Université Claude Bernard Lyon 1

# LICENCE Math VI

# REPRESENTATIONS DES GROUPES FINIS

EXAMEN

**14 Juin 2012**

Durée : 3 heures

*Afin de ne pénaliser personne, nous avons explicité au maximum les résultats attendus ; ainsi, le candidat qui ne saurait répondre à une question, éventualité à envisager, pourra passer à la suivante. Il est donc clair que c'est le raisonnement qui sera évalué et que toute tentative d'escroquerie sera interprétée comme une insulte à l'intelligence des correcteurs.*

**PROBLEME.** *Représentations du groupe diédral $D_5$.*

**Préliminaires.** On note $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $a = \cos(\frac{2\pi}{5})$ et $b = \cos(\frac{4\pi}{5})$. On étudie dans cette partie les caractères du groupe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

1) Soit $\widehat{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}$ le groupe des caractères du groupe abélien $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, c'est à dire le groupe des morphismes de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^*$. Décrire ce groupe en fonction du caractère $\chi_\omega$ donné par $\chi_\omega(\bar{k}) = \omega^k$, où $\bar{k}$ désigne la classe de $k$ modulo 5.

2) Dans l'espace des fonctions sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on définit le produit scalaire hermitien

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} \overline{\phi(\bar{k})} \psi(\bar{k}).$$

Justifier l'égalité $\chi_\omega^{-1} = \chi_{\bar{\omega}}$.

Après avoir énoncé un théorème du cours, donnez sans calcul la valeur de $\langle \chi_\omega, \chi_\omega \rangle$ et $\langle \chi_\omega, \chi_\omega^{-1} \rangle$.

3) On décompose $\chi_\omega = R_\omega + iI_\omega$ sa décomposition en partie réelle et partie imaginaire. A l'aide des résultats du 2, montrer en résolvant un système que $\langle R_\omega, R_\omega \rangle = \frac{1}{2}$.

4) En déduire que $a^2 + b^2 = \frac{3}{4}$.

**A.** On considère un pentagone régulier $P$ dans le plan affine euclidien. On se propose dans cette partie de décrire le groupe $Is(P)$ des isométries qui laissent fixe $P$. On rappelle que toute isométrie d'un polygone convexe permute l'ensemble des ses sommets.

1) Montrer que tout élément de $Is(P)$ laisse fixe l'isobarycentre $O$ des sommets de $P$. En déduire que l'on peut voir $Is(P)$ comme un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

2) Montrer qu'il y a exactement 5 rotations dans $Is(P)$ et qu'elles forment un sous-groupe cyclique de $Is(P)$. On notera $r$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{2\pi}{5}$.
3) Montrer que si $s$ et $s'$ sont deux symétries de $Is(P)$, alors $ss' = r^k$ pour un $k$ de $[0,4]$.
4) Déduire que $Is(P) = \{Id, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$, avec $s^2 = Id$, $r^5 = Id$, $srs^{-1} = r^4$.

**B.** On notera maintenant $D_5$ le groupe ainsi obtenu. On veut décrire dans cette partie le dual $\widehat{D_5}$ de $D_5$, c'est à dire le groupe des morphismes de $D_5$ dans $\mathbb{C}^*$.
1) Montrer que si $\chi$ est un tel morphisme, alors $\chi(s) = \pm 1$. Montrer également que $\chi(r) = 1$.
2) Montrer que $\widehat{D_5}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
*On pourra penser au déterminant.*
3) Quels sont des caractères de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ que l'on peut prolonger à $D_5$ ?

**C.** On veut maintenant trouver la table des caractères de $D_5$.
1) Montrer que $D_5$ possède exactement 2 représentations irréductibles de degré 1 et deux de degré 2.
2) Combien $D_5$ possède de classes de conjugaisons ? Les décrire explicitement en fonction de $r$ et $s$.
3) On considère la représentation $\rho$ de $D_5$ donnée par $D_5 = IsP \subset GL_2(\mathbb{R})$. Montrer que son caractère $\chi_\rho$ vérifie $\chi_\rho(r) = 2a$, $\chi_\rho(r^2) = 2b$, $\chi_\rho(s) = 0$. En déduire que $\rho$ est une représentation irréductible.
*On pourra utiliser le préliminaire.*
4) Soit $g$ un élément de $D_5$ distinct du neutre. Expliquer la formule $\sum_\chi \chi(e)\chi(g) = 0$, où $\chi$ parcourt l'ensemble des caractères irréductibles de $D_5$.
5) Montrer que la table de caractère de $D_5$ est donnée par

| $\#C_g$ | 1 | 2 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| g | 1 | r | $r^2$ | s |
| Trivial | 1 | 1 | 1 | 1 |
| det | 1 | 1 | 1 | -1 |
| $\rho$ | 2 | 2a | 2b | 0 |
| $\rho^*$ | 2 | 2b | 2a | 0 |

**D.** On sait que $D_5$ permute les sommets $\mathcal{S} := \{A, B, C, D, E\}$ du pentagone $P$. On note $\pi$ la représentation complexe de $D_5$ sur $\mathbb{C}^{\mathcal{S}}$ muni de sa base canonique $(e_A, e_B, e_C, e_D, e_E)$ telle que $\pi(g)(e_S) = e_{g(S)}$ pour tout sommet $S$ de $\mathcal{S}$.
1) Soit $\chi_\pi$ le caractère de cette représentation. Montrer que $\chi_\pi$ s'annule sur toute rotation non triviale de $D_5$ et vaut 1 sur toute symétrie.
2) Décomposer la représentation $\pi$ en représentations irréductibles.

**E.** 1) Montrer qu'il existe une représentation $\rho'$ de degré 3 telle que son caractère associé vérifie

$$\chi_{\rho'}(r) = 1 + 2a,\ \chi_{\rho'}(r^2) = 1 + 2b,\ \chi_{\rho'}(s) = -1.$$

2) Pouvez-vous réaliser géométriquement cette représentation dans $\mathbb{R}^3$ ?