Géométrie projective

1 Introduction

1.1 Qu'est qu'une géométrie

Avertissement : Ce paragraphe n'est ni très formel, ni très reconnu par l'ensemble de la communauté mathématique. Il est plutôt à prendre comme une discussion informelle.

La « définition » de géométrie que nous proposons est la suivante : *Une géométrie est l'étude des propriétés des figures d'un espace.*

Il convient alors de définir les termes d'espace, de figure et de propriété :

- Un *espace* X est un ensemble muni de l'action d'un groupe G.
- Une *figure* est un ensemble de parties de X.
- Une *propriété* est une partition en deux ensembles de l'ensemble des figures (celles qui ont et qui n'ont pas la propriété). Une propriété est dite de *type* (X, G) si les deux parties sont stables par l'action de G. Autrement dit, si pour tout g dans G, une figure a la propriété si et seulement si son image par g l'a.

Cette « définition » est très vague et mérite quelques exemples. Dans toute la suite un *point* est un élément de X.

Exemple 1 : la géométrie euclidienne plane.

Ici, X est le plan euclidien et G est le groupe des isométries de X. Une propriété de type (X, G) est dite *euclidienne*.

« Être un cercle (de rayon 1) » est une propriété euclidienne.

Pour un triangle (triplet de point), « être équilatéral » est une propriété euclidienne.

Exemple 2 : la géométrie affine plane.

Ici, X est le plan affine réel et G est le groupe des bijections affines. Une propriété de type (X, G) est dite *affine*.

Pour trois points, « être aligné » est une propriété affine.

« Être un cercle » n'est PAS une propriété affine ; en revanche, « Être une ellipse » est une propriété affine.

Pour un triangle, « être équilatéral » n'est PAS une propriété affine.

1.2 Géométrie projective : un premier contact

Un résultat fondamental de la géométrie affine plane est :

L'intersection de deux droites distinctes est soit vide soit réduit à un point.

Cette alternative peut être pensée comme gênante. On se propose alors de construire une géométrie pour laquelle :

Deux droites distinctes s'intersectent en un point et un seul.

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine (réel) et E l'espace vectoriel sous-jacent. On se propose de rajouter des points à $\mathcal{P}$ et à ses droites de manière à obtenir la propriété ci-dessus.

La question est donc quel est le point commun de deux droites parallèles. La réponse qui semble s'imposer est *leur direction*. Une direction est un vecteur non nul défini à une constante multiplicative près ou encore une droite vectorielle de E. Notons $\mathbb{P}E$ l'ensemble des droites vectorielles de E. Posons

$$\mathbb{P} = \mathcal{P} \cup \mathbb{P}E.$$

La réunion ci-dessus est formelle.

Toute partie de $\mathbb{P}$ de la forme d union sa direction est appelée une *droite de* $\mathbb{P}$. On a alors :

Deux droites distinctes de $\mathbb{P}$ *s'intersectent en exactement un point.*

En géométrie affine nous avions également la propriété :

Par deux points distincts de $\mathcal{P}$ *passent une droite et une seule.*

Cette propriété est pour l'instant fausse dans $\mathbb{P}$. En effet, par deux points distincts de $\mathbb{P}E$ ne passent aucune droite. Pour remédier à cela nous décrétons que $\mathbb{P}E$ est une droite de $\mathbb{P}$. Nous avons maintenant les deux propriétés suivantes :

Deux droites distinctes de $\mathbb{P}$ s'intersectent en exactement un point.
Par deux points distincts de $\mathbb{P}$ passent une droite et une seule.

Pour l'instant, $\mathbb{P}$ n'est pas un espace au sens du paragraphe 1.1. Nous allons dans la suite donner une autre définition de $\mathbb{P}$ qui résoudra ce problème et expliquera pourquoi les notations $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}(E)$ se ressemblent. Commençons par étudier $\mathbb{P}(E)$.

2 L'ensemble $\mathbb{P}(E)$

Soit k un corps commutatif et E un k-espace vectoriel de dimension finie. Nous noterons $\mathbb{P}(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E.

Essayons de décrire ensemblistement E. Pour cela, on se donne une base $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $\mathcal{H}$ le plan affine de E constitué des points dont la première coordonnée vaut 1 et H sa direction. L'application

$$\begin{array}{rccc} \eta : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{P}(E) \\ & v & \longmapsto & k.v \end{array}$$

est une injection.

