f$ ) ; и так как оно замкнуто, то является компактным, значит, совпадает с объединением конечного подсемейства $A = \langle f_1\rangle \cup \ldots \langle f_n\rangle = \langle f_1 \vee \cdots \vee f_n\rangle$ .

□

Теория (не обязательно полная) называется *конечно аксиоматизируемой*, если она обладает конечной системой аксиом, или то же самое, что она обладает системой состоящей из одной аксиомы (возьмите конъюнкцию предыдущих). Значит, мы видим, что конечно-аксиоматизируемая теория соответствует открыто-замкнутому подмножеству $\mathcal{J}$ : конечная аксиоматизируемость полной теории означает, что она изолированная точка в $\mathcal{J}$ (если $f$ аксиоматизирует $T$ , то $T$ – единственная точка $\langle f\rangle$ ) .

Примеры полных, конечно аксиоматизируемых теорий :

- теория конечной структуры в конечном языке,
- в языке одного бинарного отношения, теория плотных линейных порядков без концевых точек.

Действительно, списки аксиом, данные в разделе 2.c, конечны.

Вот одно из следствий теоремы компактности : *если $\theta$ конечно аксиоматизируема, то из любой аксиоматизации $\theta$ можно выделить конечную аксиоматизацию $\theta$* . Действительно, предположим, что $\theta$ , с одной стороны, аксиоматизируема через $f$ , а с другой – через множество аксиом $g_i$; $f$ – следствие предложений $g_i$ , следовательно, по компактности $f$ следует из конечной части $g_i$ , аксиоматизирующих $\theta$ .

Это позволяет легко понять, что некоторые теории, которые мы уже изучали, не являются конечно аксиоматизируемыми; например, если язык $L$ не содержит никаких символов кроме равенства, то рассмотрим аксиомы $A_n = (\exists x_1)\dots(\exists x_n)\bigwedge\limits_{0<i<j\leq n}(x_i \neq x_j)$ . Теории $T_n$ с аксиомами $A_n \wedge \neg A_{n+1}$ и теория $T_\infty$ , содержащая все $A_n$, полны. Теория $T_\infty$ не является конечно аксиоматизируемой потому, что конечный набор его аксиом $A_1,\dots,A_n$ не влечет никогда $A_{n+1}$. Последовательность $T_n$ сходится к $T_\infty$ (легко видеть, что в этом языке теориями $T_1,\dots,T_n,\dots$ и $T_\infty$ исчерпываются все полные теории) ; $\mathcal{J}$ получается добавлением бесконечной точки $T_\infty$ для компактификации дискретного пространства из $T_1,\dots,T_n,\dots$ .

**Упражнение 4.8** *Докажите, что одно унарное отношение конечно аксиоматизируемо $\Longleftrightarrow$ его носитель конечен. Опишите пространство $\mathcal{J}$ языка одного унарного отношения. Каковы первые три производных пространства от $\mathcal{J}$ ?*

**Упражнение 4.9** *Докажите, что отношение эквивалентности конечно аксиоматизируемо (т.е. его полная теория конечно аксиоматизируема) $\Longleftrightarrow$ его носитель конечен.*

**Теорема 4.10 (Левенгейм – Сколем)** *Если $T$ – теория, не обязательно полная, имеющая бесконечную модель или сколь угодно большие конечные модели, тогда $T$ имеет модель мощности $\varkappa$ для любого кардинала $\varkappa \geq card(T)$.*

**Доказательство.** Пусть $L$ – язык теории $T$ и $L'$ – язык, полученный добавлением к $L$ новых $\varkappa$ константных символов, и пусть $T'$ – множество предложений, образованное из $T$ и предложений $c_i \neq c_j$ для всех пар $(c_i, c_j)$ различных новых констант. Конечный фрагмент теории $T'$ включает в себя лишь конечное число $c_1, \ldots, c_n$ этих констант и мы получаем для него модель из модели $M_n$ теории $T$ , содержащей по крайней мере $n$ элементов (такая модель существует по предположению), интерпретируя в ней $c_1, \ldots, c_n$ различными элементами $M_n$ , а другие $c_i$ как угодно.

