

Théorie Géométrique des Invariants  
et quelques sujets connexes

MÉMOIRE DE SYNTHÈSE

29 juin 2007

Nicolas Ressayre

---

# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Variation de quotients</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction à la théorie géométrique des invariants (TGI) . . .	3
1.2	Premier exemple de variation de quotients . . . . .	4
1.3	Le TGI-éventail . . . . .	6
1.4	Polytope moment . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Le problème de restriction</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Variétés sphériques</b>	<b>20</b>
3.1	Introduction aux variétés sphériques . . . . .	20
3.2	Quelques exemples . . . . .	21
3.3	Quelques motivations . . . . .	22
3.4	Le groupe et ses plongements . . . . .	23
3.5	Des quotients de compactifications du groupe . . . . .	25
3.6	Orbites d'un sous-groupe de Borel dans un espace homogène sphérique . . . . .	25
3.7	Espaces homogènes sphériques de rang minimal . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Déterminant et Permanent</b>	<b>29</b>
4.1	Théorie de Cook . . . . .	29
4.2	Théorie de Valiant . . . . .	30
4.3	Lien avec la TGI . . . . .	31
4.4	Complexité déterminantale du Permanent . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Schéma de Hilbert Invariant</b>	<b>33</b>
<b>6</b>	<b>Autres travaux</b>	<b>35</b>

## Publications classées par thèmes

### Variation de quotients

- [1] Igor V. Dolgachev and Yi Hu. Variation of geometric invariant theory quotients. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 87 :5–56, 1998. With an appendix by Nicolas Ressayre.
- [2] Pierre-Louis Montagard and Nicolas Ressayre. Sur des faces du LR-cône généralisé. *Bull. SMF (à paraître)*, (arXiv :math/0406272) :1–19, 2008.
- [3] N. Ressayre. The GIT-equivalence for  $G$ -line bundles. *Geom. Dedicata*, 81(1-3) :295–324, 2000.
- [4] Nicolas Ressayre. Geometric invariant theory and generalized eigenvalue problem. *Preprint*, (arXiv :0704.2127) :1–45, 2007.

### Variétés sphériques

- [5] N. Ressayre. Quotients of group completions by spherical subgroups. *Journal of Algebra*, pages 1–44, 2002.
- [6] Nicolas Ressayre. Sur les orbites d’un sous-groupe sphérique dans la variété des drapeaux. *Bull. de la SMF*, 132 :1–26, 2004.
- [7] Nicolas Ressayre. About Knop’s action of the Weyl group on the set of orbits of a spherical subgroup in the flag manifold. *Transform. Groups*, 10(2) :255–265, 2005.
- [8] Nicolas Ressayre. Spherical homogeneous spaces of minimal rank. *soumis*, [http ://www.math.univ-montp2.fr/~ressayre/pubs.html](http://www.math.univ-montp2.fr/~ressayre/pubs.html), pages 1–16, 2007.

### Déterminant et Permanent

- [9] Thierry Mignon and Nicolas Ressayre. A quadratic bound for the permanant-determinant problem. *IMRN*, 79 :4241–4254, 2004.

### Schéma de Hilbert Invariant

- [10] Sébastien Jansou and Nicolas Ressayre. Invariant deformations of orbit closures in  $\mathfrak{sl}(n)$ . [http ://www.math.univ-montp2.fr/~ressayre/pubs.html](http://www.math.univ-montp2.fr/~ressayre/pubs.html), pages 1–12, 2007.

## Autres travaux

- [11] Pierre-Louis Montagard and Nicolas Ressayre. Lattice polytopes and root systems. *soumis*, <http://www.math.univ-montp2.fr/~ressayre/pubs.html>, pages 1–11, 2007.
- [12] Jean Pagnon and Nicolas Ressayre. Adjacency of young tableaux and the springer fibers. *Selecta Mathematica, New series*, 12(3–4) :517–540, 2006.
- [13] Nicolas Ressayre. Balanced configurations of  $2n+1$  plane vectors. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 21(3) :281–287, 2005.

## 0 Introduction

Ce mémoire tente de résumer et d'introduire les travaux que j'ai effectué depuis ma thèse. On donne aussi quelques pistes pour l'avenir.

Mon premier sujet de préoccupation est le problème de variation de quotients en théorie géométrique des invariants. Étant donné un groupe algébrique réductif  $G$  agissant sur une variété projective normale  $X$ , il s'agit de comprendre le

*Problème de variation de quotients* : comment les quotients associés aux différents fibrés en droites amples et  $G$ -linéarisés varient ?

Les publications [1, 3] sur ce problème sont introduites dans la section 1 de ce mémoire.

Soit  $G \subset \hat{G}$  deux groupes réductifs. De nombreux problèmes classiques de théorie des représentations (formule des caractères, décomposition du produit tensoriel, pléthysme...) sont des cas particuliers du problème suivant :

*Problème de restriction* : décomposer une représentation irréductible de  $\hat{G}$  en somme de  $G$ -modules simples.

Le théorème de réciprocity Frobenius permet une approche géométrique de ce problème. En effet, nous verrons dans la section 2 qu'il est fructueux d'interpréter une question issue du problème de restriction en termes du problème de variation de quotient (voir [2, 4]).

La section 3 concerne les variétés sphériques. Mon premier travail sur ce thème [5] consistait en une application des techniques de variation de quotient à l'étude de ces variétés. En effet, dans ma thèse, je me suis intéressé à la question suivante : quelles sont les variétés sphériques projectives qui peuvent s'obtenir comme des quotients de plongements projectifs du groupes. Ce problème fait le pont entre le problème de variation de quotients et les variétés sphériques. Soit  $G$  un groupe complexe réductif connexe,  $H$  un sous-groupe sphérique et  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$ . Motivé notamment par le problème de restriction des représentations, je me suis intéressé dans [6] aux orbites de  $B \times H$  dans  $G$  et ses plongements.

Nous verrons aussi que les plongements du groupe occupent une place

privilégiée au sein des variétés sphériques, notamment parce qu'ils sont de rang minimal. Nous classons dans [8] les espaces homogènes sphériques de rang minimal.

La section 4 est à l'interface de l'informatique théorique et des mathématiques. Nous verrons en effet que la théorie de la complexité et la géométrie algébrique ont des choses à se dire ; nous exposerons notamment un lien surprenant (dû à Mulmuley et Sohoni) entre la complexité et la théorie géométrique des invariants. Je voudrais citer le livre en préparation de J.M. Landsberg et J. Morton [LM08] qui sera à n'en pas douter une excellente référence sur ce sujet. Nous présenterons à la fin de la section 4 un travail, en commun avec Thierry Mignon, sur la complexité déterminantale du permanent.

Comme précédemment  $G$  désigne un groupe algébrique réductif complexe. Motivé par la classification des variétés sphériques, récemment Alexeev et Brion ont défini un schéma de Hilbert invariant qui paramètre les sous-schémas affines  $G$ -stables d'une  $G$ -variété affine. Il est naturel d'utiliser ce schéma pour construire des espaces d'orbites. Dans [10], avec Sébastien Jansou, nous étudions ce que donne cette construction dans le cas de la représentation adjointe d'un groupe semi-simple et notamment  $SL_n$  revisitant ainsi la théorie des nappes. Ce travail est expliqué dans la section 5 de ce mémoire.

Dans une dernière section, nous présentons brièvement trois travaux réalisés à la suite de discussions ou de lectures. Le premier sur les fibres de Springer en type A fait suite à des discussions avec Jean Pagnon qui a passé un an à Montpellier. Le second sur des configurations de vecteurs dans le plan réel fait suite à la lecture d'un travail de Cattani et Dickenstein sur les résidus toriques. Le dernier, en collaboration avec P.L. Montgard, fait suite à la lecture d'un article de Karpenkov et constitue une application de la théorie des systèmes de racines.

# 1 Variation de quotients

Durant ma thèse, mon premier thème de recherche était le problème de variation de quotients en théorie géométrique des invariants. Comme nous le verrons, cette question occupe une place centrale dans les travaux que j'ai effectué depuis : à ce titre, nous incluons ce travail dans le présent mémoire.

Après une brève introduction à la théorie géométrique des invariants, nous décrirons les premières questions de variation de quotients à la lumière d'un exemple. Nous exposerons ensuite notre principal résultat de [3] et définiront le TGI-éventail dont le support est appelé cône  $G$ -ample.

## 1.1 Introduction à la théorie géométrique des invariants (TGI)

La théorie des invariants est un sujet très en vogue au 19<sup>e</sup> siècle. Motivé par la construction d'espaces de modules, D. Mumford a relancé le sujet en 1965 en inventant la théorie géométrique des invariants.

La TGI tente de construire un quotient d'une variété algébrique  $X$  sous l'action d'un groupe linéaire  $G$ . Dans les applications,  $X$  est souvent une variété qui paramètre une famille d'objets géométriques (courbes algébriques, fibrés vectoriels. . .) de telle sorte que deux points de  $X$  paramètrent le même objet si et seulement si, ils sont dans la même orbite.

On se place sur un corps  $k$  algébriquement clos. Pour commencer supposons que  $X$  est affine. Si le quotient  $X/G$  existait, ses fonctions régulières induiraient des fonctions régulières  $G$ -invariantes sur  $X$ . Ainsi, un bon candidat pour être l'algèbre des fonctions régulières sur le quotient est l'algèbre  $k[X]^G$  des fonctions régulières sur  $X$  qui sont constantes sur les orbites de  $G$ . Ainsi, le théorème fondamental de la TGI est celui de Hilbert : si  $G$  est réductif (ce que l'on suppose dorénavant) alors  $k[X]^G$  est de type fini. On note alors  $X//G$  la variété affine  $\text{Spec}(k[X]^G)$  dont l'algèbre des fonctions régulières est  $k[X]^G$ . On a un morphisme  $G$ -invariant canonique  $\pi : X \rightarrow X//G$ . Cette construction sépare les orbites autant que l'autorise la topologie : chaque fibre de  $\pi$  contient une unique orbite fermée de  $G$ .

Supposons maintenant que  $X = \mathbb{P}(V)$  pour un  $G$ -module  $V$ . On note temporairement  $Y$  la variété projective associée à l'algèbre  $k[V]^G$  graduée par le degré. L'inclusion de  $k[V]^G$  dans  $k[V]$  induit une application rationnelle  $\pi : \mathbb{P}(V) \rightarrow Y$ , dont le domaine de définition est l'ouvert :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V)^{\text{ss}} &= \{x = [v] \in \mathbb{P}(V) : \exists n > 0, f \in k[V]_n^G \ f(v) \neq 0\} \\ &= \{x = [v] \in \mathbb{P}(V) : \overline{G \cdot v} \not\equiv 0\}. \end{aligned}$$

Le morphisme  $\pi : \mathbb{P}(V)^{\text{ss}} \longrightarrow Y$  est le recollement de quotients d'ouverts affines  $G$ -stables de  $\mathbb{P}(V)^{\text{ss}}$ . Il est aussi un quotient catégorique et on note  $Y = \mathbb{P}(V)^{\text{ss}}//G$ .

Supposons maintenant que  $X$  est une  $G$ -variété projective quelconque. Lorsque  $X$  est plongée dans un  $\mathbb{P}(V)$ , on peut restreindre la construction ci-dessus : le résultat obtenu ne dépend en fait que de la restriction du fibré  $\mathcal{O}(1)$  à  $X$ . Plus précisément, étant donné un fibré en droites ample et  $G$ -linéarisé  $\mathcal{L}$  sur  $X$ , on pose

$$X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = \{x \in X : \exists n > 0 \text{ et } \sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^G \text{ } \sigma(x) \neq 0\},$$

et  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//G = \text{Proj}(\oplus_{n \in \mathbb{N}} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})^G)$ . On a alors un morphisme  $G$ -invariant  $\pi : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//G$  qui est un quotient catégorique. Considérons l'ensemble

$$X^{\text{s}}(\mathcal{L}) = \{x \in X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) : G.x \text{ est fermé dans } X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \text{ et } G_x \text{ est fini}\},$$

des points stables pour  $\mathcal{L}$ . Alors,  $X^{\text{s}}(\mathcal{L})$  est ouvert dans  $X$  et pour tout  $x \in X^{\text{s}}(\mathcal{L})$ ,  $\pi^{-1}(\pi(x)) = G.x$ .

## 1.2 Premier exemple de variation de quotients

La construction ci-dessus présente l'inconvénient (à moins que ce soit un avantage) de dépendre d'un choix d'un fibré  $\mathcal{L}$ . Bizarrement, l'étude de cette dépendance n'a été initié que tardivement. Le premier travail dans ce sens a été réalisé par M. Brion et C. Procesi qui dans [BP90] étudient le cas où  $G$  est un tore, le fibré  $\mathcal{L}$  est fixé et la linéarisation (action de  $T$  sur l'espace total de  $\mathcal{L}$ ) varie. De manière simultanée, M Thaddeus et Dolgachev-Hu ont étudié dans [Tha96] et [DH98] le cas général.

Avant d'expliquer nos résultats sur ce thème et en guise de motivation, je reproduis (de [Tha96]) ici brièvement une application des techniques de variation de quotients.

Soit  $G$  un groupe réductif,  $T$  un tore maximal de  $G$  et  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  contenant  $T$ . Grâce au théorème de Borel-Weil, à tout caractère dominant  $\nu$  de  $T$  on peut associer un fibré en droites  $G$ -linéarisé  $\mathcal{L}_\nu$  sur la variété des drapeaux  $G/B$  de  $G$  tel que  $H^0(G/B, \mathcal{L}_\nu)$  soit le dual  $V_\nu^*$  du  $G$ -module irréductible  $V_\nu$  de plus haut poids  $\nu$ . Fixons un poids strictement dominant  $\nu$  de telle sorte que  $\mathcal{L}_\nu$  soit ample.