Soit d un élément de $\mathbb{P}(E)$. Alors,

- soit d rencontre $\mathcal{H}$ en un point et un seul ; c'est-à-dire appartient à l'image de η,
- soit d est inclus dans H.

Autrement dit,

$$\mathbb{P}(E) = \eta(\mathcal{H}) \cup \mathbb{P}(H).$$

De plus, $\mathcal{H}$ s'identifie à k^n.

Ceci décrit $\mathbb{P}(E)$ par induction sur la dimension de E :

- Si $\dim(E) = 1$, $\mathbb{P}(E)$ est réduit à un point.
- Si $\dim(E) = 2$, $\mathbb{P}(E) =: k\mathbb{P}^1$ est la réunion de k est d'un point (∞).

- Si $\dim(E) = 3$, $\mathbb{P}(E) =: k\mathbb{P}^2$ est la réunion de k^2 et de $k\mathbb{P}^1$.

- $k\mathbb{P}^n = k^n \cup k\mathbb{P}^{n-1}$.

Ainsi, $k\mathbb{P}^2$ est un candidat très raisonnable pour jouer le rôle du $\mathbb{P}$ du paragraphe 1.2.

L'ensemble $\mathbb{P}(E)$ est appelé *l'espace projectif* de E. Nous venons de voir que $\mathbb{P}(E)$ est la réunion d'un espace affine de dimension n ($\mathcal{H}$) et d'un espace projectif plus petit $\mathbb{P}(E)$. Ceci explique que nous appelons $n = \dim(V) - 1$ la dimension de $\mathbb{P}(V)$.

3 Quelques structures sur $\mathbb{P}(E)$

3.1 Homographies

Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ agit naturellement sur E et envoie toute droite sur une droite. Ce groupe agit donc sur $\mathbb{P}(E)$. De plus, le sous-groupe H des homothéties de $\mathrm{GL}(V)$ agit trivialement sur $\mathbb{P}(E)$. Ainsi, le quotient $\mathrm{PGL}(V) := \mathrm{GL}(V)/H$ agit sur $\mathbb{P}(V)$. Les éléments de $\mathrm{PGL}(V)$ sont appelées homographies.

Exercice : Décrire les **homographies de** $\mathbb{C}P^1$ via son identification à $\mathbb{C} \cup \infty$.

Maintenant, $\mathbb{P}(E)$ est un espace au sens du paragraphe 1.1. Une propriété des figures de $\mathbb{P}(E)$ est dite *projective* si elle est invariante par $\mathrm{PGL}(V)$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, $\mathbb{P}(F)$ peut-être vu comme une partie de $\mathbb{P}(E)\cdot$ Une telle partie de $\mathbb{P}(E)$ est appelé un *sous-espace projectif* de $\mathbb{P}(E)$. C'est l'équivalent des sous-espaces affines de la géométrie affine. Un sous-espace projectif de dimension 1 est appelé une droite de $\mathbb{P}(E)$. Remarquons que « être un sous-espace projectif » ou « être une droite » sont des propriétés projectives.

Exercice : Soit $E = \mathbb{R}^3$. On identifie E à $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ via un hyperplan affine de E. Décrire les droites de $\mathbb{P}(E)$. Comparer à ce que l'on a fait dans le paragraphe 1.2.

EXERCICE : Soit $E = \mathbb{F}_2^3$. Montrer que $\mathbb{P}(E)$ contient 7 points et 7 droites. Montrer que chaque droite contient 3 points, que chaque point appartient à trois droites. En déduire qu'il existe une bijection de $\mathbb{P}(E)$ sur l'ensemble des points de la figure ci-dessous telle que les droites s'envoient sur des points sur un même segment ou le cercle de la figure.

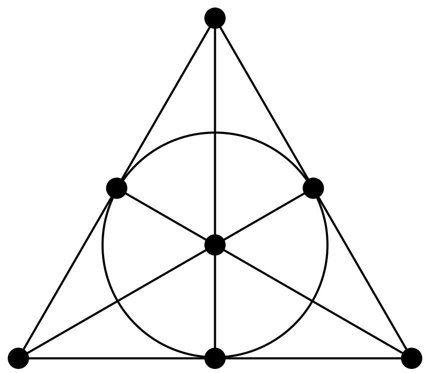

Figure 1: $\mathbb{P}^2\mathbb{F}_2$

3.2 Lien avec la géométrie affine

3.2.1 Lien théorique

Nous venons de définir la géométrie projective : c'est l'étude des propriétés des figures de $\mathbb{P}(E)$ stables par $\mathrm{PGL}(E)$. Dans le paragraphe 1.2, nous voulions que cette géométrie « prolonge » la géométrie affine. La proposition suivante nous dit que nous avons réussi :