Как следствие, по компактности $T'$ имеет модель $M'$ (вообще говоря, $T'$ не полная теория, даже если $T$ полна в языке $L$ ); если мы ограничим структуру $M'$ на первоначальный язык $L$ , забыв про добавленные константы, получим модель $M$ теории $T$ , имеющую по крайней мере $\varkappa$ элементов; и чтобы получить модель мощности $\varkappa$ , применяем теорему Левенгейма 3.1.

□

Рассмотрим теперь модель $M$ полной теории $T$ в языке $L$. Пусть $L(M)$ – язык, полученный добавлением к $L$ константного символа для каждого элемента $M$ , и пусть $T(M)$ – множество предложений, истинных в этом новом языке. Принадлежность $f(a_1, \ldots, a_n)$ к $T(M)$ , где $f(\bar{x})$ – формула языка $L$ означает что $\bar{a}$ из $M$ удовлетворяет $f(\bar{x})$, т.е. что $M \vdash f(\bar{a})$ ; $T(M)$ называется *диаграммой* $M$. Некоторые называют диаграммой $M$ множество бескванторных предложений $L(M)$ истинных в $M$, его мы назовём *"свободной диаграммой"* $M$ . Мы видим, что по определению элементарное расширение $M$ есть не что иное, как модель $T(M)$ и также, что из теоремы Левенгейма-Сколема следует, что если $M$ бесконечна, то она имеет элементарное расширение мощности $\varkappa$ для любого кардинала $\varkappa \geq Max(card(M), card(L))$ .

Все это показывает, что элементарная эквивалентность может характеризовать с точностью до изоморфизма только конечные структуры; например, счетная структура счетного языка имеет элементарное расширение в любой бесконечной мощности.

**Лемма 4.11** *Если $M$ и $N$ – две элементарно эквивалентные структуры, то они имеют общее элементарное расширение : существует структура $P$ и элементарные вложения $M$ и $N$ в $P$ .*

**Доказательство.** Образуем теории $T(M)$ и $T(N)$ таким образом, что имена $a_i$ элементов $M$ были совершенно другими, чем имена $b_i$ элементов $N$ ; общее элементарное расширение $M$ и $N$ – это модель теории $T(M) \cup T(N)$ . (Заметим, что две различные константы могут вполне интерпретироваться одним элементом!) Итак, мы должны доказать, что это множество предложений совместно. Поскольку мы можем заменить конечное множество предложений их конъюнкцией, то конечный фрагмент $T(M) \cup T(N)$ состоит из одного предложения $f(\bar{a})$ из $T(M)$ и одного предложения $g(\bar{b})$ из $T(N)$. Так как $N \vdash g(\bar{b})$ , то $N \vdash \exists \bar{y} g(\bar{y})$, и поскольку последнее – предложение языка $L$ , а $M$ и $N$ по определению элементарной эквивалентности удовлетворяют одним и тем же предложениям этого языка, оно так же верно в $M$ и существует $\bar{b}'$ в $M$, такой, что $M \vdash g(\bar{b}')$. Интерпретируя $\bar{b}$ через $\bar{b}'$ мы получаем из $M$ модель для $f(\bar{a}) \wedge g(\bar{b})$ ; следовательно, по компактности $T(M) \cup T(N)$ совместно.

□

Следующая лемма чуть более точна; на самом деле, эти две леммы являются двумя версиями одного и того же результата; их доказательства слегка отличаются, и читатель выберет тот метод, который ему больше по вкусу.

**Лемма 4.12** *Если $M$ и $N$ элементарно эквивалентны, то $M$ элементарно вкладывается в некоторую ультрастепень $N$ .*

**Доказательство.** Пусть $I$ – множество локальных изоморфизмов из $M$ в $N$ ; если $f(\bar{a})$ – формула с параметрами $\bar{a}$ из $M$ и $M \vdash f(\bar{a})$ , то обозначим через $I_{f(\bar{a})}$ множество локальных изоморфизмов $s$, таких, что его область определения содержит $\bar{a}$ и $N \vdash f(s\bar{a})$ ; $I_{f(\bar{a})}$ всегда непусто, поскольку $M \vdash f(a_1, \ldots, a_n)$ и, значит, $M \vdash (\exists x_1) \ldots (\exists x_n) f(x_1, \ldots, x_n) \wedge D(x_1, \ldots, x_n)$ , где $D$ – конъюнкция формул $x_i = x_j$ , если $a_i$ равен $a_j$ , $x_i \neq x_j$ , если $a_i$ и $a_j$ различны, и $N$ удовлетворяет равным образом этой формуле. С другой стороны, $I_{f(\bar{a})} \cup I_{g(\bar{b})} = I_{f(\bar{a}) \wedge g(\bar{b})}$ , значит, множества $I_{f(\bar{a})}$ образуют базу фильтра, содержащегося в некотором ультрафильтре $U$ .

