Глава 9

Насыщенные модели

SATURABILITE sf. T. de chimie. Qualité de ce qui est saturable

SATURABLE adj. Qui est suspectible de saturation

SATURANT, ANTE adj. Qui a la propriété de saturer

SATURATION (sa-tu-ra-sion) sf. T. de chimie

1° Le terme où, les affinités réciproques des deux principes d'un corps binaire étant satisfaites, aucun des deux principes n'est plus susceptible de s'unir avec une nouvelle quantité de l'autre ...

2° Saturation du sol des cimetières, condition qui provient de ce que, des cadavres nouveaux y étant sans cesse inhumés, avant que les cadavres plus anciens aient eu le temps de se consumer, le sol devient impropre à opérer les changements qui constituent la putréfaction.

E.L.

Теперь мы приступаем к теории моделей в буквальном смысле. Сначала уточним некоторые обозначения, которые здесь будут приняты. Мы рассматриваем теорию T, которая будет полной, если не оговорено противное, в языке L; через $|T|$ или $|L|$ обозначается мощность языка, то есть число его формул, она равна ω, если L содержит конечное или счетное число символов отношений, функций и констант и она равна $\varkappa$, если L содержит $\varkappa > \omega$ символов. Если T полна и имеет конечную модель, то она будет ее единственной моделью с точностью до изоморфизма. Поскольку, этот случай не очень интересен, мы в дальнейшем предполагаем, что все модели T бесконечны.

Символами $M, N \ldots$ обозначают модели теории T; множество параметров – это подмножество A некоторой модели T; $L(A)$ обозначает язык, полученный добавлением к L символов констант для обозначения каждого элемента A; и $T(A)$ обозначает теорию, образованную из предложений в $L(A)$, выполняющихся на элементах из A в модели M , где они все лежат. Необходимо понять, что множество параметров задается не множеством A , а теорией $T(A)$. Если $A \subset M$, $M \prec N$ (N – элементарное расширение M), то A отождествляется, как множество параметров, с A, рассматриваемым как подмножество N, поскольку $T(A)$ сохраняется при элементарном расширении.

Если M – модель T, то модель $T(M)$ есть не что иное, как элементарное расширение M (в котором каждый элемент M выделен константой). Если $A \subset M$, то говорят, что два элемента x_1 и x_2 имеют одинаковый тип над A, если они удовлетворяют одним и тем же "формулам с параметрами из A", т.е. формулам из $L(A)$; значит, тип – это полная теория в языке $L(A \cup \{x\})$, содержащая $T(A)$; любой тип в конце концов реализуется в некотором элементарном расширении M. Множество типов над A обозначается через $S_1(A)$; мы его снабжаем топологией, определенной с помощью формул: оно становится вполне несвязным компактом.

Напомним, что типы, реализующиеся в произвольной модели, содержащей A (т.е. в модели $T(A)$) образуют плотное подмножество $S_1(A)$: смотрите 5.a; и что если A содержится в B, то ограничение $S_1(B)$ на $S_1(A)$ – непрерывное отображение. Аналогично можно вводить пространства $S_n(A)$ типов n-ок, или n-типов, взяв n переменных $x_1, \ldots, x_n$ вместо одной x; и даже пространство $S_\alpha(A)$ α-типов, где α – ординал, введя α-последовательность переменных, то есть последовательность $\{x_\beta,\}_{\beta<\alpha}$ переменных, индексированных ординалом α.

Некоторые называют "типом" теорию, не обязательно полную, в $L(A \cup \{x\})$, называя "полным типом" элемент $S_1(A)$ или $S_n(A)$; для нас тип всегда будет полным, если мы не уточняем "неполный тип"; "неполный тип" – это замкнутое подмножество $S_1(A)$. Если $A = \emptyset$, то мы пишем $S_n(T)$ вместо $S_n(\emptyset)$. Тип над $\emptyset$ будем называть типом без параметра, чистым или абсолютным типом, следуя своему настроению. Часто говорят "модель", не уточняя ее теорию; это потому, что модель, конечно, является моделью своей собственной теории! Символы α, β, $\gamma, \ldots$ обозначают ординалы, $\varkappa, \lambda, \mu, \ldots$ – бесконечные кардиналы, т.е. начальные ординалы; $card(A)$ или $|A|$ есть мощность A.

9.a Теорема Свенониуса

Если два элемента a и b модели M соответствуют друг другу при некотором автоморфизме s модели M ($sa = b$), или при автоморфизме некоторого элементарного расширения M , то очевидно, что a и b имеют одинаковый тип. Следующая теорема утверждает обратное:

Теорема 9.1 *Если два элемента a и b модели M имеют одинаковый тип, то существует элементарное расширение N модели M и автоморфизм s модели N такой, что $s(a) = b$.*

Доказательство. Нужно доказать совместность множества предложений в языке $L(M) \cup \{s\}$, состоящего из $T(M)$, формулы $s(a) = b$, аксиомы, выражающей, что s – биекция, и аксиом, выражающих, что s сохраняет все отношения, функции и константы структуры M. Из компактности, достаточно доказать, что каждый его конечный фрагмент совместен, также мы можем свести доказательство к случаю, когда M – конечная или счетная модель в конечном языке, который можно полагать, как это мы часто делали, чисто реляционным. Тогда введем для каждого $p \geq 1$ новый символ $E_p(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p)$ и список аксиом, содержащий $T(M)$, и выражающий, что $E_p(\bar{x}, \bar{y})$ определяет отношение эквивалентности на p-ках, аксиомы

$$(\forall x)(\exists y)E_1(x, y),\ \ldots,\ (\forall \bar{x})(\forall \bar{y})(\forall u)(\exists v)(E_p(\bar{x}, \bar{y}) \to E_{p+1}(\bar{x}, u, \bar{y}, v)),\ \ldots$$

и наконец, для каждой атомной формулы $f(t, \bar{x})$ первоначального языка, аксиомы вида

$$(\forall \bar{x})(\forall \bar{y})(E_p(\bar{x}, \bar{y}) \to (f(a, \bar{x}) \leftrightarrow f(b, \bar{y})))\ .$$

Это семейство аксиом совместно, так как его конечный фрагмент вовлекает только p символов $E_1, \ldots, E_p$ и мы получаем для него модель с носителем M, интерпретируя $E_i(\bar{x}, \bar{y})$ через множество кортежей $(\bar{x}, \bar{y})$ длины $2i$ элементов M таких, что $a^\frown \bar{x}$ и $b^\frown \bar{y}$ $(p - i)$-эквивалентны (т.е. удовлетворяют одним и тем же формулам до кванторного ранга $p - i$) . Очевидно, это возможно потому, что a и b одного типа, т.е. p-эквивалентны для любого p .

Итак, эта счетная теория имеет конечную или счетную модель N, которая, если рассматривать как L структуру, элементарно расширяет M, поскольку является моделью $T(M)$; и если c и d – кортежи длины p из N, удовлетворяющие $E_p(\bar{x}, \bar{y})$, то $a^\frown \bar{c}$ и $b^\frown \bar{d}$ ∞-эквивалентны в смысле языка L. Как следствие a и b ∞-эквивалентны в L-структуре N. По 1.14, поскольку N счетна, это означает, что (N, a) и (N, b) изоморфны или еще, что существует автоморфизм s модели N, такой, что $s(a) = b$.

□

Если A – подмножество модели M, то мы назовем *A-автоморфизмом* M автоморфизм M, оставляющий неподвижным A поточечно. Заменив в теореме 9.1 T на $T(A)$, мы видим, что два элемента из M имеют одинаковый тип над A тогда и только тогда, когда существует элементарное расширение M, некоторый A-автоморфизм которого переводит один элемент на другой. Более того, это же доказательство проходит для n-типов и, по компактности, для типов α-последовательностей. Эта теорема, проясняющая понятие типа, позволяет также доказать некоторые результаты об определимости, излагаемые ниже. Пусть даны L-структура M и n-арное отношение r на M, r называется *определимым* (также говорят *интерпретируемо*), если существует формула $f(\bar{x})$ языка L такая, что r состоит в точности из кортежей из M, удовлетворяющих f; в языке $L(r)$ структура (M,r) удовлетворяет $(\forall\bar{x})(r(\bar{x}) \leftrightarrow f(\bar{x}))$. Здесь, формула f не содержит параметров из M, если формула содержит параметры из M, то уточняем: *r определимо с параметрами.* Тогда, если (M',r') – элементарное расширение (M,r), отношение r' определяется формулой f и в M' ; и очевидно, что каждый автоморфизм структуры M' является автоморфизмом и для r'. Обратное также верно:

Теорема 9.2 (Свенониус) *Если отношение r на носителе структуры M не определимо в M, то существует элементарное расширение (M',r') структуры (M,r), такое, что некоторый автоморфизм s модели M' не сохраняет r'.*

Доказательство. Сначала докажем, что существует элементарное расширение (M_1,r_1) модели (M,r) вместе с двумя кортежами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одного типа в смысле M_1, один в r_1, а другой в $\neg r_1$. Если это не так, то в теории $T(r)$ тип n-ки, удовлетворяющей r, зависит только от его ограничения на язык L структуры M. Итак, пусть $p \in S_n(T,r)$ и предположим, что $p \vdash r(\bar{x})$, π – множество формул языка L, удовлетворяющихся типом p. По предположению $\pi \vdash r(\bar{x})$ и по компактности некоторый конечный фрагмент π , который можно заменить на конъюнкцию его формул, достаточен для вывода r : существует формула $f_p(\bar{x})$ языка L, такая, что $p \vdash f_p(\bar{x})$ и $T(r) \vdash (\forall\bar{x})(f_p(\bar{x}) \to r(x)$. Мы покрыли открыто-замкнутое множество $\langle r\rangle$ открытыми множествами $\langle f_p\rangle$. По компактности, конечное число среди них, соответствующее формулам $f_1,\ldots,f_m$, достаточно для этого и $\langle r\rangle = \langle f_1 \vee \cdots \vee f_m\rangle$. Значит, $T(r) \vdash (\forall\bar{x})(r(\bar{x}) \leftrightarrow f_1(\bar{x}) \vee \cdots \vee f_m(\bar{x}))$, это в точности означает, что r определимо в M .