Proposition 1 *Soit H un hyperplan vectoriel de E. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine ne contenant pas 0 de direction H. On identifie l'ensemble $\mathbb{P}(E)-\mathbb{P}(H)$ à l'espace affine $\mathcal{H}$ par l'application η de la section 2.*

Alors :

1. *L'intersection d'un sous-espace projectif de dimension d de $\mathbb{P}(E)$ et de $\mathbb{P}(E)-\mathbb{P}(H)$ est soit vide soit un sous-espace affine de dimension d.*

2. *Réciproquement, tout sous-espace affine F de $\mathcal{H}$ est inclus dans un unique sous-espace projectif minimal de $\mathbb{P}(E)$. De plus, l'intersection de ce dernier et de $\mathcal{H}$ est F.*

3. *Toute homographie de $\mathbb{P}(E)$ qui préserve $\mathbb{P}(H)$ définit par restriction une application affine de $\mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H)$.*

4. *Réciproquement, toute application affine inversible de $\mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(H)$ se prolonge de manière unique en une homographie de $\mathbb{P}(E)$.*

EXERCICE. Démontrer la proposition.

Cette proposition nous dit que les figurent de $\mathbb{P}(E)$ constituées de sous-espaces projectifs donnent par intersection des figurent de $\mathcal{H}$ constituées de sous-espaces affines. De plus, l'étude des propriétés affines de la figure de $\mathcal{H}$ se ramène à celle de la figure dans $\mathbb{P}(E)$. En ce sens, on peut dire que la géométrie projective « prolonge » la géométrie affine. Nous allons voir sur des exemples que dans certains cas elle simplifie la géométrie affine.

3.2.2 En pratique

Les deux espaces projectifs qui nous intéressent particulièrement sont $\mathbb{R}P^2$ et $\mathbb{C}P^1$. Dans ce qui suit on pourra toujours se placer dans l'un de ces exemples.

IMPORTANT.**Lorsqu'on veut représenter une figure d'un espace projectif $\mathbb{P}$, on choisit un hyperplan $\mathbb{P}(H)$ dit « à l'infini » et on représente $\mathbb{P} - \mathbb{P}(H)$, qui est un « gentil » espace affine.**

EXEMPLE-EXERCICE : **Théorème de Pappus**

Soit $\mathbb{P} = \mathbb{R}P^2$. Soit (A', B', C') et (A'', B'', C'') deux triplets de points alignés et 2 à 2 distincts de $\mathbb{P}$. Soit $A = (B'C'') \cap (B''C')$, $B = (A'C'') \cap (A''C')$ et $C = (B'A'') \cap (B''A')$.

Dessiner les 9 points ci-dessus en prenant une droite à l'infini qui ne contient aucun des 9 points ni aucune des intersections des droites qu'ils forment.

Dessiner les 9 points ci-dessus en prenant une droite à l'infini qui contient $(A'B') \cap (A''B'')$.

Dessiner les 9 points ci-dessus en prenant une droite à l'infini qui contient $(AB') \cap (A'B)$ et $(BC') \cap (B'C)$.

En déduire que les points A, B et C sont alignés.

4 La sphère de Riemann $\mathbb{C}P^1$

4.1 La sphère $\mathbb{S}^2$

On note $\mathbb{S}^2$ la sphère de dimension 2 définie comme l'ensemble des points $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1.$$

On munit $\mathbb{S}^2$ de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^3$. On $N = (0, 0, 1)$ le pôle nord de $\mathbb{S}^2$.

Exercice. Montrer que $\mathbb{S}^2$ est compacte.

On identifie $\mathbb{C}$ au plan d'équation $x_3 = 0$, par $z = x + iy \mapsto (x, y, 0)$.

Exercice Donner l'expression de la projection stéréographique $p\,:\, \mathbb{S}^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dans les coordonnées qui viennent d'être introduites.

Donner l'expression de son inverse. En déduire que p est un homéomorphisme.