Мы определим отображение $S$ модели $M$ в $N^U$ следующим образом : если $a \in M$, $i$-ая координата $Sa$ есть $ia$ , если $i$ определен на $a$ , иначе – произвольный элемент $N$ (мы исключаем случай пустых баз, который очевиден) ; заметим, что $\{i : i \text{ определен на } a\} = I_{a=a}$ , также что изменение координат за пределами $I_{a=a}$ не меняет $Sa$ по модулю $U$ , откуда следует корректность определения $S$ . Если $a$ отличен от $b$ , то $I_{a \neq a}$ лежит в ультрафильтре, что легко влечет инъективность $S$. Теперь с помощью теоремы Лося читатель без труда докажет, что $S$ – элементарное вложение $M$ в $N^U$ .

□

На самом деле, верен намного более сильный результат : *если две структуры $M$ и $N$ элементарно эквивалентны, то существует ультрафильтр $U$, такой, что $M^U$ и $N^U$ изоморфны.* Но вот это – трудная теорема, последний этап доказательства которой потребовал вмешательство Шелаха ; она требует глубоких знаний в теории моделей и об ультрафильтрах. Впрочем, она почти не применяется специалистами в теории моделей : можно было бы, разумеется, наличие изоморфных ультрастепеней принять за *определение* элементарной эквивалентности. Это было бы приятным для математика с алгебраическим складом ума, и позволило бы не говорить (по крайней мере в определении) о формулах, о локальных изоморфизмах и т.п., но сделало бы ужасно трудным доказательство простейших свойств элементарной эквивалентности! Поэтому мы обойдемся без этого результата, хотя он мог бы незначительно упростить некоторые из дальнейших доказательств.

Эта теорема Шелаха отвечает на проблему нахождения "алгебраической" характеризации (т.е. не использующей логику, формулы, выполнимость, понятия, происхождение которых может показаться подозрительным для определенных математиков) элементарной эквивалентности. На совершенно ином и значительно более простом уровне локальные изоморфизмы вместе с рангом Фраиссе дают один такой ответ. Но ответ Фраиссе, в отличие от ответа Шелаха, снабжает эффективным и непосредственным методом доказательства того, что две структуры элементарно эквивалентны.

**Упражнение 4.13** *Докажите, что порядок действительных чисел не изоморфен никакой ультрастепени порядка рациональных чисел (указание:* $Q^U$ *не полна) .*

**Теорема 4.14** *Если* $M_i$ *семейство элементарно эквивалентных структур, то они имеют общее элементарное расширение : существует структура* $M$ *и элементарные вложения* $M_i$ *в* $M$ *для каждого* $i$ *.*

**Доказательство.** Итерируя лемму 4.11 , доказываем теорему, если семейство структур $M_i$ конечно. Если оно бесконечно, то теорема компактности сводит вопрос о совместности $\cup T(M_i)$ , где множество имен элементов предполагается дизъюнктным, к конечному случаю.

□

## 4.c Метод Генкина

Хотя ультрапроизведения являются достаточно эффективным средством для доказательства сходимости ультрафильтра, мы дадим другое доказательство теоремы компактности, следуя так называемому методу Генкина. Он состоит в сведении вопроса совместности одного множества предложений в языке к вопросу совместности другого множества бескванторных предложений в в некотором расширенном языке $L^H$ (по этому методу одно предложение заменяется на бесконечное множество бескванторных предложений в $L^H$ ) ; это сводит общую теорему компактности к теореме компактности для бескванторных предложений, доказательство которой несколько проще. Его отличительная черта – выделение для формул новых константных символов, называемых ихними *свидетелями*, и допущение аксиом, гарантирующих, что если если формула $f(x)$ выполнима, то свидетель для $f(x)$ удовлетворяет ей.