Теперь покажем, совершенно аналогичным доказательству теоремы 9.01 способом, что существует элементарное расширение (M',r') модели (M,r) (и не только элементарное расширение M' модели M!), где M' имеет автоморфизм s , переводящей $\bar{a}$ на $\bar{b}$, и s не является автоморфизмом для r' .

□

Пусть T – теория, необязательно полная, в языке $L(r)$, полученном добавлением к L *нового* символа отношения r. Говорят, что *r определяется явно* в T , если существует формула f языка L такая, что $T \vdash (\forall\bar{x})(f(\bar{x}) \leftrightarrow r(\bar{x}))$. Отношение *r определяется неявно*, если для любой модели M множества T_L предложений из T в языке L (не забудьте, что T замкнута относительно вывода), существует не более одного отношения r на базе M, такого, что (M,r) – модель T . Ясно, что явная определимость влечет неявную: в случае явного определения каждая модель T_L превращается в модель для T, интерпретируя r через $f(\bar{x})$, и это – единственная возможность.

Теорема 9.3 (Теорема Бета) *Теория T в языке $L(r)$ определяет отношение r явно с помощью формулы языка L тогда и только тогда, когда она его определяет неявно.*

Доказательство. Сначала предположим, что существуют формулы $r_1(\bar{x}), \ldots, r_m(\bar{x})$ языка L такие, что

$$T \vdash (\forall \bar{x})(r(\bar{x}) \leftrightarrow r_1(\bar{x})) \vee \cdots \vee (\forall \bar{x})(r(\bar{x}) \leftrightarrow r_m(\bar{x})) \ .$$

Если $m = 1$, то r явно определяется. Предположим, что $m \geq 2$ и что r неявно определимо; рассмотрим множества аксиом $T_1, \ldots, T_m$ в языке L , полученные заменой всюду в T отношения r на, соответственно, $r_1, \ldots, r_m$.

По неявной определимости r мы имеем $T_1 \cup T_2 \vdash (\forall \bar{x})(r_1(\bar{x}) \leftrightarrow r_2(\bar{x}))$. Значит, по компактности, существует формула $f(r)$ из T такая, что $f(r_1) \wedge f(r_2) \vdash (\forall \bar{x})(r_1(\bar{x}) \leftrightarrow r_2(\bar{x}))$, где $f(r_1)$ и $f(r_2)$ обозначают то, что получается при замене в $f(r)$ отношения r на r_1 и r_2 соответственно. Повторяя этот аргумент для других пар мы, в конечном счете, найдем формулу $g(r)$ из T, такую, что:

- в каждой модели T предложение $g(r_1) \vee \cdots \vee g(r_m)$ истинно;
- если $g(r_i)$ истинно, то единственной возможной интерпретацией для r является r_i : $(\forall \bar{x})(r \leftrightarrow r_i)$ истинно;
- и очевидно, если имеем $g(r_i) \wedge g(r_j)$, то мы имеем также $(\forall \bar{x})(r_i \leftrightarrow r_j)$ и в этом случае мы видим, что $T \vdash (\forall \bar{x})(r(\bar{x}) \leftrightarrow \bigwedge\limits_{1 \leq i \leq n} (g(r_i) \rightarrow r_i(\bar{x})))$, что является явным определением r .

В противном случае, по компактности существует модель (M, r) теории T , где r не определимо в M с помощью формулы L ; по теореме Свенониуса существует элементарное расширение (M', r') модели (M, r) с автоморфизмом s модели M' сдвигающим r' : (M', r') и (M', sr') – две модели T, что противоречит неявной определимости r .

□

Если (M, r) – конечная структура, то она не имеет собственных элементарных расширений. Тогда теорема Свенониуса утверждает, что r сохраняется при всех автоморфизмах M тогда и только тогда, когда оно определимо (без параметров!) в M. Вот это и есть частный случай фундаментальной теоремы из "Абстрактной теории Галуа" Марка Краснера, установившего дуальность между множествами отношений замкнутых относительно "логических операций" и их группами автоморфизмов; в случае множества с бесконечным носителем, для этого нужно вводить инфинитарные языки.

Заметим также, что, если E – конечное множество из n элементов и если G – произвольная подгруппа группы перестановок E, то G – группа автоморфизмов n-арного отношения $G_{\bar{a}} = \{\bar{b} : \bar{b} = s\bar{a},\ s \in G\}$ орбиты по G n-ки $\bar{a}$, биективно нумерующей E .

9.b Компактные, насыщенные, однородные, универсальные модели

Теперь мы введем ряд определений; модель M теории T называется *$\varkappa$-компактной*, если для любого множества формул $f(\bar{a}, x)$ языка $L(M \cup \{x\})$

совместного с $T(M)$ и имеющего мощность меньше $\varkappa$, существует x в M такой, что (M, x) будет моделью для него; другими словами, каждый неполный тип (но, возможно, полный!) с параметрами в M, имеющий аксиоматизацию по модулю $T(M)$ из меньше, чем $\varkappa$ формул, реализуется в M .

По определению, любая модель ω-компактна: если $\{f_1(\bar{a_1}, x), \ldots, f_n(\bar{a_n}, x)\}$ совместно с $T(M)$, то это значит $M \vdash (\exists x)(f_1(\bar{a_1}, x) \wedge \cdots \wedge f_n(\bar{a_n}, x))$. Модель M называется *$\varkappa$-насыщенной*, если для каждого подмножества A в M , мощности меньше $\varkappa$, каждый тип из $S_1(A)$ реализуется в M .

Мы снова здесь встречаем понятие ω-насыщенной модели из главы 5. Ясно, что $\varkappa$-насыщенная модель $\varkappa$-компактна, если π неполный тип мощности меньше чем $\varkappa$, то параметры, вовлеченные в его формулы, образуют множество A мощности меньше $\varkappa$, и π пополняется до некоторого типа p из $S_1(A)$, который реализуется в M элементом, тем более реализующим π . Обратно, если $\varkappa \geq |T|^+$, то $\varkappa$-компактная модель $\varkappa$-насыщена, поскольку число формул языка $L(A \cup \{x\})$ равно $Max(|A|, |T|)$. Понятие $\varkappa$-насыщенной модели намного интереснее чем понятие $\varkappa$-компактной модели. Модель называется *насыщенной*, если она конечна или мощности $\varkappa$ и является $\varkappa$-насыщенной. Заметим, что модель мощности $\varkappa$ не может быть $\varkappa^+$-компактной, поскольку множество формул $x \neq a$, для всех a из M , совместно; значит, насыщенная модель имеет свойство максимальной насыщенности, которую позволяет её мощность.

Модель M называется *$\varkappa$-универсальной*, если любая модель T мощности *не больше* $\varkappa$ изоморфна элементарному ограничению M . Иногда говорят, что модель *универсальна*, если она универсальна в своей мощности.

Модель M *$\varkappa$-(слабо) однородна*, если для любых двух подмножеств A и B в M мощностей меньше $\varkappa$ и одного типа (A и B пронумерованы одним и тем же ординалом меньшим чем $\varkappa$ и если в $T(A)$ заменить каждый a_α на b_α того же индекса, то получаем $T(B)$), для любого a из M существует b из M такой, что $A \cup \{a\}$ и $B \cup \{b\}$ имеет одинаковый тип. Часто говорят о (слабой) *однородности* вместо ω-однородности; так как это нарушает параллельные соглашения для насыщенных моделей, мы его отвергаем. Модель M *$\varkappa$-сильно однородна*, если для любых двух подмножеств (или точнее α-последовательностей) A и B в M одного типа, мощности меньше $\varkappa$, существует автоморфизм s модели M, такой, что $sA = B$. Если M $\varkappa$-сильно однородная, то она $\varkappa$-однородна, поскольку $A \cup \{a\}$ и $sA \cup \{sa\}$ имеют одинаковый тип.