Soit  $X$  une  $G$ -variété projective et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et  $G$ -linéarisé sur  $X$  tels que  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = X^{\text{s}}(\mathcal{L})$ . On considère l'action de  $G$  sur  $Y = X \times G/B$  et les quotients associés aux fibrés  $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}_\nu^{\otimes m}$  lorsque  $n$  et



$m$  parcourent l'ensemble des entiers strictement positifs. Il est aisé de voir que l'ouvert  $Y^{\text{ss}}(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}_\nu^{\otimes m})$  et donc son quotient catégorique  $Y^{\text{ss}}(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}_\nu^{\otimes m})//G$  ne dépendent que du rationnel  $\frac{n}{m}$ . Pour  $t = \frac{n}{m}$ , on pose  $Y^{\text{ss}}(t) = Y^{\text{ss}}(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}_\nu^{\otimes m})$ .

Comme  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) = X^s(\mathcal{L})$ , le critère de Hilbert-Mumford montre que pour  $t$  petit,  $Y^{\text{ss}}(t) = X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \times G/B$  et  $Y^{\text{ss}}(t)//G$  se fibre sur  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L})//G$  avec  $G/B$  comme fibre. Comme la dimension de  $H^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{L}_\nu^{\otimes m})^G = (H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes V_{m\nu}^*)^G$  est la multiplicité de  $V_{m\nu}$  dans  $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ , on peut montrer que  $Y^{\text{ss}}(t)$  est vide pour  $t$  grand. Entre ces deux extrêmes, on peut montrer que l'on a un nombre fini de valeurs critiques de  $t$  : entre deux telles valeurs, l'ouvert  $Y^{\text{ss}}(t)$  ne varie pas. Soit  $t_0$  une valeur critique,  $t_0^\pm$  deux valeurs voisines de part et d'autre de  $t_0$ . On a alors les inclusions  $Y^{\text{ss}}(t_0^-) \subset Y^{\text{ss}}(t_0) \supset Y^{\text{ss}}(t_0^+)$  qui induisent des morphismes entre les variétés quotients. On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & Y^{\text{ss}}(t_0^-)//G \times_{Y^{\text{ss}}(t_0)//G} Y^{\text{ss}}(t_0^+)//G & \\
 & \swarrow \qquad \qquad \searrow & \\
 Y^{\text{ss}}(t_0^-)//G & & Y^{\text{ss}}(t_0^+)//G \\
 & \searrow \qquad \qquad \swarrow & \\
 & Y^{\text{ss}}(t_0)//G & 
 \end{array}$$

Dans [Tha96], M. Thaddeus a regardé le cas où  $G = \text{SL}_2$  et  $X = (\mathbb{P}^1)^k$ . Dans ce cas, il montre que les deux flèches du hauts sont des éclatements. Le diagramme permet donc de relier la topologie des deux variétés  $Y^{\text{ss}}(t_0^\pm)//G$  consécutives. En utilisant cet argument de proche en proche avec  $X = (\mathbb{P}^1)^k$  (pour un entier impair  $k$ ) puis en quotientant par le groupe symétrique, M. Thaddeus retrouve le résultat de J. Kirwan suivant :

**Proposition 1** *Pour  $k$  impair, le polynôme de Poincaré de  $((\mathbb{P}^1)^k)^{\text{ss}}(\mathcal{O}(1)^{\otimes k})//\text{SL}_2$  vaut :*

$$\sum_{s=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{m} \frac{t^{2m} - t^{2(n-m-1)}}{1 - t^4}.$$

Celui de  $(\mathbb{P}^n)^{\text{ss}}//\text{SL}_2$  vaut :

$$\sum_{s=0}^{(n-1)/2} \frac{t^{2s} - t^{2(n-s-1)}}{1 - t^4}.$$

### 1.3 Le TGI-éventail

Fixons une variété projective  $X$  munie de l'action d'un groupe réductif  $G$ . Soit  $\Lambda$  un sous-groupe de type fini de fibrés en droites  $G$ -linéarisés sur  $X$  et  $\Lambda^+$  les éléments amples de  $\Lambda$ . Dolgachev et Hu ont montré que deux fibrés numériquement équivalents donnent le même ensemble de points semi-stables ; ainsi, comme le groupe de Néron-Severi de  $X$  est de type fini, l'hypothèse de finitude sur  $\Lambda$  n'est en fait pas une restriction gênante.

Dans la démonstration de Thaddeus de la proposition 1, les ingrédients suivants sont importants :

1. Comprendre l'application  $\mathcal{L} \in \Lambda^+ \mapsto X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  ;
2. Comprendre les inclusions  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1) \subset X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_2)$  ;
3. Décrire les morphismes  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1)//G \rightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_2)//G$  induits par les inclusions  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1) \subset X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_2)$ .

Mon travail sur ces questions suit celui de Dolgachev et Hu. Ils ont défini la notion de TGI-équivalence : deux éléments  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  de  $\Lambda^+$  sont équivalents si et seulement si  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1) = X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_2)$ . Le premier résultat de [DH98] montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de TGI-équivalence.

Comme  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}^{\otimes n}) = X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$ , on peut prolonger l'application  $\mathcal{L} \mapsto X^{\text{ss}}(\mathcal{L})$  au cône ouvert  $\Lambda_{\mathbb{Q}}^+$  engendré par  $\Lambda^+$  dans  $\Lambda_{\mathbb{Q}} := \Lambda \otimes \mathbb{Q}$ . On pose alors :

$$C_{\Lambda}^G(X) := \{\mathcal{L} \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^+ : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}) \text{ soit non vide}\}.$$

Dans [DH98], Dolgachev et Hu mais aussi M. Thaddeus dans [Tha96] ont étudié le découpage de  $C^G(X)$  en TGI-classes. Ils montrent l'existence de chambres sur lesquelles les ouverts de points semi-stables sont constants. Ces chambres sont séparées par des murs. Les définitions de chambres et murs diffèrent légèrement entre [DH98] et [3]. En appendice de [DH98], j'ai publié (voir [1]) un exemple montrant que les définitions de Dolgachev-Hu et les miennes diffèrent. À l'origine, cet exemple contredisait un énoncé d'une version préliminaire de [DH98].

Le résultat principal de [3] précise ceux de Dolgachev-Hu et Thaddeus :

**Théorème 1** *Avec les notations ci-dessus, on a :*

1. Pour tout  $\mathcal{L}_0 \in C_\Lambda^G(X)$ , l'ensemble

$$C_\Lambda(\mathcal{L}_0) = \{\mathcal{L} \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^+ : X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_0) \subset X^{\text{ss}}(\mathcal{L})\};$$

est un cône convexe fermé et polyédral dans  $\Lambda_{\mathbb{Q}}^+$ .

2. Les cônes  $C_\Lambda(\mathcal{L})$  pour  $\mathcal{L} \in C_\Lambda^G(X)$  forment un éventail de  $\Lambda_{\mathbb{Q}}^+$  dont le support est  $C_\Lambda^G(X)$ . Nous appelons TGI-éventail cet éventail.

3. Les TGI-classes d'équivalence sont les intérieurs relatifs des cônes  $C_\Lambda(\mathcal{L})$ .

En un sens, on peut dire que le théorème ci-dessus apporte une réponse satisfaisante aux deux premiers des trois questions ci-dessus. La démonstration de ce résultat est une application minutieuse du critère de Hilbert-Mumford et utilise notamment des résultats de Kempf et Ness. En particulier, ce résultat est vrai sur tout corps algébriquement clos. Remarquons que cela simplifie et améliore le résultat de Dolgachev et Hu qui empruntaient des arguments de géométrie hamiltonienne valables uniquement sur  $\mathbb{C}$  et pour  $X$  lisse.

Dans [3], en caractéristique zéro, utilisant le Slice étale de Luna, nous établissons enfin des relations entre la géométrie des TGI-classes de  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  et les fibres du morphisme  $X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_1)//G \longrightarrow X^{\text{ss}}(\mathcal{L}_2)//G$ .

## 1.4 Polytope moment

Soit  $X$  une  $G$ -variété projective et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample et  $G$ -linéarisé sur  $X$ . Soit  $T$  un tore maximal de  $G$  et  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  contenant  $T$ . Soit  $X(T)$  le groupe des caractères de  $T$ . Posons :

$$P(X, \mathcal{L}) := \{\nu \in X(T) \otimes \mathbb{Q} \text{ dominant} : V_{n\nu} \text{ s'injecte dans } H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \\ \text{pour } n \text{ assez grand}\}.$$

M. Brion a montré dans [Bri87] que  $P(X, \mathcal{L})$  est un polytope appelé *polytope moment*. Dans le cas complexe et si  $X$  est lisse, il permet en effet de décrire l'image de l'application moment pour l'action d'un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$ .

Considérons l'action de  $G$  sur  $Y = X \times G/B$ . Soit  $\Lambda$  le groupe engendré par le pullback de  $\mathcal{L}$  sur  $Y$  et les pullbacks des fibrés en droites  $G$ -linéarisés sur  $G/B$ . Le cône  $C_\Lambda^G(Y)$  s'identifie alors au cône engendré par les couples  $(1, p) \in \mathbb{Q} \times (X(T) \otimes \mathbb{Q})$  tels que  $p \in P(X, \mathcal{L})$  et  $p$  est strictement dominant.

En particulier, les études de  $P(X, \mathcal{L})$  et de l'adhérence de  $C_{\Lambda}^G(Y)$  sont bien souvent équivalentes.

La remarque ci-dessus nous permet dans [4] de retrouver certains résultats de [Bri99] sur certaines faces de  $P(X, \mathcal{L})$ . Cette approche mériterait sans doute d'être approfondie.

## 2 Le problème de restriction

Dans cette section, nous nous intéressons au problème de restriction des représentations irréductibles d'un groupe réductif à un sous-groupe réductif.

**2.1** — Soient  $G \subset \hat{G}$  deux groupes réductifs connexes. Soit  $\hat{V}$  une représentation irréductible de  $G$ . Le groupe  $G$  agit alors sur  $\hat{V}$  par restriction : on s'intéresse à la décomposition de  $\hat{V}$  en somme de  $G$ -modules irréductibles. Remarquons que ce contexte recouvre de nombreux problèmes classiques en théorie des représentations. Citons en trois :

1. Si  $G$  est un tore maximal de  $\hat{G}$ , il s'agit de déterminer le caractère de la représentation  $\hat{V}$ . La formule des caractères de Weyl est la réponse classique ici.
2. Pour l'inclusion diagonale de  $G$  dans le produit  $\hat{G}$  de  $s$  copies de  $G$ , il s'agit de décomposer le produit tensoriel de  $s$  représentations irréductibles de  $G$ .
3. Soit  $V$  une représentation (fidèle) de  $G$  : alors,  $G$  se plonge dans  $\hat{G} = \mathrm{GL}(V)$ . Il s'agit alors de décomposer des représentations du type  $S^\pi V$  où  $\pi$  est une partition. Littlewood a baptisé ce problème du nom mystérieux de *pléthysme*.

Afin de préciser les questions qui se posent on introduit quelques notations. Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$  et  $T$  un tore maximal de  $B$ . Le groupe des caractères  $X(T)$  de  $T$  contient le semigroupe  $P^+$  des poids dominants relativement à  $B$ . Chaque représentation irréductible de  $G$  contient une unique droite stable par  $B$  : ceci permet de réaliser une bijection de l'ensemble des représentations irréductibles de  $G$  sur  $P^+$ . On notera  $V_\nu$  la représentation correspondant à  $\nu \in P^+$ . On utilisera des notations analogues pour  $\hat{G} : \hat{T}, \hat{B}, \hat{\nu}, \hat{P}^+ \dots$ . Pour  $(\nu, \hat{\nu}) \in P^+ \times \hat{P}^+$ , on note  $c_\nu^{\hat{\nu}}$  la multiplicité de la représentation  $V_\nu$  dans  $V_{\hat{\nu}}$ . Il s'agit alors de comprendre la fonction  $(\nu, \hat{\nu}) \mapsto c_\nu^{\hat{\nu}}$ . Remarquons que pour  $G = \mathrm{GL}_n$  plongé diagonalement dans  $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$ , les  $c_\nu^{\hat{\nu}}$  sont les célèbres coefficients de Littlewood-Richardson, aux multiples interprétations.

**2.2** — Une façon de répondre à la question est de construire un modèle combinatoire pour calculer les  $c_\nu^{\hat{\nu}}$  : on cherche des résultats du type «  $c_\nu^{\hat{\nu}}$  est le nombre de tableaux de Young tels que ... ». La règle de Littlewood-Richardson, les puzzles de Knutson-Tao-Woodward, les chemins de Littelmann sont de telles réponses.

Pour ma part, je me suis plutôt intéressé à des propriétés qualitatives de ces coefficients à travers le LR-cône généralisé qui est en quelque sorte le support asymptotique de la fonction  $(\nu, \hat{\nu}) \mapsto c_{\nu}^{\hat{\nu}}$ . Notons que comme nous le verrons, même dans les cas où des modèles combinatoires sont connus, la description du LR-cône est non triviale. Précisons...

On pose

$$\mathrm{LR}(G, \hat{G}) = \{(\nu, \hat{\nu}) \in P^+ \times \hat{P}^+ : c_{\nu}^{\hat{\nu}} \neq 0\}.$$

Le premier résultat qualitatif est le suivant :

**Théorème 2 (Krämer-Brion-Knop)** *L'ensemble  $\mathrm{LR}(G, \hat{G})$  est un semi-groupe de type fini dans  $P^+ \times \hat{P}^+$ .*

La démonstration de ce résultat se trouve dans [É92] et est attribuée à Brion et Knop. Voici comment ils procèdent. Soient  $U$  (resp.  $\hat{U}$ ) le radical unipotent de  $B$  (resp.  $\hat{B}$ ). D'après le théorème de Borel-Weil, l'ensemble  $\mathrm{LR}(G, \hat{G})$  est l'ensemble des poids de  $T \times \hat{T}$  dans l'algèbre  $k[\hat{G}]^{U \times \hat{U}} = \left(k[G]^U \otimes k[\hat{G}]^{\hat{U}}\right)^G$ . Le théorème découle alors du fait que cette algèbre est de type fini.

La description de  $\mathrm{LR}(G, \hat{G})$  se divise en deux questions de natures assez différentes :

1. Décrire le cône  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  engendré par  $\mathrm{LR}(G, \hat{G})$  dans  $(X(T) \times X(\hat{T})) \otimes \mathbb{Q}$ .
2. Des questions de réseau de type saturation.