Здесь мы рассмотрим только случай счетного языка, наиболее употребительного, но метод остается в силе и для несчетных языков и читателю будет дано короткое указание по поводу обобщения на этот случай. Преимущество этого метода в том, что для счетного языка вводятся только конечные или счетные структур, чего не было в случае ультрапроизведений. Из-за этого, мы увидим, что он подходит для кодирования в арифметике (смотрите главу 7 ) ; он также очень полезен для доказательства теоремы об опускании типов (смотрите главу 10 ) .

В действительности, этот метод старше, чем определение ультрапроизведений. Вот как наши отцы доказывали теорему компактности : они объявляли правила вывода, позволяющие получить из конечного множества предложений ("антецендентов" или посылок) другое предложение ("консеквент" или заключение) ; говорят, что $f$ *доказуемо* из $A$ , если существует последовательность $S_1, \ldots, S_n$ выводов, такая, что для любого $i \leq n$ каждая посылка для $S_i$ либо лежит в $A$ , либо есть заключение из одного $S_j$, $j < i$, и $f$ – заключение из $S_n$; $A$ называется *противоречивым*, если $f \wedge \neg f$ доказуемо из $A$ для некоторого $f$. Поскольку доказательство затрагивает лишь конечное число элементов $A$ , ясно что $A$ непротиворечиво $\iff$ каждая конечная часть $A$ непротиворечива. Простая проверка правил доказательства показывала, что если $f$ доказуема из $A$ , то $f$ – следствие $A$ (напомним, что это означает, что каждая модель $A$ есть модель и для $f$ ) . Труднее было доказать обратное : если $A$ непротиворечиво, то $A$ имеет модель. Это они могли доказать с помощью метода Генкина, позволяющего шаг за шагом строить модель для $f$ , если только не сталкиваются с противоречием. Все это будет детально изложено в главе об арифметике.

Мы сначала разберемся со случаем теоремы компактности для предложений без кванторов. Рассмотрим счетное множество $E = \{a_0, \dots, a_n, \dots\}$ и для определенного $m$ множество $R$ всех $m$-арных отношений на $E$ ; для данной бескванторной формулы $f(\bar{x})$ языка одного $m$-арного отношения и $\bar{a}$ из $E$ по определению $\langle f(\bar{a})\rangle$ обозначает множество отношений $r$ из $R$ , удовлетворяющих $f(\bar{a})$ . Эти множества образуют базу открыто-замкнутых множеств топологии на $R$, которая называется *топологией простой сходимости* на $m$-арных отношениях на $E$. Базу окрестностей отношения $r$ образуют множества $O_n(r)$ , где $O_n(r)$ – множество отношений, имеющих то же ограничение на множество $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ , что и $r$ .

Для любого конечного подмножества $F \subset E$, через $R_F$ обозначим множество $m$-арных отношений на $F$, а через $\rho_F$ – отображение-ограничение $R$ на $R_F$; и если $F \subset F'$, то обозначим через $\rho_{F'F}$ отображение-ограничение $R_{F'}$ на $R_{F'}$ . Если мы снабдим множества $R_F$ дискретной топологией, то $\rho_{F'F}$ непрерывны, и $R$ становится проективным пределом фильтрующейся системы, образованной пространствами $R_F$ : следовательно, $R$ – *вполне несвязное компактное пространство.*

Если вы хотите почувствовать более "конкретно" этот проективный предел, то можете доказать компактность $R$ так: пусть $\Phi_i$ семейство замкнутых множеств, имеющее свойство конечных пересечений; вы хотите найти отношение, принадлежащее всем $\Phi_i$ . Тогда можно предполагать, что каждое $\Phi_i$ имеет вид $\langle f(\bar{a})\rangle$, поскольку каждое замкнутое множество есть по определению пересечение множеств такого вида. Обозначим через $\Psi_n$ пересечение всех замкнутых множеств среди $\Phi_i$, имеющих вид $\langle f(a_1, \dots, a_{n-1})\rangle$, т.е. тех которые затрагивают только первые $n$ элементов $E$ . Так как таких множеств только конечное число и семейство обладает свойством конечного пересечения, то мы можем найти отношение в каждом $\Psi_n$, и далее требуется найти таковое, принадлежащее всем $\Psi_n$ . Заметим, что $\Psi_1 \supset \Psi_2 \supset \cdots \supset \Psi_n \supset \dots$ и тот факт, что отношение принадлежит $\Psi_n$ , зависит только от его ограничения на $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ . Так как существует лишь конечное число $m$-арных отношений на этом множестве, мы можем построить индукцией по $n$ последовательность $r_n$ $m$-арных отношений таким образом, что

