

I.E de Mathématiques (module SSNT)

(Durée 1h15mn, calculatrices et documents interdits)

Exercice 1 : on considère le système causal décrit par l'équation différentielle :

$$(E) \begin{cases} y'' + y = x & (x(t) \text{ étant l'entrée et } y(t) \text{ la sortie}) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y'_0. \end{cases}$$

question 1 : quelle est la fonction de transfert $H(s)$ de ce système. Le système est-il stable BIBO, dire pourquoi.

question 2 : décomposer la fraction rationnelle $\frac{-3s}{(s^2+1)(s^2+4)}$

en éléments simples, puis appliquer ce résultat à la résolution de l'équation différentielle suivante par utilisation de la transformation de Laplace

$$(E_1) \begin{cases} y'' + y = -3 \cos 2t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

question 3 : calculer la transformée de Laplace de la fonction $t \cos t$, puis résoudre par utilisation de la transformation de Laplace l'équation différentielle

$$(E_2) \begin{cases} y'' + y = -2 \sin t + 1 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Exercice 2 : on considère le système à temps discret causal de fonction de transfert $H(z) = \frac{0,4z}{z^2 - 0,04}$ (de période d'échantillonnage 1)

question 1 : donner l'expression de la sortie $y(n)$ lorsque l'entrée est l'échelon unité discret $\mathcal{U}^+(n)$ sans passer par la transformée en z de $\mathcal{U}^+(n)$ et donner un tableau établissant les valeurs de $y(n)$ pour $n=0,1,2,3,4$.

question 2 : donner l'expression de la sortie $y(n)$ lorsque la transformée en z de l'entrée est $\frac{z}{z-1}$ et donner un tableau conduisant à $y(n)$ pour $n=0,1,2,3,4$

Exercice 1

question 1 : la transformée de Laplace du système (E)

$$\text{soit } s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = X(s)$$

$$\text{soit } (s^2 + 1) Y(s) = X(s) + s y(0) + y'(0)$$

$$\text{d'où } Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} X(s) + \frac{s y(0) + y'(0)}{s^2 + 1}$$

et la fonction de transfert est $\boxed{H(s) = \frac{1}{s^2 + 1}}$ so

pôles sont $\pm i$ et situés sur l'axe imaginaire; le système n'est donc pas stable BIBO.

question 2 :

$$A(s) = - \frac{3s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + 1} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + 4}$$

$$* A(s) \times (s^2 + 1) \Big|_{s=i} = \frac{-3i}{+3} = -i = \alpha i + \beta$$

$$\text{donc } \alpha = -1 \text{ et } \beta = 0$$

$$* A(s) \times (s^2 + 4) \Big|_{s=2i} = \frac{-6i}{-3} = 2i = 2\gamma i + \delta$$

$$\text{donc } \gamma = 2 \text{ et } \delta = 0$$

$$\text{finalement } \frac{-3s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{-s}{s^2 + 1} + \frac{2s}{s^2 + 4}$$

la transformée de l'équation différentielle est

$$\cancel{s^2 Y(s)} - \cancel{s y(0)} - \cancel{y'(0)} = \frac{-3s}{s^2 + 1}$$

$$s^2 Y(s) - s y(0) = \frac{-3s}{s^2 + 4}, \text{ d'où } \boxed{Y(s) = -\frac{3s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} + \frac{s}{s^2 + 1}}$$

en utilisant ce qui précède on voit que

$$Y(s) = -\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{s}{s^2 + 1} = \boxed{\frac{s}{s^2 + 4} = Y(s)}$$

question 3:

$$\mathcal{L}(t \cos t) = (-\mathcal{L}(\cos t))' = \left(-\frac{\Delta}{\Delta^2+1}\right)' = -\frac{\Delta^2+1 - \Delta \times 2\Delta}{(\Delta^2+1)^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(t \cos t) = \frac{\Delta^2-1}{(\Delta^2+1)^2}}$$

la transformée de Laplace de l'équation (E₂) s'écrit

$$\Delta^2 Y(\Delta) - \Delta - 1 + Y(\Delta) = -\frac{2}{\Delta^2+1} + \frac{1}{\Delta}$$

$$(\Delta^2+1)Y(\Delta) = \Delta+1 - \frac{2}{\Delta^2+1} + \frac{1}{\Delta}$$

$$Y(\Delta) = \frac{\Delta+1}{\Delta^2+1} - \frac{2}{(\Delta^2+1)^2} + \frac{1}{\Delta(\Delta^2+1)}$$

