Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre Linéaire Avancée
Semestre de printemps 2022-23 — Master 1

Contrôle Terminal – Durée 180 min – lundi 24 avril 2023

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
L'énoncé comporte 4 exercices.

Exercice 1. Autour de Jordan et Frobenuis

Soit k un corps. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(k).$$

Dans $\mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$, on considère les matrices diagonales par blocs :

$$A = \mathrm{diag}(\pi I_3 + J_3, \pi I_2 + J_2, I_4 + J_4, I_3 + J_3)$$

et

$$B = \mathrm{diag}(\pi I_5 + J_5, \pi I_3 + J_3, J_4).$$

1. Déterminer les polynômes caractéristiques et minimaux de A et B.
2. Déterminer les invariants de similitude de A et B.

Exercice 2. Groupe orthogonal

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : {}^tMM = I_n\}$.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $g \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $g \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \qquad \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle.$$

3. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Pour tout $v, w \in \mathbb{R}^n$, on pose

   $$\langle v, w \rangle_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gv, gw \rangle,$$

   où $|G|$ désigne le cardinal.
   Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) Montrer que pour tout $g \in G$, $v, w \in \mathbb{R}^n$, on a :

   $$\langle gv, gw \rangle_0 = \langle v, w \rangle_0.$$

   (c) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

   $$\forall g \in G \qquad PgP^{-1} \in O_n(\mathbb{R}).$$

4. Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$.
   (a) Rappeler l'énoncé du théorème de décomposition polaire pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $A \in G$ et $A = OS$ sa décomposition polaire. Montrer que
   $$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad S^k \in G.$$
   (c) En déduire que la seule valeur propre de S est 1.
   (d) Montrer que $G = O_n(\mathbb{R})$. On dit que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Inégalités de Weyl

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et A une matrice symétrique de taille n. On rappelle que A est diagonalisable c'est-à-dire semblable à $\operatorname{diag}(\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$. Dans la numérotation des valeurs propres on suppose que $\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$. On rappelle que

$$\lambda_k(A) = \max_{F \subset \mathbb{R}^n,\, \dim F = k} \left(\min_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle x, Ax \rangle \right). \tag{0.1}$$

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que
$$\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G.$$
2. Montrer que, pour tout $k = 1, \dots, n$,
$$\lambda_{n+1-k}(A) = \min_{F \subset \mathbb{R}^n,\, \dim F = k} \left(\max_{x \in F,\ \|x\|=1} \langle x, Ax \rangle \right). \tag{0.2}$$
3. Soit i et j tels que $i + j > n$. Montrer que, pour toutes matrices symmétriques de taille n, A et B on a
$$\lambda_{i+j-n}(A+B) \geq \lambda_i(A) + \lambda_j(B).$$
   On pourra utiliser la formule (0.1) *pour A et B et la formule* (0.2) *pour $A+B$.*

Exercice 4. Étude du cône nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,:\, A^n = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agissant par conjugaison.
2. Montrer que l'adhérence d'une orbite dans $\mathcal{N}$ est une réunion d'orbites.
3. Dénombrer les orbites pour $n = 2, 3, 4$ et 5. Justifier, qu'en général il n'y en a qu'un nombre fini.
4. Montrer que $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C}) \;:\; A^4 = 0 \text{ et } \operatorname{rg}(A) = 4\}$ est la réunion des classes de conjugaison des deux matrices $\operatorname{diag}(J_4, J_2)$ et $\operatorname{diag}(J_3, J_3)$.
5. Soit
$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \varepsilon & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
   Montrer que A est semblable à $\operatorname{diag}(J_4, J_2)$ (resp. $\operatorname{diag}(J_3, J_3)$) si $\varepsilon \neq 0$ (resp. $\varepsilon = 0$).
6. Montrer que $\mathcal{A}$ est connexe.
7. Exhiber une matrice non nulle dans l'adhérence de $\mathcal{A}$.