- $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ – носитель отношения $r_n$ ,
- $r_{n+1}$ расширение $r_n$ ,
- для любого $n' \geq n$ существует отношение из $R$ , лежащее в $\Psi_{n'}$ , ограничение которого на $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ есть $r_n$ .

После этого, отношение $r$ из $R$ , ограничение которого на каждое $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ совпадает с $r_n$ , решает нашу проблему.

Мы можем также предполагать, что множество $E$ несчетно: множество $m$-арных отношений на $E$ с топологией простой сходимости все ещё остается компактным, поскольку оно будет проективным пределом дискретных конечных пространств. Мы также можем ввести несколько символов отношений (или одно мультиотношение) и даже бесконечное число символов вместо единственного $m$-арного символа: пространство реляционных структур на базе данной сигнатуры будет снова компактом относительно простой сходимости. Чтобы его выразить как проективный предел дискретных конечных пространств, нужно рассмотреть конечные ограничения обеднений этих мультиотношений на конечный язык (поскольку в формулу входит всегда лишь конечное число символов отношений).

Ещё одна предупреждение : мы систематически интерпретировали символ $=$ как настоящее равенство; теперь, мы собираемся временно, для доказательства следующей теоремы, рассматривать его как обычное бинарное отношение (если быть последовательным, следовало бы его обозначить по другому). Предположим, что язык содержит только символы констант и отношений; равенство удовлетворяет следующим аксиомам

$$(\forall x)x = x,\ (\forall x)(\forall y)(x = y \to y = x),\ (\forall x)(\forall y)\forall z)(x = y \wedge y = z \to x = z)$$

и для каждого символа отношения $r$ :

$$(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\forall y_1)\dots(\forall y_n)(\bigwedge x_i = y_i \to (r(x_1, \dots, x_n) \to r(y_1, \dots, y_n)))\ .$$

Обратно, если отношение $=$ удовлетворяет этим аксиомам в структуре $S$ , каждое отношение "переносится на фактор-систему" и $S/=$ становится структурой, где $=$ интерпретируется, как мы постоянно делали до сих пор, настоящим равенством.

**Теорема 4.15 (компактность для бескванторных предложений)** *Для того, чтобы множество $A$ предложений без кванторов в языке, состоящем из символов констант и отношений и без функциональных символов, имело модель (где символ $=$ интерпретируется, как обычно, настоящим равенством) достаточно, чтобы каждая конечная часть $A$ имела модель.*

**Доказательство.** Пусть $E$ – множество констант языка $L$; замыкание пространства мультиотношений на $E$ арностей, соответствующих арностям символов отношений из $L$ , включая символ $=$ , который определяется формулами

$$a = a,\ a = b \to b = a,\ a = b \wedge b = c \to a = c\ ,$$

$$(a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n \to (r(a_1, \dots, a_n) \to r(b_1, \dots, b_n))\ ,$$

где $a, b, c$ пробегают все $E$ и где $r$ – символ отношения из $L$ , компактно.

$\square$

Эта теорема 4.15 очевидно, следствие теоремы 4.4, мы здесь её рассматриваем как один из этапов в доказательстве теоремы 4.4.

Теперь мы приступаем к методу Генкина; рассмотрим счетный чисто реляционный язык $L$ (т.е. без символов констант и функций; мы всегда можем свести нашу проблему к такому языку) и множество $A$ предложений $L$ , совместность которого мы хотим проверить.