Мы видим также, что конечная структура имеет все, какие нам угодно, свойства насыщенности, универсальности и, по теореме 9.1, однородности. Заметим, что если M $\varkappa$-компактна, то каждый неполный α-тип имеющий меньше чем $\varkappa$ формул, где α – ординал, меньший $\varkappa$, реализуется в M . На самом деле, пусть F – множество формул вида $f(\bar{a}, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < \alpha$, совместное с $T(M)$ и мощности, меньшей $\varkappa$. Если оно конечно, то можно взять конъюнкцию его формул, и если оно бесконечно, то мы можем замкнуть это множество относительно конечных конъюнкций, что не повышает мощность. Тогда, пусть F_0 – множество, полученное $\exists$-квантификацией во всех формулах из F всех свободных переменных x_α, кроме x_0 : по $\varkappa$-компактности F_0 реализуется элементом b_0 из M. Пусть F_1 – множество, полученное из F заменой x_0 на b_0 , и потом $\exists$-квантификацией по всем переменным, кроме x_1 :

это действительно совместное множество, содержащее меньше $\varkappa$ формул языка $L(M) \cup \{x_1\}$ и реализующееся некоторым элементом b_1 из M. Продолжая эту процедуру, мы реализуем последовательно все x_α элементами b_α.

Сходные рассуждения доказывают, что если M $\varkappa$-насыщена, $A \subset M$ и $|A| < \varkappa$, то каждый тип из $S_\varkappa(A)$ (и не только каждый тип из $S_\alpha(A)$ для всех $\alpha < \varkappa$) реализуется в M. Сначала реализуем тип x_0 над A , потом тип x_1 над $A \cup \{x_0\}, \ldots$, тип x_α над множеством $A \cup \{x_0, x_1, \ldots, x_\beta, \ldots\}_{\beta<\alpha}$ мощности, меньшей $\varkappa$, и т.д.

Точно так же, если M $\varkappa$-слабо однородна и если A и B – подмножества M одного типа и мощности, меньшей $\varkappa$, и если C – подмножество M мощности $\leq \varkappa$, то существует $D \subset M$ такое, что $A \cup C$ и $B \cup D$ имеют одинаковый тип (заметим, что две α-последовательности имеют одинаковый тип, если любые два конечных кортежа их соответствующих друг другу элементов имеют одинаковый тип: реализуйте одну за другой переменные типа D).

Теперь докажем несколько теорем.

Теорема 9.4 *Две ω-слабо однородные модели ∞-эквивалентны тогда и только тогда, когда они реализуют одни и те же (чистые) типы из $S_n(T)$ для каждого n .*

Доказательство. Пусть M и N ∞-эквивалентны, для каждого $\bar{a}$ из M существует $\bar{b}$ из N такой, что $(M, \bar{a})$ и $(N, \bar{b})$ ∞-эквивалентны. Значит, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют одинаковый тип и M и N реализуют одни и те же чистые типы.

Обратно, пусть M и N ω-слабо однородны и реализуют одни и те же чистые типы. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют одинаковый тип, первый из M , второй из N (так как M и N модели полной теории T , то мы можем даже брать $\bar{a} = \bar{b} = \emptyset$) . Добавим c к $\bar{a}$, тогда существуют $\bar{b}'$ и d' в N такие, что $\bar{a}^\frown c$ и $\bar{b}'^\frown d'$ имеют одинаковый тип, по однородности N найдется также элемент d такой, что $\bar{b}^\frown d$ имеет тот же тип, что и $\bar{a}^\frown c$.

□

Мы видим, в частности, что две счетные ω-слабо однородные модели изоморфны, как только они реализуют одни и те же чистые типы.

Следствие 9.5 *Счетная ω-слабо однородная модель ω-сильно однородна.*

Доказательство. Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют одинаковый тип в M , то структуры $(M, \bar{a})$ и $(M, \bar{b})$ счетны, ω-слабо однородны и реализуют одни и те же чистые типы. На самом деле, чистый тип в $(M, \bar{a})$ есть не что иное, как тип из $S_n(\bar{a})$. Значит, они изоморфны.

□

Теорема 9.6 *Если $\varkappa \geq |T|$, то модель M теории T $\varkappa$-насыщена тогда и только тогда, когда она $\varkappa$-слабо однородна и $\varkappa$-универсальна.*

Доказательство. Всякая $\varkappa$-насыщенная модель M $\varkappa$-универсальна, поскольку она реализует все типы $\varkappa$-последовательностей. Проверим ее однородность. Рассмотрим два подмножества A и B модели M одного типа с

$|A| = |B| < \varkappa$ и элемент a из M типа p над A. Пусть q – тип, полученный из p при замене в каждой его формуле параметров из A на их двойники из B. Так как A и B имеют одинаковый тип, то, если $p \vdash f(x, \bar{a})$, то $M \vdash (\exists x) f(x, \bar{a})$ и $M \vdash (\exists x) f(x, \bar{b})$. Значит, q также является совместным множеством формул. Это – тип над B , который по насыщенности реализуется элементом b из M, откуда и получаем её однородность.

Пусть теперь M $\varkappa$-однородна и $\varkappa$-универсальна. Пусть A – подмножество M, $|A| < \varkappa$, и p – тип над A , который реализуется в некотором элементарном расширении N элементом a. По теореме Левенгейма-Сколема мы можем реализовать тип $A^\frown a$ над $\emptyset$ в модели N мощности, не превосходящей $\varkappa$. Обозначим его реализацию в N через $A'^\frown a'$ (с естественным злоупотреблением, продолжая нумерацию A' на последующий a' ; это обозначение более или менее эквивалентно $A' \cup \{a'\}$, различие является чисто психологическим, оно использовалось до этого). По $\varkappa$-универсальности M модель N вкладывается элементарно в M. В силу $\varkappa$-однородности M существует a_1 в M такой, что $A'^\frown a'$ и $A^\frown a_1$ имеют одинаковый тип, следовательно, a_1 реализует p.

□

Теорема 9.7 *Две насыщенные модели одинаковой мощности полной теории T изоморфны.*

Доказательство. Пусть $M = \{a_\alpha\}_{\alpha<\varkappa}$ и $N = \{b_\alpha\}_{\alpha<\varkappa}$ – наши две модели. Построим индукцией по $\alpha \leq \varkappa$ две последовательности инъекций f_α подмножеств M в N и g_α подмножеств N в M, таких, что область определения f_α содержит $\{a_\beta,\}_{\beta<\alpha}$ и имеет мощность не больше $2|\alpha|$, а область определения g_α содержит $\{b_\beta\}_{\beta<\alpha}$ и имеет мощность не больше $2|\alpha|$, кроме того, если $\beta < \alpha$, то f_α расширяет f_β и g_α расширяет g_β , и наконец, $f_\varkappa$ и $g_\varkappa$ – взаимно обратные изоморфизмы M на N и N на M. Для этого поступаем так:

– если α – предельный, то f_α – предел всех f_β для $\beta < \alpha$, т.е. общее расширение всех f_β на объединение их областей определения, и g_α – предел всех g_β , в частности, $f_0 = g_0 = \varnothing$;

– если $\alpha = \beta + 1$, то значит мы уже построили f_β и g_β , область определения f_α состоит из области значений g_β , и элемента a_α , если его там еще нет. Если $a \in Im(g_\beta)$, то $f_\alpha(a) = g_\beta^{-1}(a)$; и мы берем в качестве $f_\alpha(a_\alpha)$ элемент b из N такой, что $Im(g_\beta) \cup \{a_\alpha\}$ и $Dom(g_\beta) \cup \{b\}$ имеют одинаковый тип. Далее мы строим g_α с областью определения $Im(f_\alpha) \cup \{b_\alpha\}$ полагая, что если $b \in Im(f_\alpha)$, то $g_\alpha(b) = f_\alpha^{-1}(b)$, и беря в качестве $g_\alpha(b_\alpha)$ элемент a из M такой, что $Im(f_\alpha) \cup \{b_\alpha\}$ и $Dom(f_\alpha) \cup \{a\}$ имеют одинаковый тип.

Все было сделано так, чтобы $f_\varkappa \cdot g_\varkappa = Id_N$ и $g_\varkappa \cdot f_\varkappa = Id_M$. Поскольку эти отображения сохраняют типы, они тем более сохраняют формулы без квантора.

□

Как следствие этой теоремы, мы видим, что насыщенная модель мощности $\varkappa$ (т.е. $\varkappa$-насыщенная и мощности $\varkappa$) $\varkappa$-сильно однородна. Действительно, если $A, B \in M$, $|A| = |B| < \varkappa$ и A и B имеют одинаковый тип, то (M, A) и (M, B) две насыщенные модели одинаковой мощности и одной и той же полной теории, значит, они изоморфны.

Теорема 9.7 (а также 9.5), на самом деле, частный случай одного немного более тонкого результата, обобщающего 9.4, касающегося всех однородных моделей. Все опирается на следующий результат, достаточно озадачивающий, если вдуматься.

