1 Dimension infinie

Nous avons vu que pour un espace vectoriel finiement engendré, toutes les bases ont même cardinal. Ce théorème admet la généralisation suivante :

Théorème 1 *Soit E un k-espace vectoriel. Alors,*

1. *il existe une base pour E.*
2. *Deux bases de E sont en bijections.*

La démonstration de ce théorème utilise de manière essentielle l'axiome du choix. En effet, on peut montrer que sans l'axiome du choix ce théorème est faux.

La première partie du théorème est une application du lemme de Zorn : on montre grâce à ce lemme qu'il existe une famille libre maximale dans E. On montre ensuite, comme dans le cas de la dimension finie que cette famille est génératrice. Les détails sont laissés au lecteur.

La seconde partie du théorème est plus délicate. Nous allons en montrer ici une version plus faible :

S'il existe une base dénombrable de E, alors toute famille libre de E est au plus dénombrable et toute base de E est dénombrable.

Démonstration. Soit $\mathcal{B} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable de E. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E.

Montrons tout d'abord que $\mathcal{B}'$ est infinie. Si ce n'était pas le cas, E serait de dimension finie et le cardinal des familles libres finies serait borné par la dimension de E. Ceci contredit le fait que pour tout N, la famille $(e_n)_{n\leq N}$ est libre.

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de E. Notons F_N le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(e_n)_{n\leq N}$. Ces sous-espaces sont de dimensions finies, et

$$E = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} F_N.$$

Comme les F_N sont de dimensions finies et $\mathcal{F} \cap F_N$ est libre, $\mathcal{F} \cap F_N$ est fini. Or,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{F} \cap F_N.$$

Donc $\mathcal{F}$ est au plus dénombrable. La démonstration est terminée. $\square$

Corallaire 1 *Il n'existe pas d'isomorphisme linéaire entre* $E = k[X] \simeq \bigoplus_{\mathbb{N}} k = k^{(\mathbb{N})}$ *et son dual* $E^* \simeq \prod_{\mathbb{N}} k \simeq k^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. Si k est fini ou dénombrable, comme $k[X] = \cup_{n \in \mathbb{N}} k[X]_n$, $k[X]$ est dénombrable. Or $k^{\mathbb{N}}$ ne l'est pas car $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne l'est pas. Il n'existe donc pas de BIJECTION entre E et E^*.

Supposons maintenant que k est non dénombrable. Nous savons tous qu'il existe une base dénombrable de $k[X]$. Il suffit donc de montrer qu'il existe une famile non dénombrable libre dans E^*. La famille $\Big(\phi_x : k[X] \longrightarrow k, P \longrightarrow P(x)\Big)_{x \in k}$ convient. Si on pense à E^* comme à $k^{\mathbb{N}}$, on écrirait plutôt que la famille $(x^n)_{x \in k}$ convient. $\square$