К этому языку $L$ , мы сначала добавим счетное число константных символов $a_{ij}$, индексированных парой натуральных чисел $i, j$. Для каждого натурального $j$ обозначим через $E_j$ множество $\{a_{0j}, a_{1j}, \dots, a_{ij}, \dots\}$. Формул вида $f(\bar{a}, x)$, где $f(\bar{y}, x) \in L$, с одной свободной переменной $x$ , с параметрами $\bar{a}$ из $E_0$ , счетное число: мы их пронумеруем $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots$ и каждой из них инъективным образом ставим в соответствие один элемент, называемый его *свидетелем*, из множества $E_1$: свидетелем $f_0$ будет $a_{01}, \dots$, свидетелем $f_i$ будет $a_{i1}$ и т.д.

Затем мы пронумеруем все новые, т.е. не имеющие ещё свидетелей, формулы с параметрами из $E_0 \cup E_1$ и для каждой из них, как и раньше, определяем свидетеля из $E_2$; продолжая таким же образом для каждой новой формулы с одной свободной переменной и с параметрами в $E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}$ инъективно определяем свидетеля, лежащего во множестве констант $E_n$. Нумерация формул произвольна; важно, что все формулы нумеруются так, чтобы определение свидетелей было корректным; в итоге, каждая формула $f(\bar{a}, x)$ с параметрами $\bar{a}$ из $E = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_n \dots$ имеет свидетеля из $E$.

Для данной $L$-структуры $S$ с конечным или счетным носителем назовем *нумерацией Генкина* структуры $S$ отображение $E$ в носитель $S$, такое, что (мы отождествляем $a_{ij}$ с его образом в $S$ ) :

– каждый элемент носителя $S$ имеет вид $a_{ij}$ ,

– если $S \vdash (\exists x) f(\bar{a}, x)$ , тогда $S \vdash f(\bar{a}, a_{f(\bar{a},x)})$ , где $a_{f(\bar{a},x)}$ – свидетель формулы $f(\bar{a}, x)$ .

**Лемма 4.16** *Каждая непустая, конечная или счетная $L$-структура имеет нумерацию Генкина.*

**Доказательство.** Мы начнем с нумерации базы структуры $S$ списком $\{a_{00}, a_{10}, \dots, a_{i0}, \dots\}$ (если $S$ конечно, то бесконечно повторяем последний элемент) ; затем берем в качестве $a_{i1}$ элемент, удовлетворяющий $f_i(x)$ , если таковой существует, иначе – произвольный элемент; и т.д. продолжаем.

□

Заметим, что в определении нумерации Генкина мы не требуем, чтобы каждый элемент структуры имел вид $a_{i0}$ ! Кроме констант $E$, мы также добавим для каждой формулы $f(\bar{x})$ языка $L$ символ отношения, который мы обозначим $f^H(\bar{x})$ , арность которого совпадает с числом свободных переменных в $f$; если $f$ – предложение, то $F^H$ – символ нульарного отношения (смотри главу 3). Чтобы упростить нашу жизнь, мы рассмотрим лишь формулы, не содержащие квантор $\forall$; это совсем не сужает выразительные возможности нашего языка, поскольку мы можем везде заменить $\forall$ на $\neg\exists\neg$. Мы обозначим через $L^H$ язык, полученный добавлением к языку $L$ констант из $E$ и символов отношений $f^H(\bar{x})$.

Обозначим через $T(H)$ следующее множество бескванторных предложений языка $L^H$ , где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – произвольные кортежи элементов $E$ :

– если $f(\bar{x})$ – атомная, то $f(\bar{a}) \leftrightarrow f^H(\bar{a})$ ,

– если $f$ и $g$ – формулы из $L$ , то $(f \wedge g)^H(\bar{a}) \leftrightarrow f^H(\bar{a}) \wedge g^H(\bar{a})$ ,

– если $f$ – формула из $L$ , то $(\neg f)^H(\bar{a}) \leftrightarrow \neg f^H(\bar{a})$ ,

– если $f(\bar{y})$ – формула из $L$ , имеющая вид $(\exists x)g(\bar{y}, x)$, то $f^H(\bar{a}) \leftrightarrow g^H(\bar{a}, a_{g(\bar{a},x)})$ , где $a_{g(\bar{a},x)}$ – свидетель формулы $g(\bar{a}, x)$ ,

– для всех формул $f(\bar{y}, x)$ языка $L$ , $f^H(\bar{a}, b) \to f^H(\bar{a}, a_{f(\bar{a},x)})$ , где $a_{f(\bar{a},x)}$ – свидетель формулы $f(\bar{a}, x)$ .