Теорема 9.8 *Модель M $\varkappa$-слабо однородна тогда и только тогда, когда она ω-слабо однородна и обладает следующим свойством насыщенности: если A – подмножество M, $|A| < \varkappa$ и если p – тип над A, у которого каждое ограничение на конечную часть A реализуется в M, то M реализует p.*

Доказательство. Сначала мы предположим, что M $\varkappa$-однородна, и покажем индукцией по мощности A, что она обладает искомым свойством. Это очевидно, если A конечно. Представим A, индексируя его своим кардиналом, как объединение возрастающей и непрерывной цепи A_α с $|A_\alpha| < |A|$ (A_α образовано элементами A , имеющими, индекс, *меньший* α). По индуктивному предположению ограничение p_α типа p на A_α реализуется элементом a_α из M. Построим индукцией по α возрастающую цепь A'_α подмножеств M так, чтобы $a_0{}^\frown A'_\alpha$ имел бы тот же тип над $\emptyset$, что и $a_\alpha{}^\frown A_\alpha$, значит, что и $\alpha_\beta{}^\frown A_\alpha$ для $\beta > \alpha$. На предельных шагах это получается само собой, на последовательных шагах мы реализуем, благодаря $\varkappa$-однородности, тип над $a_0{}^\frown A'_\alpha$, соответствующий типу $A_{\alpha+1}$ над $a_{\alpha+1}{}^\frown A_\alpha$. В конечном счете, мы получим A' того же типа над $\emptyset$, что и A , такое, что a_0 над ним реализует тип p' , соответствующий p . По $\varkappa$-однородности p должен быть реализован элементом a из M.

Чтобы доказать обратное, рассмотрим A и A' в M одного типа над $\emptyset$, $|A| = |A'| < \varkappa$ и элемент a из M типа p над A. Пусть p' – тип над A', соответствующий p. Если $\bar{b}$ – конечный кортеж из A, соответствующий $\bar{b}'$ из A', тогда по ω-однородности ограничение p' на $\bar{b}'$ реализуется в M. Из рассматриваемого свойства M следует, что p' также реализуется в M.

□

Следствие 9.9 *Если M $\varkappa$-слабо однородна, то она реализует $\varkappa$-тип над $\emptyset$, как только она реализует каждый его фрагмент содержащий лишь конечное число переменных.*

Доказательство. Пронумеруем переменные x_α, $\alpha < \varkappa$ нашего $\varkappa$-типа. Предположим, что нам удалось реализовать множеством $A_\alpha \subset M$ тип α первых переменных $x_0, \dots, x_\beta, \dots, \beta < \alpha$. Чтобы можно было реализовать тип p_α от переменной x_α над A_α , по 9.8 достаточно убедиться, что каждое его конечное ограничение реализуется в M . Это следствие ω-однородности M и того факта, что тип $(x_{\beta_0}, \dots, x_{\beta_n}, x_\alpha)$ реализуется где-то в M !

□

Следствие 9.10 *Модель M $\varkappa$-насыщенна тогда и только тогда, когда она $\varkappa$-слабо однородна и реализует все n-типы.*

Доказательство. Следует из 9.8 и 9.6 (для прямой части предположение $\varkappa \geq |T|$ не нужно) .

□

Следствие 9.11 *Две $\varkappa$-слабо однородные модели мощности $\varkappa$ полной теории T изоморфны как только они реализуют одни и те же n-типы; на самом деле, они $\varkappa$ -сильно однородны.*

Доказательство. Мы снова повторяем "челночные" рассуждения теоремы 9.7, замечая, что две модели реализуют одни и те же типы $\varkappa$-последовательностей. Для сильной однородности, если A и B два подмножества M одного типа, $|A| = |B| < \varkappa$, то заметим, что (M, A) и (M, B) две $\varkappa$-однородные структуры, реализующие одни и те же n-типы, значит они изоморфны.

□

Вопрос о существовании насыщенных моделей изучается в следующем параграфе (теорема 9.15); он прояснится по настоящему только в главе 14, когда мы узнаем, что такое стабильная теория. Однако, прямо сейчас, мы докажем один простой результат.

Теорема 9.12 *Теория T имеет счетную насыщенную модель тогда и только тогда, когда $S_n(T)$ конечно или счетно для любого n .*

Доказательство. Так как счетная модель может реализовать только лишь счетное число типов, условие теоремы необходимо. Обратно, мы знаем из главы 5, что T имеет ω-насыщенную модель N . Заметим, что для любого кортежа $\bar{a}$ параметров $S_n(\bar{a})$ счетно, поскольку тип $\bar{b}$ над $\bar{a}$ то же самое, что и тип $\bar{a}\frown\bar{b}$ над $\emptyset$.

Значит, существует счетное подмножество A_0 модели N , где реализуются все чистые типы. Для конечного $\bar{a}$ из A_0 , множество $S_n(\bar{a})$ счетно, и существует лишь счетное число конечных подмножеств A_0 . Следовательно, мы можем реализовать все типы над конечными подмножествами A_0 в счетном подмножестве A_1 модели N ; продолжая такую процедуру, построим цепочку $A_0 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$ счетных подмножеств N, таких, что любой тип над конечным подмножеством A_n реализуется в A_{n+1} ; их объединение M – элементарное ограничение N (оно удовлетворяет тесту Тарского) и является, очевидно, счетной ω-насыщенной моделью T. Заметим, что мы не сделали никаких ограничений на мощность T : смотрите лемму 9.18.

□

9.c Блестящие модели

Рассмотрим модель M теории T и предложение $f(r_1, \ldots, r_k)$ в языке, содержащем символы языка L теории T , элементы из M и новые символы $r_1, \ldots, r_k$, которые можно считать предикатными (мы можем к этому свести, введя функции через их графы). Мы говорим, что это предложение совместно с $T(M)$, если $T(M) \cup \{f(r_1, \ldots, r_k)\}$ совместно, т.е. существует элементарное расширение N модели M, на носителе которого мы можем интерпретировать $r_1, \ldots, r_k$ отношениями так, чтобы удовлетворять $f(r_1, \ldots, r_n)$.

Назовем модель M *блестящей* (на английском *resplendent*), если для любого предложения $f(r_1, \ldots, r_k)$ совместного с $T(M)$, существуют интерпретации

$r_1, \ldots, r_k$ на носителе M, удовлетворяющие f. Например, если язык L содержит лишь конечное число символов отношений, функций и констант, блестящая модель является ω-сильно однородной, поскольку по теореме 9.1, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют одинаковый тип, то совместно предложение, утверждающее, что существует автоморфизм s переводящий $\bar{a}$ на $\bar{b}$, что выражается формулой $f(s)$.

Следующий результат поможет нам доказать существование блестящих моделей.

Теорема 9.13 (о дизъюнктной совместности) *Пусть T_i – семейство теорий и L_i – язык теории T_i для каждого i. Предположим, что общее пересечение L всех этих языков является пересечением любого двух из них и обозначим через $T_{i,L}$ множество следствий теории T_i в языке L. Тогда, если объединение всех $T_{i,L}$ совместно, то равным образом совместно объединение всех T_i.*

Доказательство. Сначала предположим, что даны лишь две теории T_1 и T_2 в языках L_1 и L_2 с пересечением L. Прежде всего заметим, что если T (совместная!) теория в языке L , содержащая $T_{1,L}$, то $T_1 \cup T$ совместно. Действительно, если это не так, то по компактности мы нашли бы f в T_1 и g в T такие, что $\{f, g\}$ несовместно, т.е. любая модель f есть модель и для $\neg g$, так что $f \vdash \neg g$; так как g в языке L , то $\neg g \in T_{1,L}$ и $T_{1,L}$ не может быть включен в T. Таким образом, если мы возьмем произвольную полную теорию T языка L , содержащую $T_{1,L} \cup T_{2,L}$, то мы получим модель M теории T_1 и модель N теории T_2 такие, что их обеднения на L, будучи моделями полной теории T , будут элементарно эквивалентны.

Если мы себе позволим применять теорему Шелаха (смотрите замечание после леммы 4.12), утверждающую, что для некоторого ультрафильтра U ультрастепени M^U и N^U являются изоморфными L-структурами, то можно непосредственно слепить модель для $T_1 \cup T_2$. Но поскольку мы не планируем доказательство этой теоремы, то выберем менее элегантный способ. По 4.12 L-структура M_L обеднение до языка L модели M элементарно вкладывается в L-структуру некоторой ультрастепени $N_1 = N^U$ модели N. В свою очередь, L-структура N_1 вкладывается в L-структуру элементарного расширения M. Повторяя эту процедуру ω раз, мы получим следующие три элементарные цепи в языках L, L_1 и L_2 соответственно:

$$M_L \prec N_{1,L} \prec M_{1,L} \prec \cdots \prec N_{n,L} \prec M_{n,L} \prec N_{n+1,L} \prec \ldots,$$

$$M \prec M_1 \prec \cdots \prec M_n \prec \ldots; \quad N \prec N_1 \prec \cdots \prec N_n \prec \ldots$$

Предел M_ω моделей M_n и предел N_ω моделей N_n имеют общее L-обеднение, и отсюда получаем модель для $T_1 \cup T_2$. Если имеется лишь конечное число теорий T_i , то доказываем постепенно, что их объединение совместно; общий случай следует из компактности.

