Une démonstration de la décomposition de Dunford inspiré de l'algorithme de Newton.

1 Introduction

À un candidat qui avait donné la démonstration usuelle, sur $\mathbb{C}$, de la décomposition de Dunford,

$$u = d + n,$$

un membre du jury a posé, sans succés, la question suivante :

Peut-on calculer d et n sans connaître les valeurs propres de u ?

Il s'avère que oui ! En fait, une adaptation de la méthode de Newton pour l'approximation des racines conduit à une démonstration effective (i.e. transformable, en un algorithme qui a le bon gout d'être très rapide). Cette preuve est dûe à Claude Chevalley.

2 Algorithme de Newton

L'algorithme de Newton est un algorithme itératif sensé converger vers une solution d'une équation du type $f(x) = 0$ avec f dérivable et de dérivé jamais nulle. On définit une suite par récurence par la fomule :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

Dans les bons cas x_n converge ; la limite est alors une (la) solution de $f(x) = 0$.

3 Décomposition de Dunford

On a l'énoncé suivan t:

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé. On suppose que la caractéristique du corps de base k est nulle.*

Alors, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tels que d est diagonalisable, n est nilpotent, d et n commutent et $u = d + n$.

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Démonstration. [de l'existence forte] On va exhiber une « équation » satisfaite par d et vérifier que l'algorithme de Newton converge pour cette équation.

Le point de départ est donc la constation que les racines du polynôme minimal de d sont simples et sont les valeurs propres de u. Notons P_u le polynôme carctéristique de u et posons

$$Q = \frac{P_u}{P_u \wedge P'_u}.$$

On aura

$$Q(d) = 0.$$

Considérons donc la suite d'endomorphismes suivante :

$$\begin{aligned} &u_0 = u, \\ &u_{n+1} = u_n - Q(u_n) * Q'(u_n)^{-1}. \end{aligned}$$

Remarquons qu'il faut justifier que $Q'(u_n)$ est bien inversible. On montre en fait par une même récurence sur n les trois propriétés suivantes:

1. $u_n \in k[u]$;
2. $Q'(u_n)$ est inversible pour tout n; et
3. $Q(u_n) \in Q(u)^{2^n} k[u]$, en particulier $Q(u_n)$ est nilpotent.

Pour $n = 0$, Q' est premier avec le polynôme minimal de u donc $Q'(u)$ est inversible. Supposons l'hypothèse satisfaite pour u_n: ceci implique que u_{n+1} est bien défini. Comme l'inverse d'un endomorphisme inversible v appartient à $k[v]$, $u_{n+1} \in k[u]$. D'après le lemme 2 appliqué dans l'anneau $k[u]$, il suffit de montrer que $Q'(u_{n+1}) - Q'(u_n)$ est nilpotent pour avoir l'inversibilité de $Q'(u_{n+1})$. Or le lemme 3 implique que $Q'(u_{n+1}) - Q'(u_n) \in (u_{n+1} - u_n)k[u]$. Or, la formule de récurence montre que $(u_{n+1} - u_n)k[u] \subset Q(u_n)k[u]$. Par récurence, $Q(u_n)$ est nilpotent; et l'inversibilité de $Q'(u_{n+1})$ suit.

Il reste à montrer que $Q(u_{n+1}) \in Q(u)^{2^{n+1}} k[u]$. Pour cela écrivons

$$Q(u_{n+1}) = Q(u_n + y),$$

avec $y = -\frac{Q(u_n)}{Q'(u_n)}$. Le lemme 4 montre alors qu'il existe $v \in k[u]$ tel que

$$Q(u_{n+1}) = Q(u_n) + yQ'(u_n) + y^2 v.$$

Or $Q(u_n) + yQ'(u_n) = 0$ et $y^2 \in Q(u_n)^2 k[u]$. Ainsi

$$Q(u_{n+1}) \in Q(u_n)^2 k[u] \subset Q(u)^{2^{n+1}} k[u].$$

La dernière assertion de la récurrence est démontrée.

La dernière assertion montre que $Q(u_n) = 0$ pour n asser grand. Remarquons que $n \geq \ln_2(\dim E)$ suffit. Ainsi, à partir de cette valeur u_n statione.

Notons d l'endomorphisme sur lequel u_n stationne. On a $Q(d) = 0$; donc d est diagonalisable.