**Теорема 4.17** *Множество предложений $\{\ldots, f_i, \ldots\}$ языка $L$ имеет непустую модель тогда и только тогда, когда $T(H) \cup \{\ldots, f_i^H, \ldots\}$ совместно.*

**Доказательство.** Предположим сначала, что множество $\{\ldots, f_i, \ldots\}$ имеет непустую модель; по теореме Левенгейма 3.1, доказательство которой не использует теорему компактности, так как язык $L$ счетен, оно имеет конечную или счетную модель : проинтерпретируем $a_{ij}$ с помощью нумерации Генкина этой модели и $f^H$ как множество кортежей, удовлетворяющих $f^H$ , в частности, это означает, что если $f$ – предложение, то $f^H$ интерпретируется как "истина", если $f$ истинна на $M$ , и как "ложь", в противном случае; нетрудно видеть, что таким образом мы получаем модель для $T(H) \cup \{\ldots, f_i^H, \ldots\}$ .

Обратно, рассмотрим модель $N$ для $T(H) \cup \{\ldots, f_i^H, \ldots\}$ ; в этой модели возможно существуют элементы, не имеющие вид $a_{ij}$ : пусть $M$ – ограничение $N$ на множество всех $a_{ij}$; $M$ также модель $T(H) \cup \{\ldots, f_i^H, \ldots\}$ , поскольку все эти предложения – бескванторные. Теперь я оставляю читателю проверку индукцией по сложности формул того, что для любой $f(\bar{x})$ из $L$

$$M \vdash (\forall x)(f(\bar{x}) \leftrightarrow f^H(\bar{x})) ;$$

нужно использовать только тот факт, что $M$ – модель для $T(H)$ , пронумерованная сюръективно константами $a_{ij}$ : он поймет дальше, что $a_{ij}$ образуют нумерацию Генкина для $M$! В частности, $M \vdash f_i^H \leftrightarrow f_i$ , и поскольку на $M$ истинны все $f_i^H$ , то обеднение $M$ на $L$ будет (непустой!) моделью для всех $f_i$ .

□

Теорема 4.17 была доказана при предположении, что $L$ счетен; для её доказательства при $|L| = \varkappa > \omega$ , достаточно усовершенствовать конструкцию Генкина, введя $\varkappa$ символов констант в каждое множество $E_0, \ldots, E_n, \ldots$ .

**Доказательство теоремы компактности методом Генкина.** Итак, пусть $A$ – множество аксиом в языке $L$ , каждая конечная часть которого имеет модель; начнем с разбора случая пустых моделей, прося Всевышнего не оставлять больше на нашем пути это изобретение Дьявола. Для этого, добавим к нашему языку константный символ $c$ и переделаем все предложения из $A$ таким образом: заменим каждый квантор $\exists x$ на $(\exists x)(x \neq c)\wedge$ и каждый квантор $\forall x$ на $(\forall x)(x = c)\vee$ ; пусть $f'$ – предложение, полученное таким образом из $f$ ; $f'$ выражает просто-напросто, что элементы, отличные от $c$ , образуют структуру, удовлетворяющую $f$ : модель для $f'$ получается из модели $f$ добавлением точки $c$, а модель $f$ получается из модели для $f'$ стиранием этой точки. Таким образом, мы видим, что $A$ имеет модель $\iff$ множество $A'$ формул $f'$ имеет модель, которая обязательно непуста!

Необходима ещё одна манипуляция, чисто метафизический характер которой знаком опытному читателю: мы можем заменить все символы функций из $L$ на их графики, являющиеся символами отношений, добавив аксиомы о том, что они графики функций; также мы можем заменить константы из $L$ как и $c$ , унарными предикатами вместе с аксиомами, выражающими, что они удовлетворяются единственными элементами! В итоге мы получим множество $A''$ предложений в чисто реляционном языке, любая конечная часть которого имеет непустую модель.