□

Этот результат позволяет прояснить один момент, который, может быть, живо заинтересовал слишком проницательного читателя: если формула $f(r_1, \ldots, r_n)$ содержит константы только из подмножества A модели M , то для ее совместности с $T(M)$ достаточна ее совместность с $T(A)$.

Теорема 9.14 *Если $\varkappa \geq |T|$ и если M – модель T мощности $\varkappa$, то она имеет блестящее элементарное расширение той же мощности.*

Доказательство. Выберем по одному экземпляру каждого предложения $f(r_1, \ldots, r_n)$ с параметрами в M, совместного с $T(M)$; фразой "экземпляр" я хочу сказать, что мы воздержимся от повторений формул, отличающихся лишь именами новых отношений. Поскольку новые символы могут браться, например, из фиксированного счетного набора, а мощность языка L теории T не больше $\varkappa$ и M имеет только $\varkappa$ элементов, то число таких предложений не превосходит $\varkappa$. Теперь, мы разделяем словари всех этих предложений таким образом, чтобы произвольные два из них не имели общих символов, кроме символов из $L(M)$. Для этого нам нужен язык L_1 , расширяющий L, но мощность которого остается $\varkappa$, и мы получим из этих предложений множество T_1, содержащее $T(M)$, которое совместно по лемме о дизъюнктной совместности.

По теореме Левенгейма, эта теория имеет модель M_1 мощности $\varkappa$; как L-структура, это модель $T(M)$, т.е. элементарное расширение M и каждое предложение, совместное с $T(M)$, в нем реализуется. Теперь мы можем применить ту же процедуру к структуре M_1 и получить L_2-структуру M_2 , которая, как L_1-структура, является элементарным расширением M_1 и позволяет интерпретировать каждый экземпляр предложения, совместного с $T(M_1)$. Далее эта процедура итерируется. Таким образом, получается последовательность структур M_n мощности $\varkappa$ (в языках L_n возрастающих на каждом шаге, но остающихся в мощности $\varkappa$). Как L-структуры, они образуют элементарную цепь: в действительности, эта цепь L_n-элементарна начиная с n ; и ее предел M_ω будет L-структурой, являющейся блестящим расширением M мощности $\varkappa$; она будет даже блестящей L_ω-структурой.

□

В большей общности, мы говорим, что модель *$\varkappa$-блестяща*, если для каждой теории Θ в языке, содержащем столько символов, сколько в языке L теории T, но меньше, чем $\varkappa$ символов констант из M и меньше, чем $\varkappa$ новых символов (отношений, функций и констант), совместной с $T(M)$ (т.е. $T(M) \cup \Theta$ совместно), существует интерпретация новых символов на носителе M, превращающая ее в модель для Θ. Например, $\varkappa$-блестящая модель $\varkappa$-насыщена потому, что тип над A есть теория в $L(A, x)$; по теореме 9.1 она $\varkappa$-сильно однородна.

Теорема 9.15 *Если $|T| \leq \varkappa$, то каждая модель T мощности $\leq 2^\varkappa$ элементарно вкладывается в $\varkappa^+$-блестящую модель мощности $2^\varkappa$.*

Доказательство по существу совпадает с доказательством предыдущей теоремы; если теории, у которых новые символы дизъюнктны, совместны с $T(M)$, то с ней совместно и их объединение. Так как в $2^\varkappa$ существует $(2^\varkappa)^\varkappa = 2^{\varkappa \times \varkappa} = 2^\varkappa$ подмножеств мощности $\varkappa$, то как только зафиксируем подмножество A в M мощности $\varkappa$ и добавим $\varkappa$ новых символов отношений арности n для каждого n (что дает всего $\varkappa \times \omega = \varkappa$ новых символов!), этот новый язык будет иметь $\varkappa$ формул и даст не более $2^\varkappa$ теорий, совместных с $T(M)$. Таким образом, мы должны рассмотреть всего $2^\varkappa \times 2^\varkappa = 2^\varkappa$ теорий, у которых мы разъединяем языки, что дает нам в итоге язык L_1 мощности $2^{\varkappa}$; по теореме Левенгейма-Сколема мы получаем модель M_1 рассматриваемой теории T_1.

На втором этапе, мы не применяем сразу ту же конструкцию к M_1 потому, что L_1 стал очень большим и обяжет нас рассматривать более $2^{\varkappa}$ новых теорий: поэтому мы довольствуемся проверкой тех, что включают только символы языка L (а не L_1), не более $\varkappa$ констант из M_1 и не более $\varkappa$ новых символов; мы получаем теорию T_2 в языке L_2 , пересечение которого с L_1 равно L ; в этих условиях, из-за дизъюнктных языков, совместность T_2 с теорией L-структуры M_1 влечет совместность T_2 с теорией L_1-структуры M_1 . И таким образом, мы получаем $L_1 \cup L_2$-структуру M_2 , которая как L_2-структура есть модель T_2 , а как L_1-структура – элементарное расширение M_1 (не надо терять то, что мы сделали на первом этапе!), имеющую мощность $2^{\varkappa}$.

Теперь, повторяем эту конструкцию $\varkappa^+$ раз, при этом модель, построенная на каждом этапе, является элементарным расширением относительно всех языков, введенных до этого, но позволяет интерпретировать новые теории только относительно языка L ; и в итоге, мы получаем $\varkappa^+$-блестящую модель мощности $\varkappa^+ \times 2^{\varkappa} = 2^{\varkappa}$.

□

Упражнение 9.16 *Докажите, что если $|T| \leq \varkappa$, то каждая модель T мощности $\varkappa$ имеет ω-сильно однородное элементарное расширение той же мощности.*

Если $\lambda < \varkappa$, то $\varkappa$-насыщенная модель λ-насыщена; значит, теорема 9.15 нам утверждает, что каждая модель имеет λ-насыщенное расширение (и мы можем даже ограничить его мощность; мы оставляем это читателю в качестве упражнения).

Итак, мы имеем $\varkappa^+$-насыщенные модели мощности $2^{\varkappa}$; так как может существовать $2^{\varkappa}$ типов над множеством параметров мощности $\varkappa$, то мы не можем добиться лучшего. Если мы допускаем обобщенную гипотезу континуума, то $\varkappa^+ = 2^{\varkappa}$ и мы получаем (единственную с точностью до изоморфизма) насыщенную модель мощности $2^{\varkappa}$. Но без гипотез теории множеств невозможно доказать существование насыщенной модели произвольной теории T . Напротив, она существует, если теория T обладает некоторыми свойствами стабильности, что мы увидим в главе 14. Свойства блестящести модели часто затруднительны для проверки; единственный общезначимый факт – это то, что насыщенная модель блестяща, более точно:

Теорема 9.17 *Насыщенная модель M теории T мощности $\varkappa$ (т.е. $\varkappa$-насыщенная и мощности $\varkappa$) $\varkappa$-блестяща.*

В первое время предположим, что $\varkappa > |T|$. Пусть Θ – теория, совместная с $T(M)$, в языке L' , содержащем только множество параметров A из M, $|A| < \varkappa$, и добавляющем к языку L теории T меньше, чем $\varkappa$ новых символов. Мы пронумеруем M своим кардиналом, $M = \{a_0, \ldots, a_\alpha, \ldots\}_{\alpha<\varkappa}$, и построим индукцией по $\alpha < \varkappa$ элементарную цепь моделей N_α теории Θ с $|N_\alpha| \leq \max(|L'|, |\alpha|) < \varkappa$,

L-структуры которых элементарно вложены в M. Начинаем с модели N_0 теории Θ мощности $|L'|$, полученной по теореме Левенгейма-Сколема, L-структура которой, по $\varkappa$-универсальности, вложена в M.

На предельных шагах α мы берем в качестве N_α объединение уже построенных N_β, $\beta < \alpha$;

$$|N_\alpha| \leq \sum_{\beta<\alpha} \max(|L'|, |\beta|) \leq |\alpha| \times \max(|L'|, |\alpha|) = \max(|L'|, |\alpha|),$$

так что предположение о мощности N_α выполняется.

На последовательных шагах, заметим, что тип a_α над N_α *в смысле* L реализуется в расширении $N_{\alpha+1}$ модели N_α мощности $\max(|L'|, |\alpha|)$, L-структуру которого мы можем вложить в M по $\varkappa$-универсальности. Я хочу сказать, что мы можем реализовать в M тип $N_{\alpha+1}$ над $N_\alpha \cup \{a_\alpha\}$ в смысле L. Если мы обозначим через $N_\varkappa$ предел всех N_α , являющийся моделью Θ, то мы заметим, что он содержит все a_α и, значит, его L-структура – весь M : мы смогли действительно обогатить M до модели Θ.