Nous nous intéresserons dans la suite aux cônes  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$ .

**2.3** — Les cônes  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  se trouvent au carrefour de diverses belles mathématiques. Nous les avons présentés comme issus de la théorie des représentations ; Knutson-Tao-Woodward ont utilisé des méthodes combinatoires dans [KTW04] pour étudier certains cônes  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  ; nous verrons qu'il est fructueux d'interpréter  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  comme le support d'un TGI-éventail ; nous verrons aussi que  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  permet de décrire des images d'applications moments de certaines actions hamiltoniennes de groupes compacts. Dans [Ful00], W. Fulton donnent de nombreuses autres interprétations des cônes  $\widetilde{\mathrm{LR}}(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n^2)$ .

**2.4** — Voyons maintenant comment les cônes  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  s'interprètent en termes d'**application moment**. On se place ici sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres

complexes. Soient  $K$  (resp.  $\hat{K}$ ) un sous-groupe compact maximal de  $G$  (resp.  $\hat{G}$ ). On note  $\mathfrak{k}$  et  $\hat{\mathfrak{k}}$  les algèbres de Lie de  $K$  et  $\hat{K}$  et on choisit des algèbres de Cartan  $\mathfrak{h}$  et  $\hat{\mathfrak{h}}$  de  $\mathfrak{k}$  et  $\hat{\mathfrak{k}}$ . On considère sur le fibré cotangent  $T^*\hat{K}$  de  $\hat{K}$  l'action de  $K \times \hat{K}$  induite par l'action par multiplication à gauche et à droite sur  $\hat{K}$  : cette action est naturellement hamiltonienne. On note  $\Delta(T^*\hat{K})$  le cône moment de cette action. Comme l'ont remarqué Guillemin et Steinberg dans [GS82], le travail de thèse de Heckman montre que  $\Delta(T^*\hat{K})$  n'est autre que  $\widetilde{\text{LR}}(G, \hat{G})$ .

Ce point de vue donne des interprétations élémentaires de certains LR-cônes. Nous détaillons ici le cas  $\widetilde{\text{LR}}(\text{SL}_n, \text{SL}_n^s)$ . On note  $\mathfrak{su}(n, \mathbb{C})^*$  l'ensemble des matrices hermitiennes de trace nulle et de taille  $n$ . Pour  $A \in \mathfrak{su}(n, \mathbb{C})^*$  on note  $\lambda(A) = (\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A))$  le spectre de  $A$ . Le cône  $\widetilde{\text{LR}}(\text{SL}_n, \text{SL}_n^s)$  s'identifie alors à :

$$\Delta(s) := \{(\lambda(A_0), \dots, \lambda(A_s)) : A_i \in \mathfrak{su}(n, \mathbb{C})^* \text{ et } \sum A_i = 0\}.$$

Ainsi, comprendre  $\Delta(s)$  c'est savoir ce que l'on peut dire du spectre de la somme de  $s$  matrices hermitiennes dont on connaît les spectres. Avec ce point de vue élémentaire H. Weyl en 1917 a donné les premières inégalités satisfaites par les points de  $\Delta(2)$  :

$$\begin{aligned} \lambda_{i+j-1}(A+B) &\leq \lambda_i(A) + \lambda_j(B) && \text{pour } i+j \leq n+1, \\ \lambda_{i+j-n}(A+B) &\geq \lambda_i(A) + \lambda_j(B) && \text{pour } i+j \geq n+1. \end{aligned}$$

Ensuite, par des techniques d'analyse matricielle, de nombreuses inégalités ont été obtenues par Fan, Lidskii, Wielandt... Le livre [MO79] est une bonne référence pour ces résultats.

**2.5** — Voyons maintenant comment le théorème de Borel-Weil permet de réaliser les LR-cônes comme les **supports de TGI-éventail**. On suppose ici pour simplifier que  $G$  et  $\hat{G}$  sont semi-simples. Considérons l'action diagonale de  $G$  sur  $X = G/B \times \hat{G}/\hat{B}$ . Le groupe  $\text{Pic}^G(X)$  s'identifie alors à  $X(T) \times X(\hat{T})$  par  $(\nu, \hat{\nu}) \mapsto (G \times_B k_\nu, \hat{G} \times_{\hat{B}} k_{\hat{\nu}}) =: \mathcal{L}_\nu \otimes \mathcal{L}_{\hat{\nu}}$  où  $G \times_B k_\nu$  est le quotient de  $G \times k$  par l'action de  $B$  donnée par  $b.(g, \tau) = (gb^{-1}, \nu(b^{-1})\tau)$  et  $\hat{G} \times_{\hat{B}} k_{\hat{\nu}}$  est défini de manière analogue. Le théorème de Borel-Weil dit alors que  $H^0(X, \mathcal{L}_\nu \otimes \mathcal{L}_{\hat{\nu}}) = V_\nu \otimes V_{\hat{\nu}}$ . Ainsi,  $(\nu, \hat{\nu}) \in C^G(X)$  si et seulement s'il existe  $n > 0$  tel que  $(V_{n\nu} \otimes V_{n\hat{\nu}})^G \neq 0$ , c'est-à-dire si  $V_{n\nu}^*$  s'injecte dans  $V_{n\hat{\nu}}$ . Si  $w_0$  désigne l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de  $G$ , on obtient donc l'application suivante :

$$\begin{aligned} C^G(G/B \times \hat{G}/\hat{B}) &\longrightarrow \widetilde{\text{LR}}(G, \hat{G}) \\ (\nu, \hat{\nu}) &\longmapsto (-w_0\nu, \hat{\nu}). \end{aligned}$$

qui identifie  $C^G(G/B \times \hat{G}/\hat{B})$  à l'intersection de  $\widetilde{\text{LR}}(G, \hat{G})$  et de l'intérieur de la chambre dominante (à cause de la condition d'amplitude imposée aux fibrés sur  $G/B \times \hat{G}/\hat{B}$ ).

**2.6** — Comme nous l'avons vu le semigroupe  $\text{LR}(G, \hat{G})$  est de type fini. En particulier, le cône  $\widetilde{\text{LR}}(G, \hat{G})$  est déterminé par une liste finie d'inégalités linéaires. La recherche de ces inégalités a une longue et riche histoire dont nous donnons ici quelques éléments.

Dans le cas de  $\text{SL}_n$  plongé diagonalement dans  $\text{SL}_n \times \text{SL}_n$ , nous avons déjà vu que l'histoire de ces inégalités remonte à H. Weyl. Dans ce cas, la première liste complète d'inégalités a été obtenue par Klyachko dans [Kly98]. Dans le cas général, une liste complète d'inégalités est obtenue par Berenstein et Sjamaar dans [BS00a]. Dans ces deux travaux, la théorie géométrique des invariants est utilisée au travers du théorème de Hilbert-Mumford. Nous introduisons maintenant quelques notations afin d'énoncer le principal résultat de Berenstein et Sjamaar.

Soient  $T, B, \hat{T}$  et  $\hat{B}$  des tores maximaux et sous-groupes de Borel de  $G$  et  $\hat{G}$  choisis de telle sorte que  $\hat{B} \supset \hat{T} \supset T \subset B \subset \hat{B}$ . Soit  $\Theta : X(\hat{T}) \rightarrow T$  le morphisme de restriction. Soient  $\Phi$  et  $\hat{\Phi}$  les systèmes de racines de  $G$  et  $\hat{G}$  respectivement. Soit  $Y(T)$  le groupe des sous-groupes à un paramètre de  $T$ . À tout  $\alpha \in \hat{\Phi}$  on associe l'hyperplan de  $Y(T) \otimes \mathbb{Q}$  suivant

$$\mathcal{H}_\alpha := \{\lambda \in Y(T) \otimes \mathbb{Q} : \alpha \circ \lambda \text{ est trivial}\}.$$

Ces hyperplans  $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha \in \hat{\Phi}}$  découpent  $Y(T) \otimes \mathbb{Q}$  en chambres. De plus, le groupe de Weyl  $W$  de  $G$  agit sur l'ensemble des chambres et donc sur l'ensemble des arrêtes de ces chambres. Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in Y(T)$  des générateurs dominants d'un système complet de représentants de ces arrêtes. À chaque  $\lambda_i$  on associe les sous-groupes paraboliques :

$$\begin{aligned} \hat{P}(\lambda_i) &= \{\hat{g} \in \hat{G} : \lambda_i(t)\hat{g}\lambda_i(t^{-1}) \text{ a une limite en } 0\}, \text{ et} \\ P(\lambda_i) &= \hat{P}(\lambda_i) \cap G. \end{aligned}$$

L'inclusion  $\iota$  de  $G/P(\lambda_i)$  dans  $\hat{G}/\hat{P}(\lambda_i)$  induit une application en cohomologie :

$$\iota^* : H^*(\hat{G}/\hat{P}(\lambda_i), \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(G/P(\lambda_i), \mathbb{Z}).$$

On note enfin  $W^\lambda$  (resp.  $\hat{W}^\lambda$ ) l'ensemble des éléments de  $W$  (resp.  $\hat{W}$ ) de plus grande longueur dans leurs classes modulo le groupe de Weyl du centralisateur dans  $G$  (resp.  $\hat{G}$ ) de l'image de  $\lambda$ .

On peut maintenant énoncer le théorème de Berenstein et Sjamaar :



**Théorème 3 (Berenstein-Sjamaar, [BS00a])** *Un poids rationnel  $(\nu, \hat{\nu}) \in (X(T) \times X(\hat{T})) \otimes \mathbb{Q}$  appartient à  $\widetilde{\text{LR}}(G, \hat{G})$  si et seulement si*

1.  $\nu$  est dominant ; c'est-à-dire  $\langle \alpha^\vee, \nu \rangle \geq 0$  pour toute racine simple  $\alpha$  de  $G$  ;
2.  $\hat{\nu}$  est dominant ; c'est-à-dire  $\langle \hat{\alpha}^\vee, \hat{\nu} \rangle \geq 0$  pour toute racine simple  $\hat{\alpha}$  de  $\hat{G}$  ;
3.  $\langle \lambda_i, \hat{w}\hat{\nu} + w\nu \rangle \geq 0$ ,  
pour tout  $i = 1, \dots, m$  et tout couple  $(w, \hat{w}) \in W^\lambda \times \hat{W}^\lambda$  tels que

$$t^*([\hat{B}\hat{w}^{-1}\hat{P}(\lambda_i)/\hat{P}(\lambda_i)]) \cdot [Bw^{-1}P(\lambda_i)/P(\lambda_i)] = d.[pt]$$

dans  $\mathbb{H}^*(G/P(\lambda_i), \mathbb{Z})$  pour un entier strictement positif  $d$  ( $[pt]$  désigne la classe du point).

On pourrait croire que l'histoire des inégalités de  $\widetilde{\text{LR}}(G, \hat{G})$  s'arrête ici, mais il n'en est rien. En effet, comme l'ont eux-mêmes remarqué Berenstein et Sjamaar leur liste d'inégalités est loin d'être minimale. Une première amélioration a été apporté par Kapovich et Millson qui ont montré dans le cas du produit tensoriel ( $\hat{G} = G^s$ ) que les inégalités avec  $d = 1$  suffisent dans le théorème 3. Encore plus récemment et toujours dans le cas du produit tensoriel Belkale et Kumar ont encore réduit la liste des inégalités dans [BK06]. Pour énoncer le résultat de Belkale et Kumar, nous introduisons quelques notations supplémentaires.

Pour  $\lambda$  un sous-groupe à un paramètre de  $T$  et  $w \in W$  on pose :

$$\chi_w = \rho - w\rho + 2\rho_\lambda, \tag{1}$$

où  $\rho$  est la demi-somme des racines positives de  $G$  et  $\rho_\lambda$  celle des racines positives orthogonales à  $\lambda$ . Le théorème de Belkale et Kumar peut s'énoncer ainsi :

**Théorème 4 (Belkale-Kumar, [BK06])** *On considère un groupe semi-simple  $G$  plongé diagonalement dans  $\hat{G} = G^s$ . Un poids rationnel  $(\nu_0, \dots, \nu_s) \in (X(T) \otimes \mathbb{Q})^{s+1}$  appartient à  $\widetilde{\text{LR}}(G, G^s)$  si et seulement si*

1. chaque  $\nu_i$  est dominant ; c'est-à-dire  $\langle \alpha^\vee, \nu_i \rangle \geq 0$  pour toute racine simple  $\alpha$  de  $G$  ;
2.  $\sum_i \langle \omega_{\alpha^\vee}, w_i \nu_i \rangle \geq 0$ ,  
pour toute racine simple  $\alpha$  et tout  $(w_0, \dots, w_s) \in (W^{\omega_{\alpha^\vee}})^{s+1}$  tels que
  - (a)  $[Bw_0^{-1}P(\alpha^\vee)/P(\alpha^\vee)] \cdot \dots \cdot [Bw_s^{-1}P(\alpha^\vee)/P(\alpha^\vee)] = [pt]$   
dans  $\mathbb{H}^*(G/P(\alpha^\vee), \mathbb{Z})$ , et

$$(b) \langle \alpha^\vee, \chi_{w_0} + \cdots + \chi_{w_s} - \chi_1 \rangle = 0.$$

De plus, ils définissent un nouveau produit, noté  $\odot_0$  par déformation-spécialisation sur les groupes  $H^*(G/P, \mathbb{Z})$  pour tout sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$ . Ce produit a la propriété suivante : les conditions 2a et 2b du théorème sont équivalentes à

$$\overline{[Bw_0^{-1}P(\alpha^\vee)/P(\alpha^\vee)]} \odot_0 \cdots \odot_0 \overline{[Bw_s^{-1}P(\alpha^\vee)/P(\alpha^\vee)]} = [pt]$$

dans  $H^*(G/P(\alpha^\vee), \mathbb{Z})$ . Il permet dans d'énoncer le théorème ci-dessus très joliment. Ainsi, dans le cas du produit tensoriel, Belkale et Kumar réduisent la liste des inégalités de Berenstein et Sjamaar en rajoutant la condition 2b. Dans le cas où  $G/P$  est minuscule Belkale et Kumar montrent que le produit  $\odot_0$  sur  $H^*(G/P, \mathbb{Z})$  coïncide avec le produit ordinaire. Les grassmanniennes étant minuscules, le théorème de Belkale et Kumar n'apporte donc pas d'amélioration dans le cas où  $G = \mathrm{SL}_n$ .