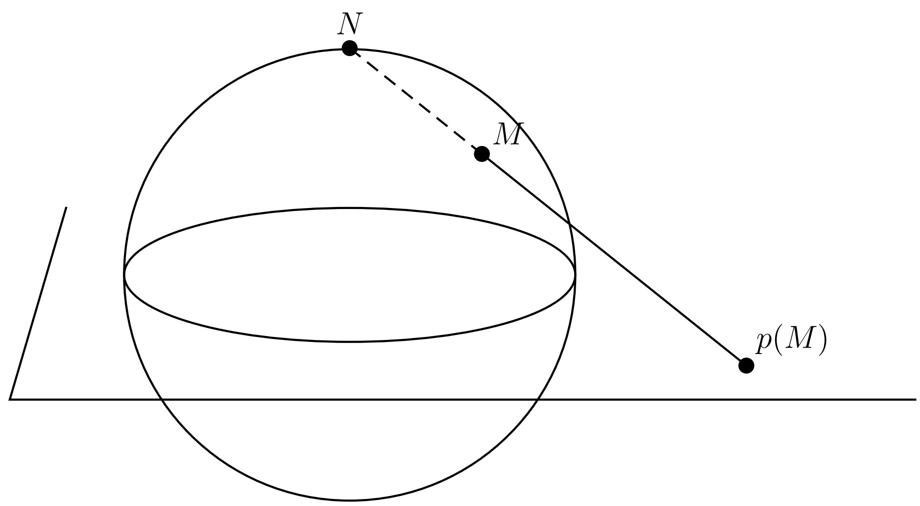

Figure 2: Projection Stéréographique

Voici l'image de la mer méditerranée par la projection stéréographique du pôle nord :

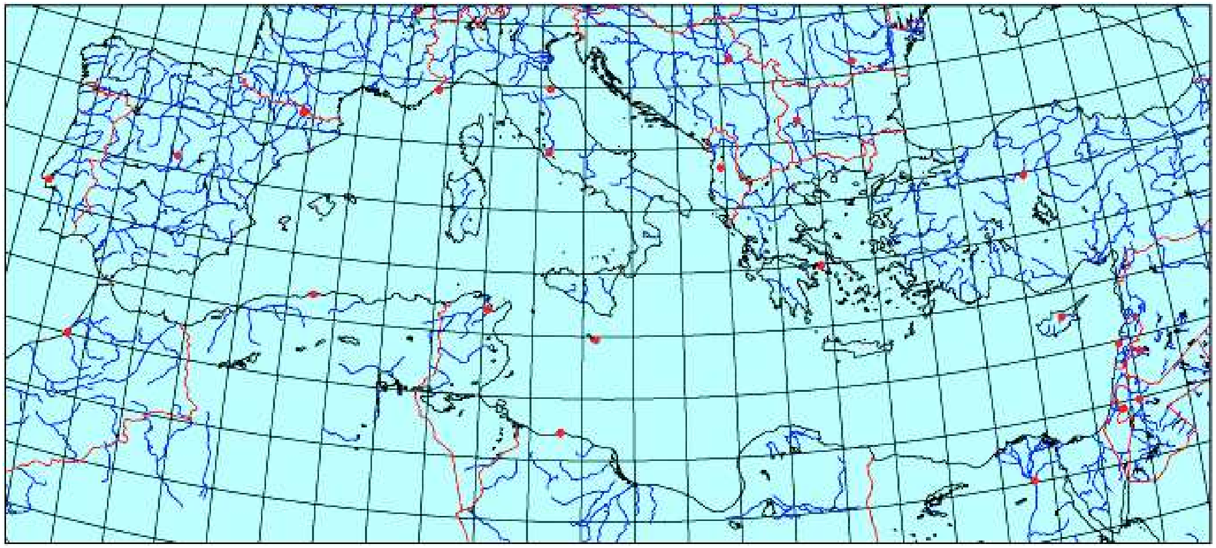

Figure 3: Méditerranée en projection stéréographique

4.2 3 modèles pour $\mathbb{C}P^1$

1. Par définition $\mathbb{C}P^1$ est la droite projective complexe, c'est-à-dire l'espace projectif de dimension un.

2. Considérons $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'alexandrof de $\mathbb{C}$.

3. Considérons la sphère $\mathbb{S}^2$.

Exercice.

1. Expliciter pour tout $x \in \mathbb{C}P^1$, une bijection η_x entre $\mathbb{C}P^1$ et $\hat{\mathbb{C}}$ qui envoie x sur ∞.

2. Montrer que la topologie mise sur $\mathbb{C}P^1$ au moyen de η_x ne dépend pas de x.

3. Montrer que la projection stéréographique induit un homéomorphisme de $\mathbb{S}^2$ sur $\hat{\mathbb{C}}$.

4.3 Action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

EXERCICE. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ sont canoniquement isomorphes.