Для случая когда $\varkappa = |T|$, мы поступаем почти так же, но с маленькой предосторожностью; так как существенно то, что N_α имеют мощности, меньшие $\varkappa$, мы вводим язык L' (на самом деле, язык L) только поэтапно, т.е. мы в качестве N_α берем не модель Θ, а множество параметров в смысле этой теории, удовлетворяющего тесту Тарского для первых α формул. Это проходит даже в счетном случае, где благодаря перенумерованию, аналогичного тому, что мы применяли по поводу метода Генкина, нам удается построение, шаг за шагом, модели N_ω как предела конечных последовательностей.

Наконец, если $\varkappa < |T|$, то следующая лемма показывает, что существует подмножество L_1 мощности $\varkappa$ в L , достаточное для интерпретации всех формул теории T : приходим к случаю $\varkappa = |T|$.

□

Лемма 9.18 *Если T имеет насыщенную модель мощности $\varkappa$, то существует фрагмент L_1 языка L теории T мощности $\leq \varkappa$, такой, что каждая формула L эквивалентна формуле L_1 по модулю T.*

Доказательство. Так как $\varkappa$-насыщенная модель реализует все n-типы, то $|S_n(T)| \leq \varkappa$. Для любой пары p, q различных типов в $S_n(T)$ мы выберем формулу f_{pq} , содержащуюся в p, но не содержащуюся в q. Существует не более $\varkappa$ таких формул f_{pq} . Докажем, что любая формула f выражается, по модулю T, в виде булевой комбинации конечного числа f_{pq} ; пусть p лежит в $\langle f \rangle$: дополнение $\langle f \rangle$ покрывается множествами $\langle f_{qp} \rangle$, где q пробегает $\langle \neg f \rangle$ и по компактности, конечного числа среди них достаточно для этого покрытия; беря пересечение их дополнений, мы получаем $\langle f_p \rangle$, содержащее p и содержащееся в $\langle f \rangle$; снова по компактности $\langle f \rangle$ – объединение конечного числа $\langle f_p \rangle$. Отсюда получаем, что каждая формула от n переменных является булевой комбинацией формул вида f_{pq} , откуда следует результат.

На языке топологии, это означает, что бесконечный вполне несвязный компакт содержит открыто-замкнутых множеств не больше чем число точек и, по теореме Стоуна о представлении, что булева алгебра мощности $\varkappa$ имеет, по крайней мере, $\varkappa$ ультрафильтров.

$\square$

9.d Свойства сохраняющиеся при интерпретациях

Структура N называется *интерпретируемой*, или *определимой*, в структуре M , если выполняются следующие условия:

- носитель N образуется из определимого подмножества A в M^n для некоторого n (т.е. элементами A являются кортежи, удовлетворяющие некоторой формуле L), факторизованного по определимому отношению E-эквивалентности в M (эта эквивалентность становится равенством в N);

- каждое m-арное отношение r на N определяется в M следующим образом: существует формула $f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ языка L такая, что $M \vdash f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ тогда и только тогда, когда кортежи $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$ лежат в A и если их классы $c_1, \ldots, c_m$ образуют кортеж из N , удовлетворяющий r ;

- каждая функция, каждая константа из N имеет график, определимый как в предыдущем пункте.

Например, определимая подгруппа группы или фактор-группа G по определимой нормальной подгруппе являются в ней интерпретируемыми. Мы уже рассмотрели такие примеры интерпретации в арифметике: тогда это было проще потому, что за исключением конечных структур, мы могли всегда предполагать, что носителем N является множество ω всех натуральных чисел и отношением E является отношение настоящего равенства. Действительно, мы располагали биекцией между ω и ω^n ; если A бесконечно и определимо, то его "функция нумерации" была определимой биекцией между A и ω. И наконец, в арифметике каждое определимое отношение эквивалентности обладает определимой функцией выбора: возьмите в каждом классе элемент с наименьшим кодовым номером.

Если T – теория M и если N интерпретируемо в M, то говорят (некорректно), что ее теория T' интерпретируема в T. Если формулы, участвующие в определении структуры N, имеют параметры в M, то мы уточняем (если только не оговорено противное): N *"интерпретируема с параметрами в* M*"*. Назовем *"хорошей моделью"* теории T' такую модель, которая получается из некоторой модели T так же, как N получается из M; не каждая модель T' является хорошей, но каждая имеет хорошее элементарное расширение потому, что ультрастепень хорошей модели хороша. Хорошие модели T' образуют то, что называется *"псевдоэлементарным классом"*, т.е. класс обеднений на язык L моделей некоторой теории Θ в языке L', расширяющем L .

Лемма 9.19 *Пусть N интерпретируемо (даже с параметрами) в M , пусть Θ' – теория, совместная с $T'(N)$, и пусть Θ – теория, полученная из Θ' в результате замены всех символов языка N их интерпретациями в M и релятивизации всех кванторов на N (мы можем представлять E-класс одним из его элементов; меняем $(\exists x)$ на $(\exists x \in A)$ и $(\forall x)$ на $(\forall x \in A)$; еще нужно заменить равенство на E); тогда Θ совместно с $T(M)$.*

Доказательство. Можно считать, что язык теории $T(M)$ и язык теории $T'(N)$ не пересекаются. Тогда, пусть T_1 – теория в общем языке, содержащая $T(M), T'(N)$ и также интерпретацию N в M. По лемме о дизъюнктной совместности $T_1 \cup \Theta'$ имеет модель; эта модель является также моделью для Θ ! Мы можем также, повторяя доказательство леммы о дизъюнктной совместности, сочетать в виде сандвича модели $T'(N) \cup \Theta'$ с хорошими моделями $T'(N)$.

□

Как следствие, если $\varkappa$ превосходит мощность множества параметров, участвующих в интерпретации N и если M $\varkappa$-блестяща, $\varkappa$-насыщена или $\varkappa$-универсальна, то такой же будет N, поскольку каждой теории, совместной с $T'(N)$, соответствует некоторая теория, совместная с $T(M)$, и и каждому типу в T' соответствует неполный тип в T.

Напротив, нет никакой надежды на то, что однородность сохраняется при интерпретации, поскольку два элемента одного типа в N могут иметь разные типы в M, которая более богата. Например, если мы введем унарный предикат $A(x)$ и рассмотрим теорию T, утверждающую, что A и его дополнение бесконечны, то любая модель T ω-сильно однородна. Если мы возьмем в качестве T' теорию отношения эквивалентности $A(x) \leftrightarrow A(y)$, модель T' ω-сильно однородна, только если его два класса равномощны.

Заметим, что если N – $\varkappa$-блестящая модель T' , где $\varkappa > \max(|T|, |T'|)$, то она хороша. На самом деле это очевидно, если N конечна, поскольку тогда она единственная модель T' ; если она бесконечна, то совместно утверждение о том, что на носителе N определяется модель M_1 теории T , соответствующая модель N_1 которой изоморфна N. Наконец, заметим, что если языки содержат лишь конечное число символов отношений и функций и если T конечно аксиоматизируема, то тот же самый аргумент доказывает, что блестящая N всегда хороша.

9.e Рекурсивно насыщенные модели

Понятие рекурсивно насыщенной модели является грубой смесью рекурсивности и теории моделей. Если мы здесь его обсуждаем, то это потому, что в случае счетной модели это понятие совпадает с понятием блестящей модели и, следовательно, имеет те же недостатки, так что не воспринимайте это как удачу; к тому же, доказательство этого факта является хорошей тренировкой по построению моделей.

Мы рассмотрим *конечный* язык L , т.е. содержащий лишь конечное число символов отношений, функций и констант; это требование конечности языка является существенным для следующих теорем.

Итак, пусть M – L-структура и кортеж $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ принадлежит M. Мы можем сопоставить каждому первичному символу языка $L(a_1, \ldots, a_n, x)$ некоторое натуральное число и закодировать числами предложения этого языка, как это мы делали в главе 7 для предложений языка арифметики. *Говорим, что модель M рекурсивно насыщена*, если для любого кортежа $\bar{a}$ из M и для любого рекурсивного множества формул $f(\bar{a}, x)$, совместного с $T(M)$, существует элемент x из M , удовлетворяющий всем эти формулам. Под "рекурсивным множеством формул" мы, конечно, подразумеваем "множество формул, множество кодов которых рекурсивно"; мы видим, что изменение кодов $a_1, \ldots, a_n$, например, их перестановка, приводит к рекурсивной операции на кодах формул и что это не меняет рекурсивный или нерекурсивный характер рассматриваемых множеств формул. Также заметим, что по теореме 7.28 о плеоназме, брать рекурсивное множество или рекурсивно перечислимое множество формул ничего не меняет в этом деле.

Понятие рекурсивно насыщенной модели является более коварным, чем оно кажется: тот факт, что некоторые рекурсивные множества формул с параметрами в M совместны или нет, позволяет часто в модели M закодировать информацию, выходящую далеко за рамки рекурсивности. Не забудем, что рекурсивные типы, которые мы реализуем, являются *неполными* типами с параметрами в $\bar{a}$: в гипотезе определения говорится, что множество формул $f(\bar{a}, x)$ рекурсивно и совместно с $T(\bar{a})$, но не говорится, что оно полно.

