Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre Linéaire Avancée
Semestre de printemps 2022-23 — Master 1

Examen 1 – Durée 120 min – mardi 7 mars 2023

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
L'énoncé comporte 3 exercices.

Exercice 1. Autour de la forme normale de Jordan

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les matrices A et $2A$ sont semblables si et seulement si A est nilpotente.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Étant donnée la forme normale de Jordan de A, déterminer la forme normale de Jordan de A^{-1}.
3. Combien de classes de conjugaisons de matrices à coefficients réels A verifient : le polynôme minimal de A vaut $(X-1)^2(X-2)$ et le polynôme caractéristique de A est $(X-1)^4(X-2)^2$. Donner un représentant par classe de conjugaison.

Exercice 2. Loi de réciprocité quadratique

1. Soit p un nombre premier impair.
   (a) On dit que $x \in \mathbb{F}_p^*$ est un *carré* s'il existe $y \in \mathbb{F}_p$ tel que $x = y^2$.
   Montrer qu'il y a exactement $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_p^*$.
   (b) En déduire que $x \in \mathbb{F}_p^*$ est un carré si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$. Justifier que dans le cas contraire $x^{\frac{p-1}{2}} = -1$.
2. Soit p et q deux nombres premiers impairs distincts. Soit $X = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{F}_q^p \,:\, \sum_{i=1}^p x_i^2 = 1\}$.
   (a) Justifier brièvement que la formule $(x_1, \dots, x_p) \mapsto (x_p, x_1, \dots, x_{p-1})$ définit une action du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X.
   (b) En déduire que
   $$\sharp X \equiv \begin{cases} 2\ [p] & \text{si } p \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_q^* \\ 0\ [p] & \text{si } p \text{ n'est pas un carré dans } \mathbb{F}_q^* \end{cases}$$
3. Soit $d = \frac{p-1}{2}$ et $X' = \{(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d, t) \in \mathbb{F}_q^p \,:\, (-1)^d t^2 + \sum_{i=1}^d x_i y_i = 1\}$. Soit F le sous-espace vectoriel des $(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d, t) \in \mathbb{F}_q^p$ tels que $y_1 = \dots = y_d = 0$.
   (a) Montrer que $\sharp(F \cap X')$ est vide si p n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_q$ et de cardinal $2q^d$ sinon.
   (b) Montrer que $\sharp(X' - F) = q^d(q^d - 1)$.
4. Soit Q' (resp. Q) la forme quadratique sur $\mathbb{F}_q^p$ apparaissant dans la définition de X' (resp. X).
   (a) Montrer que le rang de Q' vaut p et que son discriminant vaut 1.
   On admettra par la suite que cela implique que Q' et Q_0 sont congruentes.
   (b) Ecrire les matrices de Q et Q' dans la base canonique.
   (c) Montrer que X et X' ont le même cardinal.
5. On définit le symbole de Legendre $\left(\dfrac{p}{q}\right)$ comme valant 1 si p est un carré dans $\mathbb{F}_q^*$ et -1 sinon.

   Montrer que
   $$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{2}}$$

Exercice 3. Étude d'un endomorphisme nilpotent

On note $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le bloc de Jordan nilpotent de taille n. Soit Φ_n l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi_n(M) = MJ_n + J_nM$. On note $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Φ_n est nilpotent.
2. Donner la matrice de Φ_2 dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ puis déterminer sa forme normale de Jordan.
3. Dans la suite de l'exercice, on détermine la forme normale de Jordan de Φ_n pour n quelconque ; une solution traitant des valeurs spécifiques ($n = 3, 4, 5, \ldots$) rapportera une partie des points. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on note
$$V_{n,p} = \operatorname{vect}(\{E_{i,j} \,:\, i - j = p\})$$
avec la convention $\operatorname{vect}(\emptyset) = \{0\}$.
   (a) Calculer $\dim(V_{n,p})$.
   (b) Montrer que $\Phi_n(V_{n,p}) \subset V_{n,p+1}$.
   (c) Soit $q \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que
$$\operatorname{rang}(\Phi_n^{2q}) \leq \sum_{p\in\mathbb{Z}} \min(\dim(V_{n,p}), \dim(V_{n,p+2q})).$$
   (d) En déduire l'inégalité $\operatorname{rang}(\Phi_n^{2q}) \leq (n-q)^2$.
   (e) On admet provisoirement (ce sera démontré à la question 4.) que
$$\dim(\Phi_n^{2q}(V_{n,p})) = \min(\dim(V_{n,p}), \dim(V_{n,p+2q})).$$
   A l'aide de cette information, montrer que $\operatorname{rang}(\Phi_n^{2q}) = (n-q)^2$.
   (f) En déduire la forme normale de Jordan de Φ_n (**Indication**. *Déterminer successivement la taille des blocs en commençant par le plus grand bloc*).
4. Pour $N \in \mathbb{N}$, soit A_N la matrice de taille $(N+1)\times(N+1)$ dont le coefficient (i,j) vaut $\binom{2N}{N+i-j}$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \{-N-1, \ldots, N+1\}$ on a la relation
$$\binom{2N}{N+k} = \int_0^{2\pi} e^{2kit}(2\cos t)^{2N}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}.$$
   (b) Montrer que pour tout $x = (x_0, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$,
$$\langle A_N x, x\rangle = \int_0^{2\pi} \left|\sum_{k=0}^{N} e^{2kit}x_k\right|^2 (2\cos t)^{2N}\,\frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$
   et en déduire que la matrice A_N est définie positive.
   (c) Montrer le résultat admis à la question 3(e).
   (**Indication**. *Observer que la matrice de* $\Phi_n^{2q} : V_{n,p} \to V_{n,p+2q}$ *dans des bases convenables est une sous-matrice de* A_q).