On a déjà défini une action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}P^1$.

EXERCICE. Ecrire l'action induite sur $\hat{\mathbb{C}}$.

Voici quelques propriétés de cette action :

EXERCICE.

1. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ agit simplement trois transitivement sur $\mathbb{C}P^1$.
2. Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est engendré par $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \mapsto z+1$ et $z \mapsto \lambda z$ (pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$).
3. On appele cercle de Moebus de $\hat{\mathbb{C}}$ un cercle (de rayon non nul) de $\mathbb{C}$ ou la réunion d'une droite de $\mathbb{C}$ et de l'infini.

   Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur l'ensemble des cercles de Moebus de $\hat{\mathbb{C}}$.

4.4 Birraport

Soit z_1, z_2, z_3 et z_4 quatre points de $\hat{\mathbb{C}}$ tels que z_1, z_2, z_3 sont deux à deux distincts. Montrer qu'il existe un unique $h \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ tel que $h(z_1) = 0$, $h(z_2) = 1$ et $h(z_3) = \infty$. On appelle*biraport* des z_i l'élément de $\hat{\mathbb{C}}$ suivant:

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = h(z_4).$$

EXERCICE.

1. Donner une formule pour le birapport $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$.
2. Montrer que les z_i sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réèl.

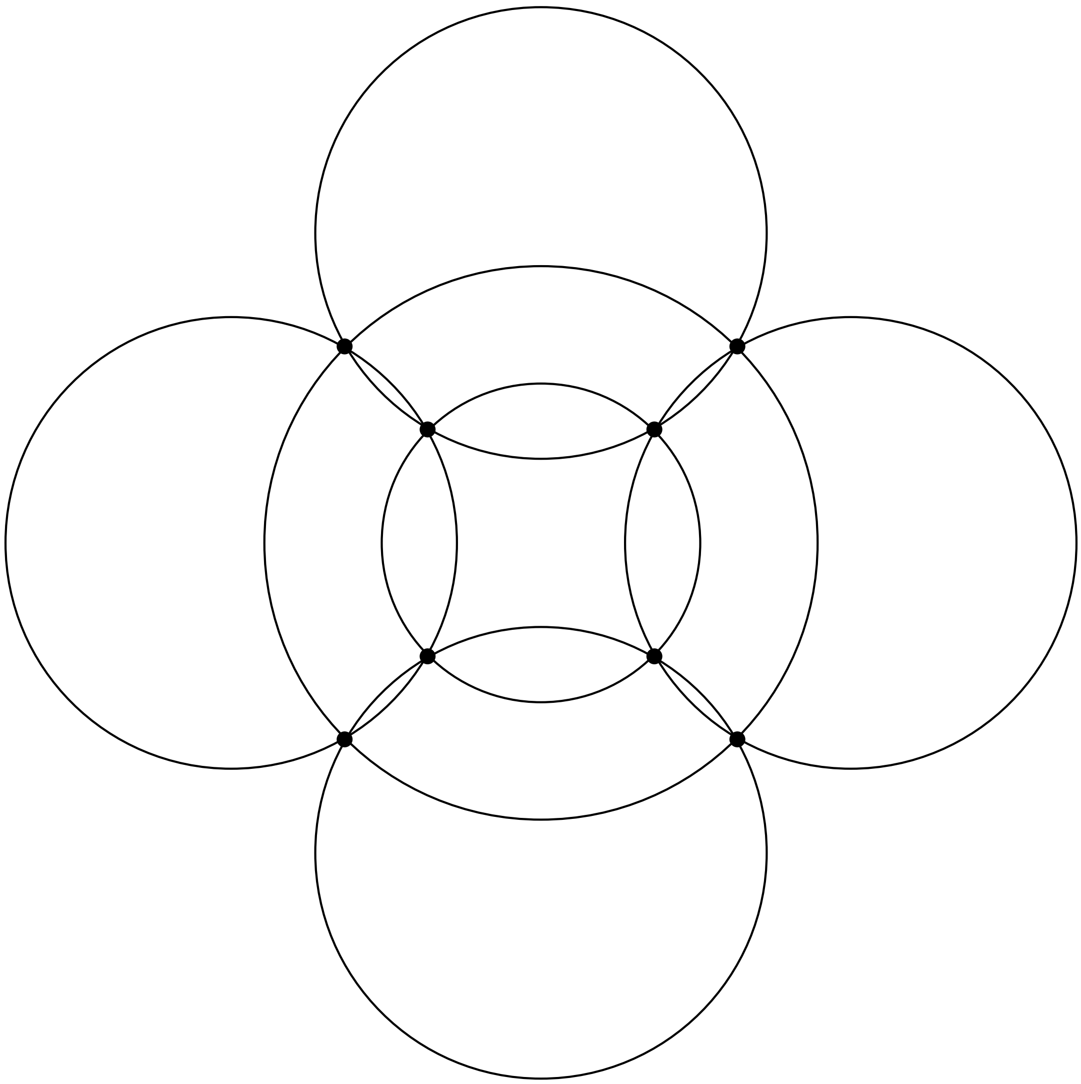

Figure 4: Cube de $\mathbb{C}P^1$

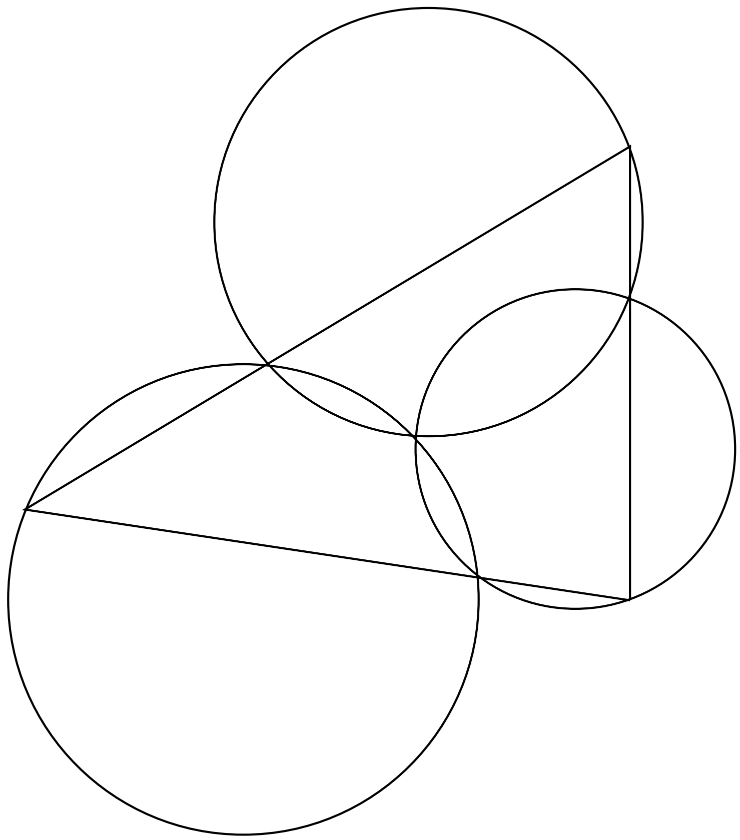

Figure 5: Le pivot

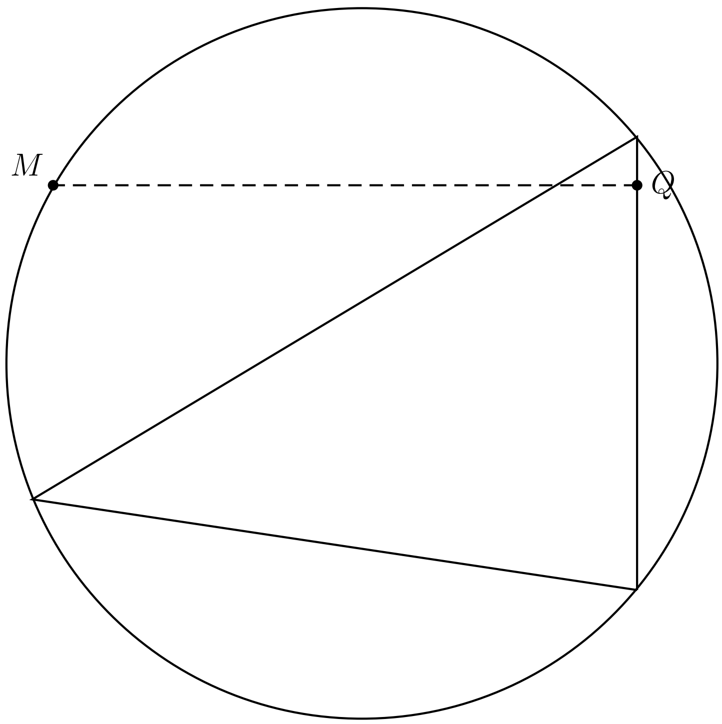

Figure 6: La droite de Simson