Лемма 9.20 *Рекурсивно насыщенная модель ω-слабо однородна.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одного типа в M , которая предполагается рекурсивно насыщенной. Пусть c лежит в M ; поскольку $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют одинаковый тип, то они удовлетворяют одним и тем же формулам вида $(\exists z) f(\bar{y}, z)$; следовательно, множество формул $f(\bar{a}, c) \to f(\bar{b}, x)$, являющееся рекурсивным, совместно; значит, оно удовлетворяется элементом d из M и $\bar{a}^\frown c$ и $\bar{b}^\frown d$ имеют одинаковый тип.

□

Теорема 9.21 *Для данного конечного языка L , бесконечные рекурсивно насыщенные L-структуры образуют псевдоэлементарный класс; более точно, существует предложение $f(R)$ языка $L \cup \{R\}$ такое, что M рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда в ней можно интерпретировать R так, чтобы удовлетворить $f(R)$.*

Доказательство. Так как конечное число отношений $r_1, \ldots, r_m$ соответственно арностей $n_1, \ldots, n_m$ могут быть заменены (в этом контексте) на одно отношение их произведения $R = r_1 \times \cdots \times r_m$ арности $n_1 + \cdots + n_m$, мы себе позволим добавление к L конечного числа следующих символов :

– три символа унарных отношений $E(x)$, $A(x)$, $U(x)$,

– две унарные функции $y = i(x)$, $y = \lambda(x)$,

– четыре бинарные функции $z = x + y$, $z = xy$, $z = c(x, y)$, $z = t(x, y)$,

– один символ бинарного отношения $Sat(x,y)$.

Предложение $f(R)$ получается как конъюнкция следующих предложений, которые я опишу неформально :

1°) Мы утверждаем, что E ("элементы"), A ("арифметика") и U ("кортежи") дизъюнктны и, что i – биекция M на E. Эта манипуляция не является необходимой; она имеет целью прояснение конструкции.

2°) Мы утверждаем, что сложение и умножение, ограниченные на A , образуют модель минимальной арифметики, расширенную конечным числом аксиом, гарантирующих выразимость отношения $\in$ и (примитивно рекурсивных) функций, участвующих в кодировке формул (достаточно выразить, что некоторые функции всюду определены).

3°) Функция λ действует из U в A : кортежу она сопоставляет его "длину"; функция c отображает $A \times U$ в E : если n из A и меньше длины u , то $c(n,u)$ будет называться "n-ой координатой u"; мы утверждаем, что два кортежа одинаковой длины и с одинаковыми координатами равны, что 0-ка (пустая) существует, что для любого кортежа u и любого элемента e из E кортеж $u^\frown e$ существует. Эта последняя аксиома гарантирует, что все *настоящие* n-ки элементов из E , где n *стандартно*, представлены в U .

4°) Так как язык L конечен, мы можем закодировать его формулы в нашей арифметике. Значит, мы располагаем понятием формулы $f(\bar{x})$ без параметров и всем, что существует вокруг него. Предикат Sat , называемый выполнимостью, соединяет формулу f с кортежем u , длина которого соответствует числу свободных переменных f . Добавим следующие аксиомы, где f и g представляют формулы только исходного языка (существенно, что они не содержат ни Sat ни t) :

- для каждого первичного символа r языка L (их существует только конечное число)

$$(\forall e_1)\ldots(\forall e_n)(Sat(r(\bar{x}),(e_1,\ldots,e_n)) \leftrightarrow r(i^{-1}(e_1),\ldots,i^{-1}(e_n)))\ ;$$

$$(\forall f \in L)(\forall u)(Sat(f,u) \leftrightarrow \neg Sat(\neg f,u))\ ;$$

$$(\forall f \in L)(\forall g \in L)(\forall u)(\forall v)(Sat(f \wedge g, u^\frown v) \leftrightarrow (Sat(f,u) \wedge Sat(g,v)))\ ;$$

$$(\forall f \in L)(\forall g \in L)(\forall u)(\forall v)(Sat(f \vee g, u^\frown v) \leftrightarrow (Sat(f,u) \vee Sat(g,v)))\ ;$$

$$(\forall f \in L)(\forall u)(Sat((\exists x)f,u) \leftrightarrow (\exists e)Sat(f,u^\frown e))\ ;$$

$$(\forall f \in L)(\forall u)(Sat((\forall x)f,u) \leftrightarrow (\forall e)Sat(f,u^\frown e))\ .$$

Мы видим, что этот конечный список аксиом вынуждает для каждой *стандартной* формулы $f(\bar{x})$ и для каждого *настоящего* кортежа $\bar{a}$ из E , что $Sat(f(\bar{x}),\bar{a})$ истинна тогда и только тогда, когда $f(\bar{a})$ истинна для структуры образа M при i на E .

5°) Теорема о плеоназме 7.28 узаконивает замену Σ_1-списка аксиом на Δ_1-список, являющийся даже множеством, определенным арифметической формулой с ограниченными кванторами от двух или трех функций, хорошесть которой гарантируется нашей аксиоматикой. Кодируя арифметические формулы, мы можем пронумеровать эти множества, скажем $F_0, \dots, F_n, \dots$; *этот список простирается за пределы стандартных натуральных чисел.* Последняя аксиома определяет поведение "функции-свидетеля" t ; она утверждает, что для любых n , любых m и для любого кортежа $\bar{a}$, если существует b, такой, что кортеж $\bar{a}^\frown b$ удовлетворяет первым m формулам $f(\bar{x}, y)$ подходящей арности из F_n , тогда $t(n, \bar{a})$ есть этот b. Важно, что m не участвует в выражении свидетеля.

Теперь наш список аксиом завершен. Легко видеть, что рекурсивно насыщенная модель M превращается в модель $f(R)$. Мы начнем с выбора биекции i между M и его подмножеством E таким, что $|M| = |M \setminus E|$. На счетном подмножестве A дополнения E мы помещаем *стандартную* модель арифметики и каждой оставшейся точке биективным образом сопоставим n-ку элементов из E ; функции длины и координаты интерпретируются стандартным образом.

Далее мы интерпретируем предикат Sat как настоящую выполнимость. Для свидетеля мы различаем два случая:

- либо множество F_n вместе с $\bar{a}$ в качестве параметра определяет совместный тип; так как он рекурсивен, то он реализуется в E некоторым элементом, который мы берем как свидетеля $t(n, \bar{a})$;

- иначе, существует наибольшее m такое, что конъюнкция первых m формул из F_n вместе с $\bar{a}$ в качестве параметра может реализоваться некоторым элементом E : мы берем этот элемент свидетелем.

Предположим обратное, что M превращается в модель $f(R)$; мы уже заметили, что в том, что касается формул стандартной сложности и кортежей стандартной длины, наша аксиоматика вынуждает предикат Sat интерпретировать *настоящую* выполнимость. Кроме того, если m и n стандартны, то наша модель может утверждать только $m \in F_n$ или только $m \notin F_n$ и только, если это действительно имеет место потому, что F_n определяется формулой с квантором, ограниченным функциями, хорошесть которой гарантируется $f(R)$, и наша арифметика не может лгать на этом уровне.

Пусть теперь $\bar{a}$ – настоящий кортеж из E , n – стандартное число, и рассмотрим множество π формул $f(\bar{a}, y)$, где $f(\bar{x}, y)$ пробегает F_n . Предположим, что в настоящем мире π совместно. Мы различаем два случая:

- модель утверждает, что для любого m существует y , удовлетворяющий первым m формулам π ; в этом случае $t(n, \bar{a})$ есть реализация π ;

- модель утверждает, что π несовместно, то есть что существует наибольшее m , для которого существует y , удовлетворяющий первым m формулам π ; так как в реальности π совместно, то обязательно m – нестандартное число, и $t(n, \bar{a})$ является снова реализацией π .

Как следствие, M реализует действительно все совместные типы, соответствующие F_n . По теореме о плеоназме, она рекурсивно насыщена.

$\square$

Упражнение 9.22 *Рассмотрим теорию T, необязательно полную, в конечном языке L и без конечных моделей. Докажите, что T рекурсивно аксиоматизируема тогда и только тогда, когда существует предложение $f(R)$ такое, что моделями T будут в точности обеднения на L моделей $f(R)$.*

Следствие 9.23 *Блестящая модель рекурсивно насыщена; кроме того, если $f(R)$ совместно с $T(M)$, то мы можем интерпретировать R над M так, чтобы $f(R)$ выполнилось и (M, R) была рекурсивно насыщенной.*

Доказательство. Если M блестяща, то предложение $f(R)$ из теоремы 9.21, совместное с $T(M)$ просто потому, что M имеет ω-насыщенное расширение, интерпретируется в M. Второе утверждение следует из того, что если $f(R)$ совместно с $T(M)$, то с ней совместно также $f(R) \wedge g(R, R')$, где $g(R, R')$ – предложение, гарантирующее рекурсивную насыщенность $(L \cup \{R\})$-структуры.