Il nous reste à voir que $u - d$ est nilpotente. Or, d'après ce qui précède, $u - d = (u_0 - u_1) + (u_1 - u_2) + \cdots + (u_{n-1} - u_n)$ (si $d = u_n$) appartient à $Q(u).k[u]$. On en déduit qu'il est nilpotent. $\square$

Voici les énoncés des lemmes que nous avons utilisés:

Lemme 2. *Soit A un anneau commutatif unitaire. Soit a un élément inversible de A et n un élément nilpotent.*

Alors, $a+n$ est inversible.

Proof. La démonstration s'inspire de la formule:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Ecrivons $a + n = a(1 - y)$ avec $y = -a^{-1}n$. Remarquons que y est nilpotent et fixons un entier naturel k tel que $y^k = 0$. On vérifie alors que

$$(1 - y) * (1 + y + y^2 + \cdots + y^{k-1}) = 1 - y^k = 1.$$

Alors $1 - y$ et $a + n$ sont inversibles. □

Lemme 3. *Pour tout polynôme R il existe un polynôme en deux variables S tel que :*

$$R(Y) - R(X) = (Y - X)S(X, Y).$$

Proof. L'ensemble des polynômes R qui vérifient le lemme est un sous-espace vectoriel de l'espace des polynômes. Or la formule

$$Y^d - X^d = (Y - X)(Y^{d-1} + Y^{d-2}X + \cdots + X^{d-1}),$$

montre que $R = X^d$ appartient à cet ev. Le lemme en découle. □

Lemme 4. *Pour tout polynôme R il existe un polynôme en deux variables S tel que :*

$$R(X + Y) = R(X) + YR'(X) + Y^2S(X, Y).$$

Proof. Même preuve que le lemme précédent avec la formule

$$(X + Y)^d = X^d + YdX^{d-1} + Y^2(\cdots).$$

□

Corollaire 5. *Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $M = D + N$ sa décomposition de Dunford.*

Si M a ses coefficients dans un sous corps de $\mathbb{C}$ alors D et N aussi.

4 Implémentation

Il s'agit ici d'implémenter l'algorithme. Voici les étapes de l'algo:

1. Calculer P_u, puis Q et Q'.
2. Calculer u_n pour $2^n \leq \dim(E)$.
3. Conclure.

Voici une implémentation en SageMath.

```
def dunford(A):
  p=A.charpoly(x);
  q=p//(p.gcd(derivative(p)));
  qder=derivative(p);
  An=A;
  B=q(An)
  while B!=0:
        An=An-B*qder(An)^(-1);
        B=q(An)
  return An,A-An
```

Voici un exemple A

$$\begin{pmatrix}
-239 & -219 & -201 & -182 & -164 & -149 & -135 & -120 & -105 & -90 & -75 & -60 & -45 & -30 & -15 \\
22 & 21 & 21 & 17 & 11 & 10 & 10 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
612 & 560 & 518 & 478 & 440 & 400 & 360 & 321 & 280 & 240 & 200 & 160 & 120 & 80 & 40 \\
-416 & -392 & -379 & -356 & -330 & -300 & -270 & -240 & -209 & -180 & -150 & -120 & -90 & -60 & -30 \\
183 & 194 & 201 & 190 & 176 & 150 & 125 & 102 & 82 & 67 & 55 & 44 & 33 & 22 & 11 \\
-326 & -328 & -324 & -311 & -297 & -275 & -234 & -197 & -162 & -132 & -109 & -88 & -66 & -44 & -22 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 16 & 16 & 12 & 6 & 5 & 5 & 3 & 2 & 1 \\
412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 360 & 318 & 278 & 240 & 200 & 160 & 121 & 80 & 40 \\
-266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -242 & -229 & -206 & -180 & -150 & -120 & -90 & -59 & -30 \\
128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 139 & 146 & 135 & 121 & 95 & 70 & 47 & 27 & 12 \\
-217 & -217 & -217 & -217 & -217 & -217 & -219 & -215 & -202 & -188 & -166 & -125 & -88 & -53 & -23 \\
12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 11 & 11 & 7 & 1 \\
212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 160 & 118 & 78 & 40 \\
-116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -92 & -79 & -56 & -30 \\
33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 44 & 51 & 40 & 26
\end{pmatrix}$$

