Université Claude Bernard Lyon 1 — Algèbre Linéaire Avancée
Semestre de printemps 2023-24 — Master 1

Examen Terminal – Durée 180 min – lundi 27 mai 2024

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
Les **réponses mal justifiées** ne permettront pas d'obtenir tous les points.
L'énoncé comporte 3 exercices.

Exercice 1. Puissances d'une matrice inversible

1. Montrer que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ commutent alors
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

2. Commençons par un exemple :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer par récurrence, que
$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1+2^n & 1-2^n+\frac{1}{2}n2^n \\ 0 & 2^n & \frac{1}{2}n2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

3. Soit $M = D + N$ la décomposition de Dunford de la matrice M. Montrer que chaque coefficient de D^n est de la forme $\xi 1^n + \zeta 2^n$ avec ξ et ζ dans $\mathbb{C}$.
4. Montrer que $M^n = D^n + nD^{n-1}N$.
5. Expliquer pourquoi le fait les 3 suites $(1, 2^n, n2^n)$ forment une famille libre permet de déterminer D^n. En déduire l'expression de D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Passons au cas général. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $j \in \mathbb{N}$. On définit la suite $\theta_{\lambda,j} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}, n \longmapsto \binom{n}{j} \lambda^n$.
Soit
$$\begin{array}{rccl} E_\lambda : & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & E_\lambda(u_n) : n \longmapsto u_{n+1} - \lambda u_n. \end{array}$$
Justifier que E_λ est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et déterminer son noyau.
7. Calculer $E_\lambda(\theta_{\lambda,j})$.
8. En déduire que la famille $(\theta_{\lambda,j})_{\lambda\in\mathbb{C}^*, j\in\mathbb{N}}$ est libre.
9. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N}^*$. Notons $d = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$. Considérons
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{C}_{d-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^d \\ & P & \longmapsto & (P^{(j)}(\lambda_i))_{\substack{i=1,\dots,s \\ 0\le j<\alpha_i}} \end{array}.$$
Montrer que φ est un isomorphisme linéaire.
10. Soit $\mu = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit Q_n et R_n les quotient et reste de la division euclidienne de X^n par μ.
Montrer que
$$\varphi(R_n) = \Big(\theta_{\lambda_i,j}(n)\Big)_{\substack{i=1,\dots,s \\ 0\le j<\alpha_i}}.$$

11. En écrivant $R_n = \sum_{i=0}^{d-1} c_n^i X^i$, on forme d suites c_n^i. Montrer que, pour tout $i = 0, \dots, d-1$, la suite $(c_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à

$$\mathrm{Vect}\Big(\theta_{\lambda_i,j}(n)\Big)_{\substack{i=1,\dots,s \\ 0\le j<\alpha_i}}.$$

12. Montrer que, pour toute matrice A dont le polynôme minimal est μ, il existe une unique famille de matrices $(A^{ij})_{\substack{i=1,\dots,s \\ 0\le j<\alpha_i}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A^n = \sum_{i,j} A^{ij}\theta_{\lambda_i,j}(n).$$

13. Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A. Montrer que

$$D^n = \sum_{i,0} A^{i0}\theta_{\lambda_i,0}(n).$$

Exercice 2. Décomposition QR.

1. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer qu'il existe un unique couple (O, T) tel que $A = OT$, O est orthogonale et T est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs.
   (a) Démontrer l'unicité.
   (b) Démontrer l'existence.
2. Soit $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. On munnit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique $\langle \bullet, \bullet\rangle$ et de la norme associée $\| \bullet \|$.
   (a) Montrer que
   $$|\det(A)| \le \|C_1\| \times \dots \times \|C_n\|.$$
   (b) Montrer que l'on a égalité si et seulement si $\forall i \ne j$ on a $\langle C_i, C_j\rangle = 0$.
3. Pour $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on note $VDM(z_1, \dots, z_n)$ la matrice $n \times n$ dont l'entrée (i, j) est z_j^{i-1}.
   (a) Montrer que si deux des z_i sont égaux alors $\det(VDM(z_1, \dots, z_n)) = 0$.
   (b) Soit X une indéterminée. Montrer que $\det(VDM(z_1, \dots, z_{n-1}, X))$ est un polynôme de degré au plus n. Déterminer le coefficient de X^n.
   (c) En déduire, par récurrence, la réciproque de la première question.
   (d) En déuire aussi que
   $$\det(VDM(z_1, \dots, z_n)) = \prod_{1\le i<j\le n} (z_j - z_i).$$
4. On admetra que la question 2 est aussi valable sur les nombres complexes lorsque $\langle \bullet, \bullet\rangle$ et $\| \bullet \|$ sont les produit et norme hermitiens canoniques sur $\mathbb{C}^n$.
   Soit $\mathbb{D}$ le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Soit
   $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{D}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z_i) & \longmapsto & \prod_{1\le i<j\le n} |z_j - z_i|. \end{array}$$
   (a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{D}^n \qquad f(z) \le n^{\frac{n}{2}}$.
   (b) Montrer que $\forall z \in \mathbb{D}^n$, on a
   $$f(z) = n^{\frac{n}{2}} \iff \{z_1, \dots, z_n\} \text{ sont les sommets d'un polygone régulier.}$$