À l'inverse de chercher à réduire la liste des inégalités on peut vouloir montrer qu'une inégalité est indispensable c'est-à-dire que l'ensemble des points de  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  qui réalise cette inégalité est de codimension un (on raisonne ici dans l'espace vectoriel engendré par  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$ ). Dans le cas de  $\mathrm{SL}_n \subset \mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_n$ , Knutson, Tao et Woodward ont montré dans [KTW04], en utilisant un modèle combinatoire appelé honeycomb, que toutes les inégalités du théorème 4 sont indispensables. Ce résultat a été aussi obtenu par Belkale dans [Bel03a] par d'autres méthodes. En utilisant un calcul explicite par ordinateur Kapovich, Kumar et Millson ont montré dans [KKM06] que les inégalités du théorème 4 sont indispensables pour  $\mathrm{Spin}(8) \subset \mathrm{Spin}(8) \times \mathrm{Spin}(8)$ . Ces trois travaux sont à ma connaissance les seuls dans cette direction.

**2.7** — Nous allons exposer brièvement le travail [2] en collaboration avec Pierre-Louis Montagard.

On se place dans la situation du théorème 3. Nous nous sommes intéressés aux inégalités 1 de ce théorème et aux faces de  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  qu'elles définissent. Ainsi, pour un ensemble  $I$  de racines simples de  $G$ , on pose :

$$\mathcal{F}_I = \{(\nu, \hat{\nu}) \in \widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G}) : \forall \alpha \in I \quad \langle \alpha^\vee, \nu \rangle = 0\}.$$

On introduit la quantité :

$$\delta_I = \dim(\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})) - \#I - \dim \mathcal{F}_I,$$

qui est la différence entre la dimension attendue de  $\mathcal{F}_I$  et sa dimension. Nous commençons par montrer que  $\delta_I$  est toujours positif ou nul. De plus, l'inégalité 1 du théorème 3 correspondante à  $\alpha$  est indispensable si et seulement si  $\delta_{\{\alpha\}} = 0$ .

Le premier théorème que nous obtenons est un résultat de monotonie :

**Théorème 5** *Si  $I \subset J$  alors  $\delta_J \geq \delta_I \geq 0$ .*

Ce résultat montre que bien qu'à priori le cas où  $I$  est un singleton soit le plus intéressant, il est utile de les considérer tous. Le théorème 5 dit que le dessin suivant ne peut PAS s'obtenir comme une section de  $P^+ \times \hat{P}^+$  :

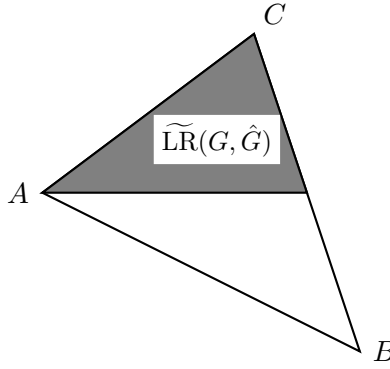


FIG. 1 –  $\delta_{\{A\}} = 0$  et  $\delta_{\{A,B\}} = 1$

Fixons un ensemble  $I$  de racines simples de  $G$ . Soit  $L_I$  le sous-groupe de Levi de  $G$  associé à  $I$  et  $B_I$  un sous-groupe de Borel de  $L_I$ . On construit alors une  $L_I$ -variété  $M_I$  produit d'un espace vectoriel et d'une variété de drapeaux telle que l'on ait le

**Théorème 6** *La différence des dimensions des isotropies génériques réductives de  $L_I$  et  $B_I$  agissant sur  $M_I$  est égale à  $\delta_I$ .*

Cette caractérisation géométrique de  $\delta_I$  permet de les calculer facilement dans le cas du produit tensoriel :

**Théorème 7** *Soit  $G$  un groupe simple. On considère  $\widetilde{\text{LR}}(G, G^s)$ , avec  $s \geq 2$ . Si  $s = 2$  et  $I$  est l'ensemble de toutes les racines simples,  $\delta_I$  est égal au rang de  $G$ . Dans tous les autres cas,  $\delta_I = 0$ .*

Ce théorème implique qu'excepté pour  $G = \mathrm{SL}_2$  et  $s = 2$ , si  $G$  est simple toutes les inégalités 1 du théorème 4 sont indispensables. Dans le cas  $s = 2$  et  $G = \mathrm{SL}_n$  on retrouve le théorème 4 de [KTW04].

Enfin, dans la situation générale du théorème 3, nous obtenons un critère facile et efficace pour montrer que tous les  $\delta_I$  sont nuls :

**Théorème 8** *S'il existe un point de  $\hat{G}/\hat{B}$  dont l'isotropie dans le groupe dérivé de  $G$  est finie alors  $\delta_I = 0$  pour tout  $I$ .*

Les démonstrations de cet article sont dans la lignée de celle que nous avons esquissé du théorème 2. En effet, la stratégie générale est d'identifier  $\mathcal{F}_I \cap \mathrm{LR}(G, \hat{G})$  à l'ensemble des poids pour l'action d'un tore maximal  $T \times \hat{T}$  de  $G \times \hat{G}$  dans l'algèbre des fonctions sur une variété affine  $X_I$  grâce au théorème de réciprocity de Frobenius. Le calcul de  $\dim \mathcal{F}_I$  se ramène alors à celui de la dimension de l'isotropie générique de  $T \times \hat{T}$  dans  $X_I$ . On utilise alors le fait que cette dimension ne change pas si on remplace  $X_I$  par une variété birationnelle ou un revêtement fini. Pour  $I \subset J$ , ceci nous permet par exemple de remplacer  $X_I$  et  $X_J$  par des variétés  $X'_I$  et  $X'_J$  de telle sorte qu'il existe un morphisme  $T \times \hat{T}$ -équivariant entre de  $X'_I$  vers  $X'_J$ ; ce qui nous permet d'obtenir le théorème 5.

**2.8** — Dans la prépublication [4], on s'intéresse au support des cônes  $C_\Lambda^G(X)$  de la section 1.3. Nous obtenons des résultats avec des degrés variés de généralité et précision. Par soucis de clarté nous ne parlons ici que du cas où  $X = G/B \times \hat{G}/\hat{B}$  et  $\Lambda = \mathrm{Pic}^G(X)$ . On reprend les notations du théorème 3. On améliore son énoncé en montrant le

**Théorème 9** *On suppose que l'intérieur de  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  est non vide dans  $(X(T) \times X(\hat{T})) \otimes \mathbb{Q}$ .*

*Un poids rationnel  $(\nu, \hat{\nu}) \in (X(T) \times X(\hat{T})) \otimes \mathbb{Q}$  appartient à  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  si et seulement si*

1.  $\nu$  est dominant; c'est-à-dire  $\langle \alpha^\vee, \nu \rangle \geq 0$  pour toute racine simple  $\alpha$  de  $G$ ;
2.  $\hat{\nu}$  est dominant; c'est-à-dire  $\langle \hat{\alpha}^\vee, \hat{\nu} \rangle \geq 0$  pour toute racine simple  $\hat{\alpha}$  de  $\hat{G}$ ;
3.  $\langle \lambda_i, \hat{w}\hat{\nu} + w\nu \rangle \geq 0$ ,  
pour tout  $i = 1, \dots, m$  et tout couple  $(w, \hat{w}) \in W^\lambda \times \hat{W}^\lambda$  tels que  
(a) dans  $\mathrm{H}^*(G/P(\lambda_i), \mathbb{Z})$ , on ait

$$\iota^*([\hat{B}\hat{w}^{-1}\hat{P}(\lambda_i)/\hat{P}(\lambda_i)]) \cdot [\overline{Bw^{-1}P(\lambda_i)/P(\lambda_i)}] = [pt],$$

(b) et  $\langle \lambda_i, \chi_{\hat{w}^{-1}} + \chi_{w^{-1}} - \chi_1 \rangle = 0$ ,

où  $\chi_{w^{-1}}$  est défini par la formule 1 et  $\chi_{\hat{w}^{-1}}$  de manière analogue.

L'hypothèse sur  $\widetilde{\text{LR}}(G, \hat{G})$  n'est sans doute pas totalement nécessaire bien que vérifiée dans la plupart des cas. Nous prévoyons de retravailler cette partie. Sous les hypothèses du théorème, on obtient un paramétrage de certaines faces de plus grandes codimension de  $\widetilde{\text{LR}}(G, \hat{G})$  par des triplets  $(\lambda, \hat{w}, w) \in Y(T) \times \hat{W}^\lambda \times W^\lambda$  vérifiant certaines conditions proches de celle du théorème ci-dessus. On sait de plus montrer que ce paramétrage atteint toutes les faces  $\widetilde{\text{LR}}(G, \hat{G})$  qui rencontrent l'intérieur de la chambre dominante.

Dans le cas  $\hat{G} = G^s$  le théorème 9 est équivalent au théorème 4 de Belkale et Kumar. Dans ce cas, nos résultats ont une forme plus aboutie et peuvent s'énoncer plus facilement :

**Théorème 10** *Soit  $G$  un groupe simple et  $s$  en entier supérieur ou égal à deux. Si  $s = 2$ , on suppose que  $G$  n'est pas de rang un. Alors, on a :*

1. *Un point  $(\nu_1, \dots, \nu_{s+1}) \in X(T)_{\mathbb{Q}}^{s+1}$  appartient à  $\overline{\mathcal{C}}^G((G/B)^{s+1}) = \widetilde{\text{LR}}(G, G^s)$  si et seulement si*
  - (a) *chaque  $\nu_i$  est dominant ; c'est-à-dire  $\langle \alpha^\vee, \nu_i \rangle \geq 0$  pour toute racine simple  $\alpha$ .*
  - (b) *pour toute racine simple  $\alpha$  ; pour tout  $(w_1, \dots, w_{s+1}) \in (W/W_{\omega_{\alpha^\vee}})^{s+1}$  tel que  $[\Lambda_{w_1^{-1}}] \odot_0 \cdots \odot_0 [\Lambda_{w_{s+1}^{-1}}] = [\Lambda_e] \in H^*(G/P(\alpha), \mathbb{Z})$ , on a :*

$$\sum_i \langle \omega_{\alpha^\vee}, w_i \nu_i \rangle \geq 0.$$

2. *Dans la description ci-dessus de  $\overline{\mathcal{C}}^G((G/B)^{s+1})$ , on ne peut omettre aucune inégalité (ni dans la liste 1a, ni dans la 1b).*
3. *Soit  $\mathcal{F}$  une face de  $\mathcal{C}^G((G/B)^{s+1})$  de codimension  $d$ . Il existe un ensemble  $I$  de  $d$  racines simples et  $(w_1, \dots, w_{s+1}) \in (W/W(I))^{s+1}$  tels que :*
  - (a)  $[\Lambda_{w_1^{-1}}] \odot_0 \cdots \odot_0 [\Lambda_{w_{s+1}^{-1}}] = [\Lambda_e] \in H^*(G/P(I), \mathbb{Z})$ ,
  - (b) *le sous-espace engendré par  $\mathcal{F}$  soit l'ensemble des  $(\nu_1, \dots, \nu_{s+1}) \in X(T)_{\mathbb{Q}}^{s+1}$  tels que :*

$$\forall \alpha \in I \quad \sum_i \langle \omega_{\alpha^\vee}, w_i \nu_i \rangle = 0.$$

4. Inversement, soit  $I$  un ensemble de  $d$  racines simples et  $(w_1, \dots, w_{s+1}) \in (W/W_I)^{s+1}$  tel que  $[\Lambda_{w_1^{-1}}] \odot_0 \cdots \odot_0 [\Lambda_{w_{s+1}^{-1}}] = [\Lambda_e] \in H^*(G/P(I), \mathbb{Z})$ .

Alors, l'ensemble des  $(\nu_1, \dots, \nu_{s+1}) \in \overline{\mathcal{C}}^G((G/B)^{s+1})$  tels que

$$\forall \alpha \in I \quad \sum_i \langle \omega_{\alpha^\vee}, w_i \nu_i \rangle = 0,$$

est une face de codimension  $d$  de  $\overline{\mathcal{C}}^G((G/B)^{s+1})$ .

Dans le cas  $s = 2$  et  $G = \mathrm{SL}_n$  la partie (ii) est équivalente au résultat de [KTW04] et découle de [Bel03a]. Le paramétrage des faces plus petites semble nouveau même dans le cas  $\mathrm{SL}_n$ . Remarquons aussi que notre énoncé donne une application du produit  $\odot_0$  de Belkale et Kumar pour tous les espaces homogènes  $G/P$  alors que dans [BK06] seul le cas où  $P$  est maximal est utile.

Les démonstrations de cette prépublication utilisent essentiellement deux ingrédients : une analyse précise du critère de Hilbert-Mumford dans la droite ligne de [3] et le slice étale de Luna. Le fait que les inégalités «  $\nu_i$  dominant » soient toutes indispensables est montré dans [2]. Il est intéressant de remarquer que dans l'approche de [KTW04] ces inégalités soient également traitées séparément.

**2.9** — À la suite de [4], de nombreuses questions restent ouvertes. Nous exposons ici celles qui semblent les plus accessibles.

Nos résultats sur le cône  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, \hat{G})$  mériteraient sans doute d'être explicités sur des exemples. Les exemples  $\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{GL}(S^2 V)$ ,  $\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{GL}(\bigwedge^2 V)$  et  $\mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(F) \subset \mathrm{GL}(E \otimes F)$  sont particulièrement intéressants. Le cas où  $G$  est un sous-groupe de Levi de  $\hat{G}$  semble accessible.