$$\approx \frac{1}{\Delta(\Delta^2+1)} = \frac{\alpha}{\Delta} + \frac{\beta\Delta+\gamma}{\Delta^2+1} = B(\Delta)$$

$$B(\Delta) \times \Delta \Big|_{\Delta=0} = \alpha = 1$$

$$B(\Delta) \times (\Delta^2+1) \Big|_{\Delta=i} = \frac{1}{i} = -i = \beta i + \gamma$$

$$\Rightarrow \beta = -1 \text{ et } \gamma = 0$$

$$\text{d'où } \frac{1}{\Delta(\Delta^2+1)} = \frac{1}{\Delta} - \frac{\Delta}{\Delta^2+1}$$

$$\text{finalement } Y(\Delta) = \frac{\Delta+1}{\Delta^2+1} - \frac{2}{(\Delta^2+1)^2} + \frac{1}{\Delta} - \frac{\Delta}{\Delta^2+1}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2+1} - \frac{2}{(\Delta^2+1)^2} + \frac{1}{\Delta}$$

$$= \frac{\Delta^2+1-2}{(\Delta^2+1)^2} + \frac{1}{\Delta}$$

$$\boxed{Y(\Delta) = \frac{\Delta^2-1}{(\Delta^2+1)^2} + \frac{1}{\Delta}}$$

$$\text{ce qui donne } \boxed{y(t) = t \cos t + 1}$$

3 GE-I.E. de Mathématiques: SSMT

- durée : une heure et trente minutes
- documents, calculatrices, téléphones interdits

Exercice 1:

Question 1: calculer la transformée de Laplace du signal causal $t \sin t$

Question 2: calculer la transformée de Laplace du signal causal $t \cos t$; en déduire l'original de $\frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{(s^2+1)^2}$

Question 3: résoudre, en utilisant la transformée de Laplace, l'équation différentielle: $y'' + y = 2 \cos t - 2 \sin t - 3 \sin 2t$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$

Exercice 2: on considère le système à temps discret causal de fonction de transfert en z : $H(z) = \frac{z}{z^2 + 0,2z + 1}$.

Question 1: donner un tableau établissant les valeurs de $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ lorsque l'entrée x_n vérifie $x_0 = 0, x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ pour $n \geq 4$, sans passer par la transformée en z de x_n .

Question 2: donner un tableau établissant les valeurs de $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ lorsque l'on connaît uniquement la transformée en z de l'entrée: $X(z) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$

Exercice 3: on veut calculer la transformée de Fourier du signal $x(t) = e^{-\pi t^2}$ sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1$.

On note $\hat{x}(f)$ cette transformée. On demande de construire l'équation différentielle du premier ordre liant $\hat{x}(f)$ et $\hat{x}'(f)$, de donner l'expression de $\hat{x}(0)$ et d'en déduire la solution $\hat{x}(f)$ de cette équation différentielle.

Exercice 4

en comparant pour $t \geq 1$ les intégrales $\int_1^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-\pi t} dt$ puis, en raisonnant par parité, montrer que $e^{-\pi t^2} \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 1 [7 points]

Question 1: $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1}$, donc $\mathcal{L}(t \sin t) = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$ (1 point)

Question 2: $\mathcal{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$, donc $\mathcal{L}(t \cos t) = -\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

de plus $\frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2+1-2}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$, c'est donc

la transformée de $t \cos t$ ← (1 point)

Question 3: $\mathcal{L}(y) = Y(s)$

$\mathcal{L}(y'') = s^2 Y(s) - 3$

$\mathcal{L}(2 \cos t) = \frac{2s}{s^2+1}$

$\mathcal{L}(-2 \sin t) = \frac{-2}{s^2+1}$

$\mathcal{L}(-3 \sin 2t) = \frac{-6}{s^2+4}$

d'où la transformée de l'équation différentielle:

$$(s^2+1)Y(s) - 3 = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} - \frac{6}{s^2+4}$$

et $Y(s) = \frac{3}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{6}{(s^2+1)(s^2+4)}$ ← (1 point)

Posons $A = \frac{6}{(s^2+1)(s^2+4)}$ et décomposons cette expression en éléments simples:

$A = \frac{\alpha s + \beta}{s^2+1} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2+4}$, alors $A \times (s^2+1)|_{s=i} = 2 = \alpha i + \beta$

donc $\alpha = 0$ et $\beta = 2$ et $A \times (s^2+4)|_{s=2i} = -2 = \gamma(1+\delta)$ donc $\gamma = 0$ et $\delta = -2$

d'où $A = \frac{2}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+4}$. Finalement

$$Y(s) = \frac{3}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{2}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+4}$$

$Y(s) = \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{s^2+4}$ ← (2 points)

d'où l'on déduit

$y(t) = t \sin t + t \cos t + \sin 2t$ ← (1 point)

Question 1 : nous avons $Y(z) = H(z) X(z)$

$$= \frac{z^{-1}}{1 + 0,2z^{-1} + z^{-2}} X(z)$$

donc $(1 + 0,2z^{-1} + z^{-2}) Y(z) = z^{-1} X(z)$

et $Y(z) = z^{-1} X(z) - 0,2 z^{-1} Y(z) - z^{-2} Y(z)$ ← 1 point

et $y_n = x_{n-1} - 0,2 y_{n-1} - y_{n-2}$ ← 1 point
 d'où le tableau

n	0	1	2	3	4	5
x_{n-1}	0	0	1	1	1	0
$-0,2 y_{n-1}$	0	0	0	-0,2	-0,16	0,032
$-y_{n-2}$	0	0	0	0	-1	-0,8
y_n	0	0	1	0,8	-0,16	-0,768

← 1 point

Question 2 : nous avons $\frac{Y(z)}{\Delta(z)} = \frac{H(z) X(z)}{\Delta(z)}$ avec $\Delta(z) = 1 = Z(\delta_n)$

donc $\frac{Y(z)}{\Delta(z)} = \left(\frac{z^{-1}}{1 + 0,2z^{-1} + z^{-2}} \right) (z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$

$\frac{Y(z)}{\Delta(z)} = \frac{z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}}{1 + 0,2z^{-1} + z^{-2}}$

← 1 point

d'où $Y(z) = z^{-2} \Delta(z) + z^{-3} \Delta(z) + z^{-4} \Delta(z) - 0,2 z^{-1} Y(z) - z^{-2} Y(z)$
 et $y_n = \delta_{n-2} + \delta_{n-3} + \delta_{n-4} - 0,2 y_{n-1} - y_{n-2}$

d'où le tableau

n	0	1	2	3	4	5
δ_{n-2}	0	0	1	0	0	0
δ_{n-3}	0	0	0	1	0	0
δ_{n-4}	0	0	0	0	1	0
$-0,2 y_{n-1}$	0	0	0	-0,2	-0,16	0,032
$-y_{n-2}$	0	0	0	0	-1	-0,8
y_n	0	0	1	0,8	-0,16	-0,768

← 1 point

← 1 point

Exercice 3 [5 points]

$$\begin{aligned}\hat{x}(f)' &= \mathcal{F}[-2i\pi t e^{-\pi t^2}] \\ &= i \mathcal{F}[-2\pi t e^{-\pi t^2}] \\ &= i \mathcal{F}[(e^{-\pi t^2})'] \\ &= i(2i\pi f) \hat{x}(f)\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{x}(f)' = -2\pi f \hat{x}(f)} \leftarrow (2 \text{ points})$$

$$\text{d'où } \hat{x}(f) = k e^{-\pi f^2} \leftarrow (1 \text{ point})$$

$$\begin{aligned}\text{mais } \hat{x}(0) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi f t} dt \right]_{f=0} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{x}(0) = 1} \text{ d'où } k = 1 \leftarrow (1 \text{ point})$$

$$\text{donc } \boxed{\hat{x}(f) = e^{-\pi f^2}} \leftarrow (1 \text{ point})$$

Exercice 4 [2 points]

pour $t \geq 1$, $t^2 \geq t$ donc $-t^2 \leq -t$ et $e^{-\pi t^2} \leq e^{-\pi t}$: (1 point)

$$\text{donc } \int_1^{\infty} e^{-\pi t^2} dt \leq \int_1^{\infty} e^{-\pi t} dt = \left[-\frac{1}{\pi} e^{-\pi t} \right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-\pi}}{\pi} \quad \left\{ (1 \text{ point}) \right.$$

donc $\int_1^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt$ converge et par positivité $e^{-\pi t^2} \in L^1(\mathbb{R})$