$\square$

В противоположность с 9.21, блестящие модели не всегда образуют псевдоэлементарный класс; возьмем в качестве T теорию одного отношения эквивалентности, имеющего ровно один n-элементный класс для каждого натурального n. Тип утверждающий, что класс элемента a бесконечен является рекурсивным, значит он реализуется в каждой рекурсивно насыщенной модели. Тогда утверждение о том, что существует биекция между классом элемента a и моделью M совместно. Равным образом совместно утверждение, что существует множество A находящееся в биекции с M, образованное из попарно неэквивалентных элементов. Мы видим также легко, что рекурсивно насыщенная модель должна иметь бесконечное число бесконечных классов.

Как следствие, в блестящей модели M мощности $\varkappa$ все бесконечные классы имеют мощность $\varkappa$ и их число должно быть равным $\varkappa$: модель M может быть только насыщенной моделью мощности $\varkappa$. Читатель без труда докажет, что модель рекурсивно насыщена тогда и только тогда, когда она содержит бесконечное число бесконечных классов. Итак, возьмем модель M мощности $\varkappa > 2^\omega$ и U неглавный ультрафильтр над ω . В M^U существуют классы мощности 2^ω , происходящие из ультрастепеней конечных классов; значит, она не насыщена. Однако, очевидно, что ультрапроизведение не выводит за пределы псевдоэлементарного класса.

Иногда говорят, что M *неизменно блестяща*, если каждый раз, когда $f(R)$ совместно с $T(M)$, можно интерпретировать R так, чтобы $f(R)$ выполнилось и (M, R) была блестящей; на самом деле в 9.14 была построена неизменно блестящая модель. Одним из следствий последней теоремы этого параграфа, принадлежащей Жан-Пьеру Рессэру, является то, что счетная рекурсивно насыщенная модель неизменно блестяща; но в общем, мы не знаем ничего о неизменной блестящести.

Мы видим, что в 9.23 конечность языка L совершенно необходима, потому, что она позволяет выразить в конечном числе условий адекватность предиката выполнимости. Если предположим, например, что язык содержит счетное число констант $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ и, рассмотрим полную теорию T , утверждающую, что все a_n различны, то увидим, что каждая модель T блестяща; на самом деле, предложение с дополнительными символами содержит только лишь первые n элементов в a_i и ограничение произвольной модели T на язык, состоящий из этих n первых констант a_i , насыщено; простая модель T опускает рекурсивный тип, утверждающий, что x отличен от всех a_n .

Эта теорема допускает обращение в счетном случае.

Теорема 9.24 *Если L язык, содержащий лишь конечное число символов отношений, функций и констант, то каждая счетная рекурсивно насыщенная L-структура блестяща.*

Доказательство. Итак, пусть M – наша счетная рекурсивно насыщенная модель, которую мы пронумеруем $M = \{a_0, \ldots, a_n, \ldots\}$; пусть $f(\bar{a}, r_1, \ldots, r_m)$ – предложение, содержащее кортеж $\bar{a}$ элементов из M и новые символы $r_1, \ldots, r_m$ и совместное с $T(M)$, т.е. по лемме о дизъюнктной совместности (9.10) совместное с $T(\bar{a})$.

Проведем конструкцию Генкина для этого предложения, целиком оставаясь внутри модели M. Для этого мы добавим к языку $L(\bar{a}, r_1, \ldots, r_m)$ новые символы b_{ij} констант и рассмотрим такое назначение свидетелей, что каждая формула, содержащая только параметры со вторым индексом, меньшим k , имеет своего свидетеля со вторым индексом k. Рассмотрим теорию, состоящую из $f(\bar{a}, r_1, \ldots, r_m)$, из предложений, отождествляющих n элементов из $\bar{a}$ с n первыми из $b_{i,0}$ и из предложений вида

$$(\exists x)(g(\bar{b}, x) \to g(\bar{b}, b_{g(\bar{b},x)})) ,$$

где $b_{g(\bar{b},x)}$ – свидетель для $g(\bar{b}, x)$.

Заметим, что это множество формул рекурсивно и совместно с $T(\bar{a})$. Для проверки возьмите нумерацию Генкина счетной модели $T(\bar{a}) \cup \{f(\bar{a}, r_1, \ldots, r_m)\}$. Как обычно, мы заменим нумерацию элементов b_{ij} с помощью рекурсивной биекции $\omega \times \omega$ на ω и они станут $b_0, \ldots, b_n, \ldots$.

Следствия этого рекурсивного семейства предложений образуют Σ_1-множество. Равным образом, Σ_1-множеством будут все его следствия, выразимые в языке $L(\bar{a}, b_0)$. Так как это неполный, рекурсивно перечислимый тип и совместный с $T(\bar{a})$, то он реализуется элементом b'_0 . Значит мы можем выбрать тип b_0 над $\bar{a}$ в языке $L' = L(r_1, \ldots, r_m)$ таким образом, что его ограничение на язык L будет типом b'_0 над $\bar{a}$. Поэтому можно предполагать, что b_0 есть b'_0 , это сведется к наложению L'-структуры на некоторое элементарное расширение M . Поскольку b_0 интерпретируется как b'_0 , множество предложений, которые мы должны удовлетворить, $f(\bar{a}, r_1, \ldots, r_m)$ и предложения Генкина, будет все еще рекурсивным и совместным с $T(\bar{a}^\frown b'_0)$.

Тогда можно повторять операцию, на n-ом этапе мы уже выбрали $b'_0, \ldots, b'_{n-1}$ в M так, чтобы множество, образованное из $f(\bar{a}, r_1, \ldots, r_m)$ и предложений Генкина, было совместно с $T(\bar{a}, b'_0, \ldots, b'_{n-1})$. Множество следствий в языке $L(\bar{a}, b'_0, \ldots, b'_{n-1}, b_n)$ этих предложений является рекурсивно перечислимым и совместным с $T(\bar{a}, b'_0, \ldots, b'_{n-1})$, что позволяет нам интерпретировать b_n некоторым элементом b'_n из M .

Кроме этого, если b_n имеет вид b_{i0} , то мы можем его интерпретировать произвольным элементом a из M. Действительно, тип a над $\bar{a} \cup \{b'_0, \ldots, b'_{n-1}\}$ совместен с $T(\bar{a}, b'_0, \ldots, b'_{n-1}) \cup \{f(\bar{a}, r_1, \ldots, r_m)\}$, поскольку, если $\exists$-квантифицировать a в конечном фрагменте этого типа, мы получим следствие из $T(\bar{a}, b'_0, \ldots, b'_{n-1})$. Так как предложения Генкина совсем не влияют на b_{i0} , то можно брать нумерацию Генкина модели $f(\bar{a}, r_1, \ldots, r_m) \cup T(\bar{a}, b'_0, \ldots, b'_{n-1}, a)$ такую, что $b_{i0} = a$.

Как следствие, по ходу процедуры систематически проинтерпретируем элементы b_{i0} как a_i . В нумерации Генкина мы, таким образом, окончательно проинтерпретировали все b_{ij} элементами из M и не оставили в стороне ни один элемент M. Это означает, что мы наложили на M L'-структуру, являющуюся моделью предложения $f(\bar{a}, r_1, \ldots, r_m)$.

□

9.f Исторические и библиографические примечания

Теорема Бета появилась в [БЕТ, 1953], а теорема Свенониуса – в [СВЕНОНИУС, 1959a]. Результаты такого жанра сильно притягивали к себе логиков 50-х годов. Абстрактная теория Галуа увидела свет в [КРАСНЕР, 1938], где, кроме всего, Краснер детально описал гигантский алгоритм элиминации кванторов для алгебраически замкнутых полей в одном бесконечном языке.

История понятия насыщенных моделей достаточно запутана, ее предыстория имеется в [ХАУСДОРФ, 1914], где определены насыщенные плотные порядки; понятия $\varkappa$-однородности и $\varkappa$-универсальности, по видимому, принадлежит [ЙОНССОН, 1956] и [ЙОНССОН, 1960], а также, для счетного случая, [ФРАИССЕ, 1954] ; в любом случае, единственность, без гарантии существования, и однородность насыщенной модели были фактами, полностью установленными во времена [МОРЛИ-ВОТ, 1962]; однородные модели и их описание через n-типы, реализующиеся в них были изучены в [КЕЙСЛЕР-МОРЛИ, 1967].

Термин "блестящая модель" был введен в [БАРВАЙС-ШЛИПФ, 1976], но понятие было известно раньше, в частности, [ЧЭН-КЕЙСЛЕР, 1973] предлагает читателю блестящесть насыщенной модели как упражнение! Иногда говорят "реляционно-универсальность" вместо ω-блестящести. Лемма 9.13 о дизъюнктной совместности взята из [РОБИНСОН, 1956]. Теорема 9.23 – фольклорная; первое доказательство 9.24 было дано в [РЕССЭР, 1972]; что касается упражнения 9.22, то оно взято прямо из [КРЕЙГ-ВОТ, 1958]. О вредной стороне рекурсивной насыщенности почитайте в [ПУАЗА, 1984].