On peut dire que les faces de codimension un des cônes  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, G^s)$  sont maintenant bien comprises. Une façon duale de décrire  $\widetilde{\mathrm{LR}}(G, G^s)$  serait de décrire ses arrêtes. Savoir si ces arrêtes engendrent  $\mathrm{LR}(\mathrm{SL}_n, \mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_n)$  est aussi une question naturelle.

À ma connaissance, presque rien n'est connu sur ces arrêtes. Elles ont sans doute à voir avec les couples  $\nu, \hat{\nu}$  tels que  $c_{n\nu, n\hat{\nu}} \leq 1$  pour tout entier positif  $n$  : ces couples ont été étudiés par Popov dans [Pop07]. Nos résultats montrent que ces arrêtes sont toutes sur le bord de la chambre dominante de  $G^{s+1}$ . Par conséquent, il s'agit d'étudier les cônes  $C^G(G/P_0 \times \cdots \times G/P_s)$

pour des sous-groupes paraboliques  $P_0, \dots, P_s$  de  $G$ . Comme le montre le début de notre preprint, notre approche devrait pouvoir s'appliquer dans ce cas.

En vertu du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch, le découpage de  $C^G(G/B, \hat{G}/\hat{B})$  en le TGI-éventail gouverne le comportement de la fonction  $(\nu, \hat{\nu}) \mapsto c_{\nu, \hat{\nu}}$ . Il serait donc intéressant de déterminer cet éventail.

Le problème des valeurs propres a un équivalent multiplicatif étudié par exemple dans [AW98, Bel03b, TW03]. Pour  $SL_n$ , il s'agit de déterminer les classes de conjugaisons possibles d'un produit de matrices spéciales unitaires dont on connaît les classes de conjugaison. Le rôle de la cohomologie des  $G/P$  dans le problème linéaire est ici joué par la cohomologie quantique des  $G/P$ . Via la construction des espaces de module de fibrés paraboliques, ce problème peut aussi s'interpréter via la théorie géométrique des invariants. Il serait intéressant de voir ce que les résultats généraux de [4] donnent dans ce cas.

Pour  $SL_n \subset SL_n \times SL_n$ , la partie 3 du théorème 10 a deux preuves : celle de Knutson-Tao-Woodward et la notre. Il serait sans doute intéressant de les comparer, de voir ce que l'une peut enseigner sur l'autre. Le polytope de Berenstein-Zelevinski est aussi un objet combinatoire qu'il serait intéressant de rapprocher de la TGI.

### 3 Variétés sphériques

Dans la seconde partie de ma thèse, je me suis intéressé aux variétés sphériques en lien avec la théorie géométrique des invariants. Commençons ici par introduire les variétés sphériques avant d'exposer quelques résultats que nous avons obtenu depuis.

#### 3.1 Introduction aux variétés sphériques

On se place sur un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique nulle. On s'intéresse aux variétés algébriques irréductibles  $X$  munies de l'action d'un groupe réductif connexe  $G$  et contenant une orbite ouverte de  $G$ . Ces  $G$ -variétés sont à l'opposé de celles intéressantes du point de vue de la théorie des invariants dans le sens où l'orbite dense empêche l'existence de tout invariant non trivial. D. Luna et T. Vust définissent dans [LV83a] une stratégie pour étudier ces variétés. F. Knop a montré dans [Kno91] que la théorie de Luna-Vust était particulièrement efficace dans le cas sphérique. Dans le but d'appréhender cette théorie, nous commençons ici par quelques rappels sur les variétés toriques.

Dans le cas où  $G = T$  est un tore, les variétés irréductibles et normales  $X$  contenant une orbite ouverte de  $T$  sont les *variétés toriques*. Celles-ci sont classifiées (voir [Oda88] ou [Ful93]) par une donnée géométrico-combinatoire, les éventails. Le chemin des variétés toriques aux éventails se divise en quatre étapes :

1. Par le théorème de Sumihiro, localement  $X$  se plonge dans un  $\mathbb{P}(V)$  pour un  $T$ -module  $V$ . On montre ensuite que tout point de  $X$  contient un voisinage ouvert affine et  $T$ -stable en utilisant le fait que tout  $T$ -module contient une droite stable.
2. Si  $X$  est affine, on décompose  $k[X]$  comme  $T$ -module. L'ensemble des poids donne un sous-semigroupe  $S$  de  $X(T)$  qui permet de reconstituer l'algèbre  $k[X]$  et donc  $X$ .
3. Soit  $x$  un point de l'orbite ouverte de  $T$  dans  $X$  et  $T_x$  son stabilisateur. Comme  $X$  est normale,  $S$  est saturé dans le groupe  $X(T)^{T_x}$  des caractères de  $T$  triviaux sur  $T_x$ . En particulier,  $S$  peut-être décrit par son cône dual  $S^\vee$ .
4. Les cônes  $S^\vee$  correspondants aux divers ouverts affines  $T$ -stables de  $X$  se recollent en formant un éventail.



Soit  $G$  un groupe réductif connexe. Un point clé dans la construction précédente et que  $k[X]$  est sans multiplicité : ceci nous a permis d'encoder la donnée de  $k[X] \subset k[T]^{T_x}$  par celle d'un semigroupe. Si l'on veut mimer la théorie des variétés toriques pour les  $G$ -variétés il est naturel de considérer la définition suivante :

**Definition.** Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est dit *sphérique* si pour tout fibré en droites  $G$ -linéarisé  $\mathcal{L}$  sur  $G/H$ , le  $G$ -module des sections de  $\mathcal{L}$  est sans multiplicité.

On montre que  $G/H$  est sphérique si et seulement s'il contient une orbite ouverte d'un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$ . Un plongement de  $G/H$  c'est-à-dire une  $G$ -variété normale et irréductible contenant une orbite ouverte isomorphe à  $G/H$  est appelé *variété sphérique*. L'étape 1 des variétés toriques est remplacé par le (voir [Kno91]) :

**Théorème 11** *Soit  $X$  un plongement de  $G/H$  et  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$ . Soit  $\mathcal{O}$  une orbite de  $G$  dans  $X$ .*

*Alors, il existe un ouvert affine  $\Omega$  stable par  $B$  qui rencontre  $\mathcal{O}$ .*

La donnée de  $\Omega \cap G/H$  est encodé par une partie  $I$  de l'ensemble fini des diviseurs premiers  $B$ -stables de  $G/H$  : ces diviseurs sont appelés *couleurs*. On considère ensuite le semigroupe  $S$  des poids de  $B$  dans  $k[\Omega]$ . Les couples  $(S^\vee, I)$  ainsi obtenus pour les différentes orbites  $\mathcal{O}$  de  $G$  dans  $X$  forment ce que l'on appelle un *éventail colorié*.

Finalement, les plongements de  $G/H$  sont en bijection avec les éventails coloriés.

### 3.2 Quelques exemples

Les espaces homogènes complets ( $G/P$ ) et les variétés toriques sont les premiers exemples de variétés sphériques. Tout sous-groupe contenant le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de  $G$  est sphérique (on dit qu'il est *horosphérique*). Les plongements des espaces homogènes horosphériques se fibrent sur des espaces homogènes complets avec des variétés toriques comme fibres.

Soit  $\sigma$  une involution d'ordre 2 de  $G$ . On note  $G^\sigma$  le sous-groupe des points fixes de  $\sigma$ . L'espace symétrique  $G/G^\sigma$  est sphérique. Par exemple le groupe  $G$  vu comme  $G \times G$ -variété, l'espace des quadriques non dégénérées de  $\mathbb{P}^n$  muni de l'action de  $\mathrm{PGL}_{n+1}$ , l'espace des paires de sous-espaces supplémentaires de dimension données de  $k^n$  muni de l'action de  $\mathrm{GL}_n$ , l'espace

des formes bilinéaires antisymétriques non dégénérées de  $k^{2n}$  sous l'action de  $GL_{2n}$  sont des espaces homogènes symétriques.

Soit  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $0 \leq d \leq n$  un entier. L'ensemble des triplets  $(F_1, F_2, u)$  où  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sous-espaces de dimension  $d$  de  $E$  et  $u : F_1 \rightarrow F_2$  est un isomorphisme linéaire. Cet ensemble  $Y_d$  est homogène sphérique sous l'action de  $SL(E) \times SL(E)$ . Il n'est pas symétrique par exemple parce que l'isotropie n'est pas réductive.

### 3.3 Quelques motivations

Comme nous l'avons déjà vu, les variétés sphériques constituent une classe naturelle de  $G$ -variétés quasihomogènes qui englobe les variétés toriques, les variétés de drapeaux et les espaces homogènes symétriques, c'est-à-dire les variétés quasihomogènes les mieux comprises. De plus, la théorie de Luna-Vust donne une prise sur ces variétés. Enfin, cette classe jouie de propriétés de stabilité intéressantes ; par exemple, une sous-variété  $G$ -stable d'une variété sphérique est sphérique. Ceci n'est pas le cas des espaces symétriques ; ainsi, des orbites telles que les  $Y_d$  du paragraphe précédent apparaissent dans les plongements de  $SL_n$ .

Les variétés sphériques constituent un vivier intéressant. Par exemple Boris Pasquier classe dans [Pas08] les variétés horosphériques de Fano, produisant ainsi de nouveaux exemples.

Les espaces homogènes complets font sans doute partie des variétés algébriques les mieux compris. Il est alors naturel de considérer les  $G$ -variétés complètes contenant deux orbites : il suit d'une classification de S. Foutou-Cupit que ces variétés sont toutes sphériques. Notons qu'il serait intéressant d'avoir une démonstration explicative de ce fait.

Une autre situation dans laquelle apparaissent naturellement des variétés sphériques est celle des variétés magnifiques.

Commençons par mettre en exergue quelques propriétés de la  $T = (k^*)^n$ -variété  $\mathbb{P}^n$  :

1.  $\mathbb{P}^n$  est lisse et complète.
2. Le complémentaire de l'orbite ouverte de  $T$  dans  $\mathbb{P}^n$  est constitué de diviseurs à croisement normaux.
3. Les  $T$ -orbites sont caractérisées par leur position par rapport à ces diviseurs.

Une  $G$ -variété ayant ces propriétés est dite *magnifique*. D. Luna a montré que toute variété magnifique est sphérique (voir [Lun96]) ; il a aussi montré que la classification des variétés sphériques se ramène à celle des variétés magnifiques.

Depuis les travaux [DCP83, DCP85] de De Concini et Procesi, la géométrie énumérative est une motivation importante pour l'étude des variétés sphériques. Il s'agit de répondre à des questions du type : combien de coniques de  $\mathbb{P}^2$  sont tangentes à 5 coniques générales données ? En 1864, Chasles affirme que la réponse est 3264. Bien que sa réponse soit juste, il a fallu attendre 1974 et Kleiman pour obtenir une démonstration complète de ce résultat (voir [Kle80]).

Dans [DCP85], De Concini et Procesi ont défini l'anneau des conditions  $C^*(G/H)$  d'un espace homogène  $G/H$  : celui-ci explique et justifie des calculs de Chasles, Schubert... Si  $G/H$  est symétrique De Concini et Procesi ont montré que  $C^*(G/H)$  était une limite d'anneaux de cohomologie de plongements de  $G/H$ . Dans [Bri90], M. Brion a remarqué que le cadre naturel dans lequel la démonstration de De Concini et Procesi fonctionne est en fait celui des espaces homogènes sphériques. En effet, en vertu du théorème de Kleiman, l'argument clé est que  $G$  n'a qu'un nombre fini d'orbites dans les plongements de  $G/H$ . Ainsi, certaines démonstrations classiques de géométrie énumérative s'interprètent dans les anneaux de cohomologie des variétés sphériques complètes.

### 3.4 Le groupe et ses plongements

Trois de mes travaux sont motivés par l'idée que le groupe  $G$  vu comme  $G \times G$ -variété occupe une place de choix parmi les espaces homogènes sphériques. Dans cette section, nous tentons d'illustrer ce principe.

**3.4.1** — Pour commencer signalons un lien entre les plongements de  $G$  et les monoïdes ; lien qui constitue une application de la théorie des plongements de  $G$ .

Un monoïde algébrique  $X$  est une variété algébrique munie d'un morphisme  $X \times X \rightarrow X$  qui fait de  $X$  un monoïde unitaire. Le premier exemple est l'ensemble des matrices carrées. L'ensemble des éléments inversibles de  $X$  qui est ouvert dans  $X$  est un groupe  $G$ . Si  $G$  est réductif on dit que  $X$  l'est. Ces monoïdes ont été étudiés par Putcha, Renner, Vinberg... Finalement, A. Rittatore a obtenu le

**Théorème 12** *Soit  $X$  un monoïde algébrique réductif et  $G$  son groupe des inversibles.*

*Les monoïdes algébriques de groupe  $G$  sont exactement les plongements affines de  $G$ . À ce titre ils sont classifiés par la théorie de Luna-Vust.*

**3.4.2** — Soit maintenant  $X$  une  $\mathbf{G}$ -variété sphérique projective. Soit  $\mathbf{T}$  un tore maximal de  $\mathbf{G}$ . Alors,  $X$  ne contient qu'un nombre fini d'orbites de  $\mathbf{G}$  et donc qu'un nombre fini de points fixes de  $\mathbf{T}$ . Si de plus  $X$  est lisse, les résultats de Bialinicki-Birula donnent un moyen de calculer les nombres de Betti de  $X$  en partant des points fixes de  $\mathbf{T}$  (en particulier, la caractéristique d'Euler de  $X$  est le nombre de points fixes de  $\mathbf{T}$ ). Cette idée a été développée dans [BDCP90].

Si maintenant  $\mathbf{G} = G \times G$  et  $X$  est un plongement de  $G$ , tous les points fixes de  $\mathbf{T}$  appartiennent à des orbites fermées de  $\mathbf{G}$ . Ceci simplifie considérablement l'étude de [BDCP90] : il est par exemple montré que le polynôme de Poincaré du plongement canonique  $\overline{G}$  de  $G$  supposé semi-simple adjoint vaut :

$$P_t(\overline{G}) = \sum_{u, w \in W} t^{l(w)+l(u)+R(u)},$$

où  $l(\cdot)$  désigne la fonction longueur dans le groupe de Weyl  $W$  de  $G$  et  $R(u)$  est le nombre de réflexions simples  $s$  telles que  $l(us) < l(u)$ .