Alors $D = A_2$ est

$$\begin{pmatrix}
-240 & -220 & -202 & -183 & -165 & -150 & -135 & -120 & -105 & -90 & -75 & -60 & -45 & -30 & -15 \\
22 & 21 & 21 & 17 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
612 & 560 & 518 & 478 & 440 & 400 & 360 & 320 & 280 & 240 & 200 & 160 & 120 & 80 & 40 \\
-416 & -392 & -379 & -356 & -330 & -300 & -270 & -240 & -210 & -180 & -150 & -120 & -90 & -60 & -30 \\
183 & 194 & 201 & 190 & 176 & 150 & 125 & 102 & 82 & 66 & 55 & 44 & 33 & 22 & 11 \\
-326 & -328 & -324 & -311 & -297 & -275 & -234 & -197 & -162 & -132 & -110 & -88 & -66 & -44 & -22 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 16 & 16 & 12 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 412 & 360 & 318 & 278 & 240 & 200 & 160 & 120 & 80 & 40 \\
-266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -266 & -242 & -229 & -206 & -180 & -150 & -120 & -90 & -60 & -30 \\
128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 139 & 146 & 135 & 121 & 95 & 70 & 47 & 27 & 11 \\
-216 & -216 & -216 & -216 & -216 & -216 & -218 & -214 & -201 & -187 & -165 & -124 & -87 & -52 & -22 \\
12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 11 & 11 & 7 & 1 \\
212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 212 & 160 & 118 & 78 & 40 \\
-116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -116 & -92 & -79 & -56 & -30 \\
33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 33 & 44 & 51 & 40 & 26
\end{pmatrix}$$

N est

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

5 Puissances d'une matrice

Soit M une matrice carrée donnée. Il y a deux problèmes de calculs des puissances M^n de M. Dans le premier n est fixé et on veut calculer M^n. Dans le second n est une indéterminée et on veut calculer M^n par une formule en n. Ce second est par exemple utile pour calculer $\exp(M)$ ou même $\exp(tM)$.

Classiquement on dit que la décomposition de Dunford $M = D + N$ est un moyen de calculer M^n. En effet, comme D et N commutent, on a

$$M^n = \sum_{k=0}^{i_N-1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k,$$

où i_N est l'indice de nilpotence de N. Si maintenant, on sait diagonaliser explicitement $D = P\Delta P^{-1}$, alors on obtient l'expression suivante de

$$M^n = \sum_{k=0}^{i_N-1} \binom{n}{k} P\Delta^{n-k} P^{-1} N^k, \tag{1}$$

comme somme fini de termes calculables.

La chose remarquable et peut-être un peu moins connue est que réciproquement, le calcul de M^n permet de retrouver la décomposition de Dunford de M. Commençons par énoncer un théorème qui décrit M^n.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $j \in \mathbb{N}$, on définit la suite

$$\theta_\lambda^j(n) = n(n-1)\cdots(n-j+1)\lambda^{n-j}.$$

Pour λ non nul cette définition ne pose pas de problème. Remarquons que $\theta_\lambda^0(n) = \lambda^n$. Pour $\lambda = 0$, on utilise les convensions $0^0 = 1$ et $0 \times 0^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \theta_0^0 &= 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots \\ \theta_0^1 &= 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots \\ \theta_0^2 &= 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0 \ldots \end{aligned}$$

Théorème 6. *Soit k un corps de caractéristique nulle et M une matrice carré à coefficients dans k. Soit $\mu = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec les λ_i 2 à 2 distincts et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mu(M) = 0$ mais pas nécessairement que μ est le polynôme minimal de M.*

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des paires $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ telles que $1 \leq i \leq s$ et $0 \leq j < \alpha_i$. Alors, il existe une unique famille de matrices $(A_{(i,j)})_{(i,j)\in\mathcal{E}}$ indexée par $\mathcal{E}$ telle que

$$M^n = \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} A_{(i,j)} \theta_{\lambda_i}^j(n).$$

Remarque. Si 0 n'est pas une racine de μ, l'énoncé dit que chaque coefficient de M^n est de la forme

$$\sum_{i=1}^s P_i(n)\lambda_i^n,$$

où P_i est un polynôme de degré au plus $\alpha_i - 1$.

Si $0 = \lambda_1$ est une racine de μ, alors il existe une suite presque nulle de matrices $C_n = (C_0, \ldots, C_{\alpha_0-1}, 0, 0, \ldots)$ telle que

$$(M^n)_{kl} = (C_n)_{kl} + \sum_{i=2}^s P_i^{kl}(n)\lambda_i^n,$$

où P_i^{kl} est un polynôme de degré au plus $\alpha_i - 1$, pour chaque paire d'indices (k, l).