Применяя теорему 4.17 , мы видим, что каждая конечная часть множества предложений $T(H) \cup (A'')^H$ имеет модель, значит, по 4.15 это – совместная теория и снова по 4.17 $A''$ совместно и, значит, $A$ также совместно. $\square$

## 4.d Исторические и библиографические примечания

Применения фильтров и ультрафильтров в топологии введены Анри Картаном [КАРТАН, 1937, 1937a] ; аксиома ультрафильтра была выведена из аксиомы выбора Тарским [ТАРСКИЙ, 1930]. Построение ультрапроизведений в общем объеме принадлежит Лосю [ЛОСЬ, 1955]; он там доказал теорему, носящую теперь его имя. Однако известно несколько спорадических применений ультрапроизведений до него, в частности [СКОЛЕМ, 1934], где ультрастепень, ограниченная определимыми объектами, нашла применение для построения нестандартной модели арифметики.

Теорема об изоморфных ультрастепенях была сильно поранена в [КЕЙСЛЕР, 1964]; завершающий укол был нанесен в [ШЕЛАХ, 1971a].

Для введения в теорию моделей через ультрапроизведения я рекомендую [БЕЛЛ-СЛОМСОН, 1969]. Теорема компактности под видом 4.5 и 4.6 принадлежит Геделю [ГЁДЕЛЬ, 1930]; в действительности, как я уже объяснил в начале раздела 4.c, для Геделя эта теорема была простым следствием (можно даже сказать: неожиданным следствием, в некотором роде – любопытным замечанием) его "теоремы полноты" логики, где он доказал, что конечная система правил вывода достаточна для выражения понятия следствия (смотрите главу 7). Это можно было точно так же извлечь из [ЭРБРАН, 1928] или из [ГЕНЦЕН, 1934], где были доказаны результаты той же природы.

Эта бедная теорема компактности вошла через маленькую дверь, и кажется, эта оригинальная скромность всё ещё причиняет ей вред в учебниках по логике. По моему мнению, этот результат намного существеннее и первичнее (и значит, также менее изощреннее), чем теорема полноты Геделя, подтверждающая, что можно формализовать вывод в некотором смысле как в арифметике; выводить её из теоремы полноты – это методическая ошибка.

Если так поступают, то это из-за слепой верности историческим условиям, в которых она родилась; эта тяжесть традиций чувствуется даже в книге [ЧЭН-КЕЙСЛЕР, 1973], которая рассматривалась в 70-е годы как библия теории моделей; она начинается синтаксическими исследованиями, не имеющими ничего общего с тем, что излагается в следующих главах. Этот подход – выводить компактность из возможности аксиоматизировать понятие вывода, как только применяется к исчислению высказываний, дает самое странное доказательство компактности $2^\omega$ !

Такой подход, несомненно, более "логичен", но он имеет неудобство в том, что сначала заставляют студента проглотить систему формального вывода, в конечном счете достаточно произвольную, которую можно будет оправдать лишь после, показав, что он действительно представляет семантическое следствие. Не забывайте, что формализмы имеют право на жизнь только при адекватном представлении главных понятий.

Теорема Левенгейма-Сколема 4.10, очень неудачно названа; приведенной здесь полной версией она обязана Тарскому (смотрите [ТАРСКИЙ-ВОТ, 1957]; несомненно это не самая первая ссылка). Как я объяснил в замечании к главе 2, теоремы Левенгейма 2.5 и 3.1 могут законно носить имя Левенгейма-Сколема: некоторые говорят в этом случае о теореме Левенгейма-Сколема "вниз".

Вклад Тарского заключается в поднятии мощности, в построении произвольно больших моделей. Поэтому иногда это утверждение называют теоремой Левенгейма-Сколема "вверх". Легенда гласит, что Торальф Сколем до конца своей жизни возмущался связью своего имени с утверждениями такого рода, рассматривая их как чушь, поскольку по его мнению несчетные множества были реально несуществующими фикциями.

Понятие диаграммы систематически использовалось Абрахамом Робинсоном [РОБИНСОН, 1963].

Метод Генкина, заключающийся в построении моделей из констант, уточняя шаг за шагом отношение выполнимости среди них, появился в [ГЕНКИН, 1949].