Le problème est maintenant de décrire les anneaux de cohomologie. Un outil pertinent pour cela est la cohomologie équivariante : on veut alors décrire  $H_{\mathbf{G}}^*(X)$  où  $X$  est une  $\mathbf{G}$ -variété sphérique lisse. Là encore, grâce au théorème de localisation en cohomologie équivariante les points fixes de  $\mathbf{T}$  dans  $X$  jouent un rôle central.

Dans le cas du plongement canonique de  $G$ , Littelmann et Procesi ont montré dans [LP90] l'isomorphisme :

$$H_{G \times G}^*(\overline{G}) \longrightarrow H_T^*(\overline{T})^W,$$

où  $\overline{T}$  est l'adhérence du maximal  $T$  de  $G$  et  $W$  son groupe de Weyl. De nombreux autres travaux sur la topologie des plongements de  $G$  ne se généralisent pas à toutes les variétés sphériques (voir [BJ07, Str06, Tch02]).

**3.4.3** — Comme nous le verrons dans la section 3.6, les adhérences d'orbites d'un sous-groupe sphérique  $H$  de  $G$  dans la variété  $G/B$  des drapeaux complets de  $G$  sont importantes. Dans le cas de  $G \times G/G$  ce sont les classiques et très riches variétés de Schubert.

**3.4.4** — Récemment, Lusztig a étudié l'action de  $G$  par conjugaison dans le plongement canonique du groupe (voir [Lus04, Spr07, Spr06]). Aucun équivalent pour l'action d'un sous-groupe sphérique  $H$  dans les plongements de  $G/H$  n'est connu.

### 3.5 Des quotients de compactifications du groupe

Motivé par les observations de la section précédente, dans [5], nous réalisons les plongements projectifs  $Y$  d'un espace homogène sphérique  $G/H$  comme quotient par  $H$  de plongements projectifs  $X$  de  $G$ . Nous commençons donc par définir une notion de quotient de  $G$ -variétés projectives par un sous-groupe sphérique non nécessairement réductif  $H$ . Ensuite, nous donnons une condition nécessaire et suffisante en termes de valuations  $G$ -invariantes pour que  $Y$  puisse s'obtenir comme un tel quotient. Finalement, nous montrons qu'une importante classe de plongements projectifs  $Y$  (c'est-à-dire si  $H$  est sobre,  $Y$  toroïdale et  $G/H$  relevable) peut s'obtenir comme quotient géométrique d'un ouvert d'un plongement projectif  $X$  de  $G$ .

Ce travail est appliqué pour obtenir des descriptions de sous-groupes d'isotropie dans  $G$  de points de  $Y$ .

Une autre application possible pourrait concerner la cohomologie équivariante de  $Y$ . En effet, si  $H$  est réductif et  $\Omega$  est l'ouvert de  $X$  construits dans [5], un résultat de Kirwan montre que la restriction  $H_{G \times H}^*(X) \rightarrow H_{G \times H}^*(\Omega) \simeq H_G^*(Y)$  est surjective...

### 3.6 Orbites d'un sous-groupe de Borel dans un espace homogène sphérique

Soit  $G$  un groupe algébrique complexe réductif et connexe,  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$ , et  $H$  un sous-groupe sphérique de  $G$ . D'après [Bri86], l'ensemble  $\mathbf{H}(G/B)$  des orbites de  $H$  dans  $G/B$  est fini.

Ces orbites et leurs adhérences jouent un rôle important en théorie des représentations (voir par exemple [Wol93, LV83a, Vog83]).

Décrivons une approche du problème de restriction décrit dans la section 2 faisant intervenir  $\mathbf{H}(G/B)$ . Soit  $\mathcal{L}_\lambda$  un fibré en droites  $G$ -linéarisé sur  $G/B$  et  $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) = V_\lambda$  le  $G$ -module irréductible associé. Soit  $Y$  l'adhérence d'une orbite de  $H$  dans  $G/B$ . L'étude du morphisme  $H$ -équivariant de restriction  $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{L}_\lambda)$  permet d'obtenir des résultats sur le  $H$ -module  $V_\lambda$ . Cette approche a été utilisé par exemple dans [Man97] ou

[BH00] et constitue une motivation pour l'étude de  $\mathbf{H}(G/B)$ .

Par ailleurs, les classes des adhérences d'orbites de  $B$  dans les  $G$ -variétés sphériques sont des générateurs naturels de la cohomologie de ces variétés, supposées lisses et complètes. Il est donc intéressant de comprendre l'ensemble  $\mathbf{B}(G/H)$  des orbites de  $B$  dans  $G/H$ . Ce dernier est en bijection naturelle avec  $\mathbf{H}(G/B)$ .

Dans [RS90], [Kno95] et [Bri01], on construit un graphe orienté  $\Gamma(G/H)$  dont les sommets sont les éléments de  $\mathbf{B}(G/H)$  et dont les arêtes, qui peuvent être simples ou doubles, sont étiquetées par les racines simples de  $G$ . Des travaux de M. Brion ont montré que ce graphe  $\Gamma(G/H)$  apporte des informations sur la lissité, la normalité, la classe de cohomologie des adhérences d'orbites de  $H$  dans  $G/B$  (voir [Bri98a, Bri01, Bri03]). Comprendre les interactions entre les propriétés combinatoires, géométriques et topologiques de l'ensemble  $\mathbf{H}(G/B)$  est un sujet vaste auquel j'ai pu contribuer.

Les adhérences d'orbites de  $B$  dans les plongements de  $G/H$  ont été étudiées notamment par M. Brion dans [Bri01]. Nous étudions dans [6] ce qu'il advient lorsqu'on relève à  $G$  et à ces plongements cette étude. Remarquons que dans le cas symétrique, le même type d'idée est utilisée par T.A. Springer dans [Spr04].

Considérons un plongement  $G \times G$ -équivariant  $X$  de  $G$ . Dans [5] nous avons été amené à étudier les diviseurs  $B \times H$ -stables de  $X$ . Dans [6], nous nous intéressons à toutes les adhérences d'orbites de  $B \times H$  dans  $X$ . Nous savons que  $B \times H$  n'a qu'un nombre fini d'orbites dans  $G$ ; nous montrons qu'il n'en a qu'un nombre fini dans  $X$ . Soit  $\overline{V}$  l'adhérence dans  $X$  d'une orbite de  $B \times H$  dans  $G$  et  $\overline{O}$  l'adhérence d'une orbite de  $G \times G$  dans  $X$ . Si  $X$  est toroïdal, nous montrons que l'intersection  $\overline{V} \cap \overline{O}$  est propre dans  $X$  et la décrivons ensemblistement. Si de plus  $X$  est lisse, nous calculons les multiplicités d'intersections qui sont des puissances de 2. Enfin, si  $X$  est toroïdal, lisse et complet, nous exprimons la classe de cohomologie de  $\overline{V}$  comme une combinaison linéaire des classes d'adhérence dans  $X$  d'orbites de  $B \times B$  dans  $G$ . Nous utilisons la cohomologie  $B$ -équivariante pour montrer ce dernier résultat.

Le paramétrage des orbites de  $B \times H$  dans  $X$  et la description ensembliste de leurs adhérences a simultanément été obtenu par T. A. Springer dans [Spr02] dans le cas où  $H = B$ . Le travail [6] s'inspire de celui de M. Brion (voir [Bri01]) sur les adhérences d'orbites de  $B$  dans les plongements de  $G/H$ . Nous renvoyons à l'introduction de notre article pour une compa-

raison plus précise. Nous insistons simplement ici sur le fait que la géométrie des adhérences d'orbites de  $B \times H$  dans les plongements de  $G$  est plus simple que celle des adhérences d'orbites de  $B$  dans les plongements de  $G/H$ . Ainsi, l'approche qui consiste à « relever à  $G$  l'étude de  $G/H$  » est fructueuse ici. Elle nous a permis de répondre par un exemple à une question de [Bri01].

Dans [Spr02], T. A. Springer décrit la cohomologie d'intersection des adhérences d'orbites de  $B \times B$  dans des compactifications du groupe. Ces résultats devraient pouvoir se généraliser aux adhérences d'orbites de  $B \times H$  du moins lorsque  $G/H$  est de rang minimal (voir la section 3.7).

Concernant la combinatoire de  $\mathbf{H}(G/B)$ , le résultat le plus profond est sans doute la définition d'une action du groupe de Weyl  $W$  de  $G$  sur  $\mathbf{H}(G/B)$  due à F. Knop (voir [Kno95]). Dans [7], nous définissons un invariant qui sépare les orbites de  $W$  dans  $\mathbf{H}(G/B)$ .

### 3.7 Espaces homogènes sphériques de rang minimal

Soit  $G$  un groupe réductif connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle  $k$ . Posons  $\mathbf{G} = G \times G$  et notons  $\mathbf{H}$  la diagonale de  $\mathbf{G}$ . Soit  $B$  un sous-groupe de Borel de  $G$ ,  $T$  un tore maximal de  $B$  et  $W$  le groupe de Weyl de  $T$ . Posons  $\mathbf{B} = B \times B$ ,  $\mathbf{T} = T \times T$  et  $\mathbf{W} = W \times W$ . Le  $\mathbf{G}$ -espace homogène  $\mathbf{G}/\mathbf{H} = G$  a les propriétés suivantes :

1. Le groupe  $\mathbf{W}$  agit transitivement sur l'ensemble des orbites de  $\mathbf{H}$  sur  $\mathbf{G}/\mathbf{B}$  pour l'action de Knop.
2. Pour tout plongement toroïdal  $X$  de  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  et tout point fixe  $x$  de  $\mathbf{T}$  dans  $X$ , l'orbite  $\mathbf{G}.x$  est complète.

La propriété 1 est très utile pour paramétrer  $\mathbf{H}(\mathbf{G}/\mathbf{B})$ . Nous avons déjà vu que la propriété 2 a des conséquences importantes sur la cohomologie de  $X$ .

Ces propriétés de l'espace homogène sphérique  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  tiennent au fait qu'il est de rang minimal. On appelle rang d'un espace homogène sphérique quelconque  $G/H$  le rang du groupe  $k(G/H)^{(B)}/k^*$ . Ce rang est toujours supérieur à la différence des rangs de  $G$  et  $H$  ; pour  $\mathbf{G}/\mathbf{H}$  on a égalité. Plus généralement un espace homogène sphérique  $G/H$  dont le rang est égal à la différence des rangs de  $G$  et  $H$  est dit de *rang minimal*. En fait, il est montré dans [8] que  $G/H$  est de rang minimal si et seulement si la propriété 1 est vérifiée, ce qui est encore équivalent à la propriété 2.

La notion d'espace homogène sphérique ou symétrique de rang minimal a été mise en exergue dans [Bri04]. Les propriétés topologiques des plongements d'espaces homogènes sphériques ont été étudiées dans [Tch05, BJ06].

Dans [8], on montre que l'isotropie pour l'action de  $W$  sur  $\mathbf{H}(G/B)$  est isomorphe au groupe de Weyl de  $H$  : ce résultat fournit un paramétrage naturel des éléments de  $\mathbf{H}(G/B)$ . On décrit aussi ensemblistement les adhérences des orbites de  $H$  dans  $G/B$ . Par ailleurs, un résultat de M. Brion montre que ces adhérences sont normales. Ainsi, les premières propriétés des variétés de Schubert sont encore vérifiées ici.

On montre aussi le résultat de classification suivant :

**Théorème 13** *Tout espace homogène sphérique de rang minimal s'obtient par produit, recouvrement fini et induction parabolique à partir des exemples suivants :*

1.  $G = H$ ,  $G/H$  est un point.
2.  $G$  est un tore.
3.  $H$  est simple diagonalement plongé dans  $G = H \times H$ .
4.  $\mathrm{PSL}_{2n}/\mathrm{PSp}_{2n}$  (pour  $n \geq 2$ ), l'espace des formes bilinéaires alternées et non dégénérées.
5.  $\mathrm{SO}_{2n}/\mathrm{SO}_{2n-1}$ , les complexifiés des sphères impaires.
6.  $\mathrm{SO}_7/\mathrm{G}_2$ .
7.  $E_6/F_4$ .



## 4 Déterminant et Permanent

L'article [9] en collaboration avec Thierry Mignon concerne la complexité déterminantale du Permanent. La question est issue de la théorie de la complexité au sens de Valiant. Ma curiosité pour ces questions a été excitée par un travail de Mulmuley et Sohoni (voir [MS01]) qui relie cette théorie à la TGI. Dans ce texte, nous tentons d'introduire la complexité au sens de Valiant et d'expliquer l'approche de Mulmuley et Sohoni. Nous exposerons ensuite nos résultats qui malheureusement n'utilisent pas la TGI.

### 4.1 Théorie de Cook

La question centrale de la complexité algorithmique est la suivante :

Combien de temps faut-il pour résoudre tel ou tel  
problème de manière algorithmique ? (1)

Citons à titre d'exemple le « problème du sac à dos ». On se donne  $n$  objets ayant chacun un poids  $p_i$  et une valeur  $v_i$ . On se donne aussi une capacité  $W$  et un objectif  $V$ . La question est alors de trouver un ensemble  $I$  d'objets tels que  $\sum_{i \in I} p_i \leq W$  et  $\sum_{i \in I} v_i \geq V$ .

La question (1) demande évidemment à être formalisée. Le modèle le plus utilisé est celui des machines de Turing. Dans ce modèle, les réponses du type « il faut au moins tant de temps à une machine de Turing pour résoudre tel problème » sont rares. En effet, il est difficile de trouver des obstructions à l'existence d'un algorithme rapide. Ainsi, pour dire qu'un problème est difficile, on montre souvent qu'il est aussi difficile qu'un autre dont la réputation est faite. C'est ainsi que les problèmes sont comparés entre eux et regroupés en classe de complexité.