Preuve. La démonstration théorise la technique bien connue de calcul des puissances d'une matrice par division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur.

Soit R_n le reste de la division euclidienne de X^n par μ_M. On écrit

$$X^n = Q_n \mu_M + R_n,$$

avec $Q_n \in k[X]$. Soit $\varphi : k_{d-1}[X] \longrightarrow k^d$, qui envoie R sur $(R^{(j)}(\lambda_i))$ pour i et j comme ci-dessus. Alors φ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension d. De plus, si P est dans le noyau de φ alors λ_i est une racine d'ordre au moins α_i de P. Comme $\sum_i \alpha_i = d > \deg(P)$, cela impose que P est nul. Ainsi $\mathrm{Ker}\varphi = \{0\}$. Finalement φ est un isomorphisme.

Remarquons que, pour tout $(i, j) \in \mathcal{E}$, $P^{(j)}(\lambda_i)$ est égal à

$$\begin{array}{ll} \theta_i^j(n) & \text{si} \quad P = X^n \\ 0 & \text{si} \quad P = \mu_M \end{array}$$

On en déduit que R_n est la préimage par φ de $(\theta_i^j(n))$. Ainsi, chaque coefficient de R_n est une combinaison linéaire à coefficients indépendant de n (comme φ) des $\theta_i^j(n)$.

Comme $M^n = R_n(M)$ l'existence dans le théorème est prouvée. L'unicité découle du fait que comme famille de $k^{\mathbb{N}}$ la famille des θ_i^j est libre (cf lemme 7). □

Lemme 7. *La famille $(\theta_\lambda^j)_{j \in \mathbb{N}, \lambda \in k}$ de suites de $k^{\mathbb{N}}$ est libre.*

Preuve. L'ensemble des polynômes de la forme $n(n-1)\dots(n-j+1)$ pour j parcourant $\mathbb{N}$ est une famille libre. Donc il suffit de montrer l'assertion suivante. Etant donnés

1. une suite c_n presque nulle;
2. $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in k^*$ 2 à 2 distincts;
3. $P_1, \dots, P_s \in k[X]$

tels que

$$c_n + \sum_{i=1}^{s} P_i(n) \lambda_i^n = 0 \qquad \forall n, \tag{2}$$

on a

$$\begin{array}{l} c_n = 0 \\ P_1 = \cdots = P_s = 0. \end{array}$$

Remarquons aussi que la seconde de ces deux assertions implique, sachant (2), que $c_n = 0$. Il suffit donc de montrer que les P_i sont nuls. On va montrer cela par récurence sur s. Si $s = 1$, P_1 a une infinité de racines entières, il est donc nul. Suppposons l'hypothèse de récurence satisfaite au rang $s - 1$.

Convention : si un des $\lambda_i = 1$, quitte à renuméroter on suppose que c'est λ_1. Autrement dit quitte à renuméroter on suppose que $\lambda_i \neq 1$ pour tout $i \geq 2$.

Considérons l'opérateur suivant sur l'espace des suites

$$\delta((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Pour $\beta \in k^*$, on note ρ l'endomorphisme de $k[X]$ défini par $\rho_\beta(P) = \beta P(X+1) - P(X)$.

Montrons que ρ_β est injectif si $\beta \neq 1$. Soit P dans son noyau. Alors P et $P(X+1)$ ont les mêmes racines (dans toute extension de k). On en déduit que si ζ est une racine de P alors $\zeta + m$ est une racine de P pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Comme k est de caradtéristique nulle cela implique que P a une infinité de racines dans une extension de k. Donc P est nul. Ainsi P n'a pas de racines donc P est constant. Comme $\beta \neq 1$, $P = 0$.

Remarquons que

1. $\exists m > 0 \qquad \delta^n(c_n) = 0;$
2. $\forall P \qquad \exists m > 0 \qquad \delta^n(P) = 0;$
3. $\forall P \in k[X]$ et $\beta \in k^*$, $\delta(P(n)\beta^n = \rho_\beta(P)\beta^n$.