La classe de complexité la plus importante est la classe NP : ce sont les problèmes pour lesquels on peut tester les candidats en temps polynomial. Le problème du sac à dos est NP puisque tester si un ensemble  $I$  convient se fait en temps linéaire par rapport à  $n$ . En revanche, les algorithmes connus pour résoudre ce problème ne sont pas significativement meilleurs que le plus stupide d'entre eux : on teste les parties  $I$  les unes après les autres. La complexité de cet algorithme est de l'ordre de  $2^n$ .

Le théorème le plus remarquable de la théorie de la complexité a été obtenu par Alan Cook en 1971 :

**Théorème 14 (Cook, 1971)** *Tout problème NP se ramène en temps polynomial au problème du sac à dos.*

Le graal de ce domaine est de décider si tout problème NP peut-être résolu en temps polynomial ou pas. Le théorème de Cook dit qu'il suffit de répondre à cette question pour le problème du sac à dos ; ce problème est donc « universel » dans la classe NP, on dit qu'il est *NP-complet*. Notons que pléthore de problèmes concrets sont NP-complets.

## 4.2 Théorie de Valiant

Tel que je l'ai compris, l'idée de Valiant est de donner un modèle pour la question (1) dans lequel il serait plus facile de trouver des obstructions à l'existence d'algorithmes rapides. Il propose ainsi un modèle dans le monde algébrique plus riche en structures, mais en contrepartie plus éloigné de ce qu'est un ordinateur.

On choisit un corps  $k$ . Dans la théorie de Valiant (voir [Val79a]), un *problème* est un polynôme  $P$  (ou une suite de polynômes). Un *algorithme* qui résout  $P$  est une formule  $\mathcal{F}$  qui calcule  $P$  à partir des variables et des éléments de  $k$  en utilisant des additions (+) et des multiplications (\*). Le *temps* mis par  $\mathcal{F}$  pour calculer  $P$  appelé longueur de  $\mathcal{F}$  est le nombre de signes + et \* que contient  $\mathcal{F}$ . On s'intéresse alors à la complexité  $c(P)$  de  $P$  c'est-à-dire à la longueur minimale des formules calculant  $P$ . Ainsi,  $c(x + y) = 1$ ,  $c(x^8) = 7$ ,  $c(xz + xy) = 2 = c(x * (y + z)) \dots$

Dans ce contexte Valiant a défini un analogue de la classe NP : la classe VNP pour les suites de polynômes. La suite

$$\text{Perm}_n = \sum_{\sigma \in S_n} x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)},$$

de polynômes de degré  $n$  en les  $n^2$  variables  $(x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  est dans VNP. L. G. Valiant montre dans [Val79b] l'équivalent suivant du théorème de Cook :

**Théorème 15 (Valiant)** *La suite  $(\text{Perm}_n)$  est VNP-complète.*

Dès lors, il conjecture l'équivalent de  $\text{NP} \neq \text{P}$  :  $c(\text{Perm}_n)$  n'est majoré par aucun polynôme en  $n$ .

Pour minorer  $c(P)$ , Valiant propose ensuite une approche plus géométrique via le déterminant en montrant dans [Val82] le :

**Théorème 16** *Tout polynôme  $P$  peut s'écrire comme un déterminant de formes affines de taille inférieure à  $2c(P)$ .*

On appelle alors *complexité déterminantale* de  $P$  et on note  $cd(P)$  la taille minimale d'une matrice de formes affines dont le déterminant vaut  $P$ . Le théorème de Valiant ci-dessus affirme que  $cd(P) \leq 2c(P)$ .

### 4.3 Lien avec la TGI

Mulmuley et Sohoni ont suggéré dans [MS01] que la TGI pourrait permettre de trouver des bornes inférieures pour les complexités déterminantales. Expliquons brièvement leur remarque qui est à l'origine de mon intérêt pour le sujet. Une référence est le cours de Lackshmibai [Lak05] ou le livre à venir de J.M. Landsberg et J. Morton [LM08].

Soit  $P$  un polynôme homogène de degré  $d$  en  $r$  variables qui est égal au déterminant d'une matrice  $M$  de formes affines et de taille  $n$ . Soit  $t$  une nouvelle indéterminée et  $\tilde{M}$  la matrice obtenue à partir de  $M$  en homogénéisant chaque coefficient avec  $t$ . Sans perdre de généralité, on peut supposer que  $\tilde{M} : k^{r+1} \rightarrow M_n(k)$  est injective. Notons  $W$  l'image de  $\tilde{M}$ ; alors,  $t^{n-d}P$  est isomorphe à la restriction du déterminant à  $W$ . Soit  $S$  un supplémentaire de  $W$  et posons  $p_\varepsilon : S \oplus W \rightarrow M_n(k), s + w \mapsto \varepsilon s + w$ . Posons  $\tilde{P} = \mathcal{D}et \circ p_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{D}et \circ p_\varepsilon$ . Alors,  $\tilde{P} \in \overline{\text{GL}_{n^2}(k) \cdot \mathcal{D}et}$ .

Dès lors, il est naturel de chercher des obstructions à ce que  $\tilde{P}$  soit dans l'adhérence de l'orbite de  $\mathcal{D}et$ . Jusqu'à présent Mulmuley et Sohoni n'ont cependant pas obtenu de bornes par cette méthode. Cette approche pose néanmoins des questions intéressantes telles que la description de  $k[\overline{\text{GL}_{n^2}(k) \cdot \mathcal{D}et}]$  comme  $\text{GL}_{n^2}(k)$ -module.

### 4.4 Complexité déterminantale du Permanent

Dans l'article [9] en collaboration avec Thierry Mignon nous obtenons quelques résultats sur la complexité déterminantale des polynômes homogènes. Il est bien connu que toute courbe plane  $P$  est déterminantale c'est-à-dire sa complexité déterminantale égale son degré. Nous déterminons la complexité déterminantale des formes quadratiques :

**Théorème 17** *Supposons que le corps  $k$  est algébriquement clos. Soit  $q$  un polynôme homogène de degré 2 qui définit une forme quadratique de rang  $r$ . Alors,*

$$cd(q) = \begin{cases} 2 & \text{si } r \leq 4, \\ \lceil \frac{r+1}{2} \rceil & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $[x]$  désigne l'unique entier tel que  $[x] - 1 < x \leq [x]$ .

La majoration de  $\text{cd}(q)$  dans le théorème précédent s'obtient grâce au calcul suivant :

$$x_1y_1 + \cdots + x_ky_k = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_k & & & 1 \end{vmatrix}.$$

En 1913, Polya (voir [Pol13]) demandait déjà si le permanent peut être écrit comme un déterminant. Marcus et Minc ont montré en 1961 (voir [MM61]) que  $\text{cd}(\text{Perm}_n) > n$ . Plus récemment, suivant von zur Gathen [vzG87], Cai a montré dans [Cai90b] que  $\text{cd}(\text{Perm}_n) \geq \sqrt{2}n$ . Le principal résultat de [9] est une borne quadratique pour  $\text{cd}(\text{Perm}_n)$  :

**Théorème 18** *On suppose que la caractéristique de  $k$  est nulle. On a :  $\text{cd}(\text{Perm}_n) \geq n^2/2$ .*

Une remarque clé dans la preuve du théorème 18 est la suivante : toute matrice  $M$  de déterminant nul est incluse dans un sous-espace vectoriel de  $M_n(k)$  de dimension  $n^2 - n$  inclus dans  $\mathcal{D}et(\cdot) = 0$ . En conséquence, le rang de la seconde forme fondamentale de  $\mathcal{D}et$  en  $M$  (ou plus simplement de sa dérivée seconde) est petit (inférieur ou égal à  $2n$ ). Ainsi, la dérivée seconde de la restriction de  $\mathcal{D}et$  à un sous-espace de codimension inférieure  $2n$  est dégénérée.

Il serait intéressant d'étudier la sous-variété de la grassmannienne  $\text{Gr}(n^2 - n, M_n(k))$  des sous-espaces inclus dans  $\mathcal{D}et(\cdot) = 0$ .

Le premier cas non connu en petit degré et petit nombre de variables est celui des surfaces cubiques. Dans [BL98], Brundu et Logan montre que toute surface cubique est déterminantale exceptée celle (il n'y en a qu'une modulo  $\text{GL}_4$ ) qui contient une unique droite. Une équation pour cette cubique est  $z^3 + xt^2 + x^2y$ . La formule suivante

$$z^3 + xt^2 + x^2y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y & 0 & 0 \\ x & t & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{vmatrix}.$$

montre que  $\text{cd}(z^3 + xt^2 + x^2y) = 4$  ou  $5$ . Nous ne savons si elle vaut  $4$  ou  $5$  ! Cet exemple montre que la complexité déterminantale n'est pas semicontinue. Il montre aussi qu'il n'est pas facile de calculer la complexité déterminantale même sur des petits exemples.

## 5 Schéma de Hilbert Invariant

Soit  $G$  un groupe réductif complexe et  $V$  un  $G$ -module de dimension finie. Soit  $\Lambda^+$  l'ensemble des représentations irréductibles de  $G$ . Soit  $X$  un sous-schéma affine  $G$ -stable de  $V$ . Pour  $\lambda \in \Lambda^+$ , on note  $m_\lambda$  la multiplicité de  $\lambda$  dans l'algèbre  $\mathbb{C}[X]$ . La fonction  $h : \lambda \in \Lambda^+ \mapsto m_\lambda \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est appelé fonction de Hilbert de  $X$ . Elle joue le rôle du polynôme de Hilbert dans les schémas de Hilbert classiques.

Fixons une fonction finie  $h : \Lambda^+ \rightarrow \mathbb{N}$ . Dans [AB05], Alexeev et Brion construisent un schéma quasi-projectif qui paramètre les sous-schémas fermés  $G$ -stables de  $V$  dont la fonction de Hilbert vaut  $h$ . On appelle ce schéma la *schéma de Hilbert invariant* et on le note  $\text{Hilb}_h^G(V)$ .

La construction d'Alexeev-Brion est assez indirecte et peu d'exemples de schémas de Hilbert invariants sont bien compris. S. Jansou a décrit les plus petits d'entre eux, c'est-à-dire ceux paramétrant les déformations des cônes de vecteurs primitifs d'un  $G$ -module irréductible. Les schémas ainsi obtenus sont des points réduits sauf dans un nombre fini de cas explicites où ce sont des droites affines. D'autres exemples proches ont été calculés par Paolo Bravi et Stéphanie Cupit-Foutou. Une des motivations de mon travail en collaboration avec Sébastien Jansou sur ce thème est de comprendre de nouveaux exemples.

Il est naturel d'utiliser les schémas de Hilbert invariants pour construire des espaces d'orbites. En effet, si  $\mathcal{O}$  est une orbite de  $G$  dans  $V$ , l'adhérence  $\overline{\mathcal{O}}$  de  $\mathcal{O}$  dans  $V$  est un sous-schéma fermé  $G$ -stable à multiplicités finies de  $V$ . L'idée est donc de considérer l'application  $x \in V \mapsto \overline{G.x} \in \text{Hilb}^G(V)$ . Dans [10], nous étudions cette application lorsque  $V = \mathfrak{g}$  est la représentation adjointe d'un groupe semi-simple  $G$  et plus particulièrement lorsque  $G = \text{SL}_n$ .

La première étape consiste à montrer que si  $\mathcal{N}$  est une nappe de  $\mathfrak{g}$ , toutes les fonctions de Hilbert des  $\overline{G.x}$  pour  $x \in \mathcal{N}$  sont égales ; notons  $h_{\mathcal{N}}$  cette fonction. On a alors une application (qui n'est pas à priori un morphisme)

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{N} &\longrightarrow \text{Hilb}_{h_{\mathcal{N}}}^G(\mathfrak{g}) \\ x &\longmapsto \overline{G.x}. \end{aligned}$$

Lorsque  $\mathcal{N}$  est la nappe ouverte, on montre que  $\text{Hilb}_{h_{\mathcal{N}}}^G(\mathfrak{g})$  est isomorphe au TGI-quotient  $\mathfrak{g} // G$  et que  $\pi$  est la restriction du TGI-morphisme.

Dans le cas du groupe spécial linéaire, nous montrons le :

**Théorème 19** *Soit  $\mathcal{N}$  une nappe de  $\mathfrak{sl}_n$ . L'image du morphisme  $\pi$  ci-dessus est une composante connexe de  $\text{Hilb}_{h,\mathcal{N}}^{\text{SL}_n}(\mathfrak{sl}_n)$  isomorphe à un espace affine. De plus, l'application  $\pi$  est un morphisme et un quotient géométrique.*

La seconde partie du théorème est liée à une construction de Katsylo qui a montré qu'un quotient géométrique de  $\mathcal{N}$  existait. Nous montrons donc ici que le schéma de Hilbert invariant donne une nouvelle interprétation du quotient de Katsylo. Nos résultats montrent aussi que pour  $\text{SL}_n$  ce quotient est un espace affine.

La démonstration repose sur les équations de Tanisaki-Weyman ([Wey89, Tan82]) qui engendrent l'idéal des fonctions qui s'annulent sur une orbite nilpotente de  $\mathfrak{sl}_n$ . Cet ingrédient explique que notre théorème n'est démontré que pour  $\mathfrak{sl}_n$ .

Le travail présenté dans cette section est exploratoire et laisse beaucoup de questions. Par exemple, la construction de Katsylo est valable pour toute algèbre de Lie semi-simple. Qu'en est-il de la nôtre ? La théorie des nappes est aussi développée dans le cadre symétrique. Y a-t-il un équivalent du théorème de Katsylo dans ce cas ? Le premier exemple à regarder dans ce cadre symétrique est sans doute celui du groupe  $\text{SO}_n$  agissant par conjugaison sur les matrices symétriques. En effet, celui-ci est très proche de la représentation adjointe de  $\text{SL}_n$ .

## 6 Autres travaux

Au grès de mes lectures et rencontres, il m'est arrivé de travailler plus ponctuellement sur des sujets. Ainsi, les trois publications [Res05b, PR06, MR07] sont indépendantes.