Ainsi, en appliquant δ^m à l'égalité (2), on obtient

$$\rho^m_{\lambda_1}(P_1)\lambda_1^n + \cdots + \rho^m_{\lambda_s}(P_s)\lambda_s^n = 0.$$

On divise cette équation par λ_1^n, puis on applique une puissance assez grande de δ pour obtenir

$$\rho^{m'}_{\lambda_2/\lambda_1} \circ \rho^m_{\lambda_2}(P_2)(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n + \cdots + \rho^{m'}_{\lambda_s/\lambda_1} \circ \rho^m_{\lambda_s}(P_s)(\frac{\lambda_s}{\lambda_1})^n = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurence, on a

$$\rho^{m'}_{\lambda_2/\lambda_1} \circ \rho^m_{\lambda_2}(P_2) = \cdots = \rho^{m'}_{\lambda_s/\lambda_1} \circ \rho^m_{\lambda_s}(P_s) = 0.$$

Par injectivité des ρ_β pour $\beta \neq 1$ on en déduit que $P_i = 0$ pour tout $i \geq 2$. On peut alors appliquer le cas $s = 1$. □

5.1 Application au calcul de la décomposition de Dunford

Remarquons tout d'abord que la formule (1) montre une version faible du thèorème dans laquelle il faut prendre $j \leq i_N = \max \alpha_1, \ldots, \alpha_s$:

Pour tout $n \geq i_N$, chaque coefficient de de la suite M^n est une combinaisons linéaires des suites $\theta^j_{\lambda_i}$ pour $1 \leq i \leq s$ et $0 \leq j < i_N$.

En effet, pour tout $n \geq i_N$, on a

$$M^n = \sum_{k=0}^{i_N - 1} \binom{n}{k} P \Delta^{n-k} P^{-1} N^k.$$

Or chaque coefficient de Δ^{n-k} est nul ou multiple d'un $\theta^0_{\lambda_i}(n)$. Alors, chaque coefficient de $P\Delta^{n-k}P^{-1}$ est une combinaison linéaire des $\theta^0_{\lambda_i}(n)$. De plus, $\binom{n}{k}$ est égal au polynôme $n(n-1)\dots(n-k+1)$ à une constante multiplicative près. Ainsi, les coefficients de $\binom{n}{k} P\Delta^{n-k}P^{-1}N^k$ sont des combinaisons linéaires des suites $\theta^j_{\lambda_i}$ pour $1 \leq i \leq s$ et $0 \leq j < i_N$:

$$\forall n \geq i_N \qquad M^n = \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 0 \leq j < i_N}} A_{(i,j)} \theta^j_{\lambda_i}(n).$$

Une lecture attentive de la preuve ci-dessus monte qu'en ne gardant dans (1) que les termes correspondant à $k = 0$, on obtient

$$D^n = P\Delta^n P^{-1} = \sum_{1 \leq i \leq s} A_{(i,0)} \theta^0_{\lambda_i}(n).$$

Donc

$$D = \sum_{1 \leq i \leq s} A_{(i,0)} \lambda_i.$$

On en déduit l'algorithme suivant du calcul de la décomposition de Dunford:

1. `On calcule le polynôme caractéristique` μ_M `de` M `de manière scindé.`
2. `On calcule les` $I, A, \dots, A^{taille-1}$`.`
3. `On écrit` A^n `comme dans le théorème 6 avec des matrices indéterminées` $A_{(i,j)}$`.`
4. `On calcule ces indéterminées en résolvant des systèmes (on utilise les premières valeurs de` A^n `calculées).`
5. `On écrit les coefficients de` A^n `(pour` n `assez grand) sous la forme` $\sum_i P_i \lambda_i^n$`. Alors`

$$D = \sum_i P_i(0) \lambda_i^n.$$

La remarque finale est que par liberté des suites θ_i^j, on peut identifier la formule du théorème à (1). On obtient

$$D = \sum_i A_i^1 \lambda_i.$$

Ainsi le calcul de M^n permet de retrouver la décomposition de Dunford et la boucle est bouclée.

Exemple. Considérons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On écrit

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 2^n & c_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème la suite $a_n = a^1 + a^2 2^n + a^3 n 2^n$. On calcule alors a_n en résolvant le système $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$. De même, on peut calculer b_n et c_n. On trouve :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1+2^n & 1-2^n+\frac{1}{2}n2^n \\ 0 & 2^n & \frac{1}{2}n2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & -1+2^n & 1-S^n \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

puis que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$