**6.1** — Soit  $W$  le groupe symétrique agissant sur un ensemble à  $n$  éléments. Comme pour tous les groupes finis, les représentations irréductibles de  $W$  sont en bijection avec les classes de conjugaison de  $W$  c'est-à-dire les partitions de  $n$ .

D'un autre coté, la décomposition de Jordan montre que les orbites nilpotentes de  $\mathfrak{sl}_n$  sont en bijection avec les partitions de  $n$ .

Cette bijection entre les représentations irréductibles de  $W$  et les orbites nilpotentes de  $\mathfrak{sl}_n$  est resté inexplicée jusqu'aux travaux de T.A. Springer dans les années 1970. Soit  $A$  une matrice nilpotente de  $\mathfrak{sl}_n$ , on note  $\mathcal{B}_A$  l'ensemble des sous-groupes de Borel de  $SL_n$  dont l'algèbre de Lie contient  $A$ . Dans [Spr76], T.A. Springer définit une action de  $W$  sur le groupe de cohomologie de degré maximal de  $\mathcal{B}_A$  expliquant ainsi la bijection précédente.

Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{Fl}(V)$  la variété des drapeaux complets de  $V$ . De manière explicite, on a :

$$\mathcal{B}_A = \{(V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n) \in \mathcal{Fl}(V) : A(V_i) \subset V_{i-1}\}.$$

Malgré cette description élémentaire et son importance la géométrie de  $\mathcal{B}_A$  est encore mal comprise. N. Spaltenstein a montré dans [Spa77] que  $\mathcal{B}_A$  est la réunion disjointe de sous-variétés lisses localement fermées ; ces sous-variétés qui sont paramétrés par les tableaux standards dont la forme est le type de Jordan de  $A$  sont toutes de même dimension. En particulier, les composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_A$  ont toutes la même dimension et sont en bijection avec les tableaux standards.

Dès lors plusieurs questions naturelles se posent : quelles sont les composantes lisse ? quelles composantes se rencontrent et en quelle codimension ? ... Dans [12], avec Jean Pagnon nous obtenons de modestes éléments de réponses.

D'abord nous fixons un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$  bien choisi (par rapport à  $A$ ) : ces orbites donnent une décomposition de  $\mathcal{Fl}(V)$  en cellules de Schubert. Étant donné une composante irréductible  $\mathcal{B}_A^\sigma$  de  $\mathcal{B}_A$ , nous explicitons la cellule de Schubert  $C_w$  qui rencontre  $\mathcal{B}_A^\sigma$  de manière dense ; nous montrons que l'intersection  $C_w \cap \mathcal{B}_A^\sigma$  est lisse.

Ensuite nous regardons la position relative des composantes irréductibles de  $\mathcal{B}_A$  et des fibrations en  $\mathbb{P}^1$  de  $G/B$  sur les  $G/P_\alpha$  (c'est-à-dire les morphismes oubliés d'un sous-espace). Ceci nous donne un critère facile (mais peu efficace) pour que deux composantes s'intersectent en codimension un. Nous montrons aussi la lissité de certaines composantes.

**6.2** — Dans [CD04], E. Cattani and A. Dickenstein tombent sur le joli problème élémentaire suivant. On se donne un nombre impair de vecteurs deux à deux non colinéaires dans le plan vectoriel réel  $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_{2n+1}\}$ . Soit  $i_0 \in \{1, \dots, 2n+1\}$ . La droite engendré par  $v_{i_0}$  découpe le plan en deux demi-espaces et donc partitionne les  $\{v_j\}_{j \neq i_0}$  en deux parties  $I^+$  et  $I^-$ . On regarde les aires des triangles  $(v_{i_0}, v_j)$  pour  $j \in I^+$  et  $j \in I^-$ . Si ces deux ensembles d'aires sont égaux (comptées avec multiplicité) on dit que  $i_0$  coupe  $\mathcal{C}$  de manière équilibrée. Si tout  $i_0$  coupe  $\mathcal{C}$  de manière équilibrée on dit que  $\mathcal{C}$  est équilibré. Les sommets d'un polygone régulier à  $2n+1$  cotés de  $\mathbb{R}^2$  forment un ensemble équilibré. Nous montrons dans [13] que les polygones réguliers sont les seules configurations équilibrées modulo  $GL_2(\mathbb{R})$ . Ceci était conjecturé dans une version préliminaire de [CD04]. Dans cette version ils disaient avoir vérifié à l'aide d'un ordinateur le cas de 5 vecteurs. La démonstration bien que très élémentaire fût amusante à trouver.

**6.3** — Un polytope convexe d'un espace euclidien est régulier si son groupe d'isométries agit transitivement sur l'ensemble de ses drapeaux. Depuis Schläfli (1901), on sait classifier ces polytopes réguliers. En dimension trois ce sont les 5 polytopes platoniciens. Si on suppose que le polytope est à sommets entiers, ou plus généralement sur un réseau, on peut définir les polytopes réguliers relativement au groupe préservant ce réseau (les polytopes  $\mathbb{Z}$ -réguliers). Récemment Karpenkov a donné une classification de ces polytopes  $\mathbb{Z}$ -réguliers.

Soit  $\mathcal{P}$  est un polytope  $\mathbb{Z}$ -régulier de  $\mathbb{Z}^n$  de groupe  $G$ . Comme  $G$  est fini, il existe un produit scalaire  $G$ -invariant sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour ce dernier  $\mathcal{P}$  est régulier. Partant de cette observation, Karpenkov passe en revue tous les polytopes euclidien-réguliers et identifie ceux qui ont un « modèle » à sommets entiers.

Sur les dessins de Karpenkov (voir [Kar06]), il me semblait voir des systèmes de racines. Dans [11] avec Pierre-Louis Montagard, nous montrons que l'ensemble des vecteurs primitifs parallèles aux arêtes d'un polytope  $\mathbb{Z}$ -régulier forment un système de racines. Partant de cette remarque, nous retrouvons de manière simple et rapide la classification de Karpenkov, en utilisant uniquement la classification des systèmes de racines simplement la-



cés.

Si  $\mathcal{P}$  est un polytope euclidien-régulier, notre construction associe un ensemble de vecteurs unitaires qui vérifient tous les axiomes d'un système de racine excepté celui concernant les réseaux ( $\beta - s_\alpha(\beta) \in \mathbb{Z}\alpha$ ). Ces « systèmes de racines » sont classifiés (voir [Hum90]). Notre méthode devrait donc permettre de retrouver la classification de Schläfli.

## Références

- [AB05] V. ALEXEEV & M. BRION – « Moduli of affine schemes with reductive group action », *J. Algebraic Geom.* **14** (2005), no. 1, p. 83–117.
- [AW98] S. AGNIHOTRI & C. WOODWARD – « Eigenvalues of products of unitary matrices and quantum Schubert calculus », *Math. Res. Lett.* **5** (1998), no. 6, p. 817–836.
- [BD90] E. BIFET, C. DE CONCINI & C. PROCESI – « Cohomology of regular embeddings », *Adv. Math.* **82** (1990), no. 1, p. 1–34.
- [Bel03a] P. BELKALE – « Irredundance in eigenvalue problems », *Preprint* (2003), no. arXiv :math/0308026v1, p. 1–35.
- [Bel03b] — , « Quantum generalization of horn and saturation conjectures », *Preprint* (2003), no. math.AG/0303013, p. 1–51.
- [BH00] M. BRION & A. HELMINCK – « On orbit closures of symmetric subgroups in flag varieties », *Canad. J. Math.* **52** (2000), no. 2, p. 265–292.
- [BJ06] M. BRION & R. JOSHUA – « Equivariant cohomology and chern classes of symmetric varieties of minimal rank », *Preprint* (2006), no. www.math.ohio-state.edu/~joshua/ec.pdf, p. 1–20.
- [BJ07] — , « Equivariant chow ring and chern classes of wonderful symmetric varieties of minimal rank », *Preprint* (2007), no. arXiv :0705.1035, p. 1–21.
- [BK06] P. BELKALE & S. KUMAR – « Eigenvalue problem and a new product in cohomology of flag varieties », *Invent. Math.* **166** (2006), no. 1, p. 185–228.
- [BL98] M. BRUNDU & A. LOGAR – « Parametrization of the orbits of cubic surfaces », *Transform. Groups* **3** (1998), no. 3, p. 209–239.
- [BP90] M. BRION & C. PROCESI – « Action d’un tore dans une variété projective », in *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory* (A. J. A. Connes, M. Duflo & R. Rentschler, éd.), Birkhäuser, 1990, p. 509–539.
- [Bri86] M. BRION – « Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques », *Manuscripta Math.* **55** (1986), no. 2, p. 191–198.
- [Bri87] M. BRION – « Sur l’image de l’application moment », in *Séminaire d’algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin (Pa-*

- ris, 1986*), Lecture Notes in Math., vol. 1296, Springer, Berlin, 1987, p. 177–192.
- [Bri90] — , « Vers une généralisation des espaces symétriques », *J. Algebra* **134** (1990), no. 1, p. 115–143.
- [Bri98a] — , « The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition », *Comment. Math. Helv.* **73** (1998), no. 1, p. 137–174.
- [Bri99] M. BRION – « On the general faces of the moment polytope », *Internat. Math. Res. Notices* (1999), no. 4, p. 185–201.
- [Bri01] — , « On orbit closures of spherical subgroups in flag varieties », *Comment. Math. Helv.* **76** (2001), no. 2, p. 263–299.
- [Bri03] M. BRION – « Multiplicity-free subvarieties of flag varieties », in *Commutative algebra (Grenoble/Lyon, 2001)*, Contemp. Math., vol. 331, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, p. 13–23.
- [Bri04] — , « Construction of equivariant vector bundles », *Preprint* (2004), no. arXiv :math/0410039, p. 1–21.
- [BS00a] A. BERENSTEIN & R. SJAMAAR – « Coadjoint orbits, moment polytopes, and the Hilbert-Mumford criterion », *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), no. 2, p. 433–466 (electronic).
- [Cai90b] — , « A note on the determinant and permanent problem », *Inform. and Comput.* **84** (1990), no. 1, p. 119–127.
- [CD04] E. CATTANI & A. DICKENSTEIN – « Planar configurations of lattice vectors and GKZ-rational toric fourfolds in  $\mathbb{P}^6$  », *Journal of Algebraic Combinatorics* **19** (2004), no. 1, p. 47–65.
- [DCP83] C. DE CONCINI & C. PROCESI – « Complete symmetric varieties », in *Invariant theory (Montecatini, 1982)*, Springer, Berlin, 1983, p. 1–44.
- [DCP85] — , « Complete symmetric varieties. II. Intersection theory », in *Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983)*, North-Holland, Amsterdam, 1985, p. 481–513.
- [DH98] I. V. DOLGACHEV & Y. HU – « Variation of geometric invariant theory quotients », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **87** (1998), p. 5–56, With an appendix by Nicolas Ressayre.
- [É92] A. G. ÉLASHVILI – « Invariant algebras », in *Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory*, Adv. Soviet Math., vol. 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, p. 57–64.

- [Ful93] W. FULTON – *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993, The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [Ful00] W. FULTON – « Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **37** (2000), no. 3, p. 209–249 (electronic).
- [GS82] V. GUILLEMIN & S. STERNBERG – « Convexity properties of the moment mapping », *Invent. Math.* **67** (1982), no. 3, p. 491–513.
- [Hum90] J. E. HUMPHREYS – *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [Kar06] O. KARPENKOV – « Classification of lattice-regular lattice convex polytopes », *Functional Analysis and Other Mathematics* **1** (2006), no. 1, p. 31–54, math.CO/0602193.
- [KKM06] M. KAPOVICH, S. KUMAR & J. MILLSON – « Saturation and irredundancy for  $\text{spin}(8)$  », *Preprint* <http://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/eprints.html> (2006), p. 1–28.
- [Kle80] —, « Chasles’s enumerative theory of conics : a historical introduction », in *Studies in algebraic geometry*, Math. Assoc. America, Washington, D.C., 1980, p. 117–138.
- [Kly98] A. A. KLYACHKO – « Stable bundles, representation theory and Hermitian operators », *Selecta Math. (N.S.)* **4** (1998), no. 3, p. 419–445.
- [Kno91] F. KNOP – « The Luna-Vust theory of spherical embeddings », in *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989)* (Madras), Manoj Prakashan, 1991, p. 225–249.
- [Kno95] —, « On the set of orbits for a Borel subgroup », *Comment. Math. Helv.* **70** (1995), no. 2, p. 285–309.
- [KTW04] A. KNUTSON, T. TAO & C. WOODWARD – « The honeycomb model of  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  tensor products. II. Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone », *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), no. 1, p. 19–48 (electronic).
- [Lak05] P. LAKSHMIBAI – « Connecting invariant theory and np-complete problems. »,

<http://www.math.washington.edu/~combinat/abstracts/summer05/lakshmibai.htm>  
(2005), p. 1–40.

- [LM08] J. LANDSBERG & M. MORTON – *Computational complexity and algebraic statistics via geometry and representation theory*, En préparation, 2008.
- [LP90] P. LITTELMANN & C. PROCESI – « Equivariant cohomology of wonderful compactifications », in *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989)*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 219–262.
- [Lun96] — , « Toute variété magnifique est sphérique », *Transform. Groups* **1** (1996), no. 3, p. 249–258.
- [Lus04] G. LUSZTIG – « Parabolic character sheaves. II », *Mosc. Math. J.* **4** (2004), no. 4, p. 869–896, 981.
- [LV83a] D. LUNA & T. VUST – « Plongements d’espaces homogènes », *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), no. 2, p. 186–245.
- [Man97] L. MANIVEL – « Applications de Gauss et pléthysme », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **47** (1997), no. 3, p. 715–773.
- [MM61] M. MARCUS & H. MINC – « On the relation between the determinant and the permanent », *Illinois J. Math.* **5** (1961), p. 376–381.
- [MO79] A. W. MARSHALL & I. OLKIN – *Inequalities : theory of majorization and its applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 143, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1979.
- [MR07] P.-L. MONTAGARD & N. RESSAYRE – « Lattice polytopes and root systems », *soumis*, <http://www.math.univ-montp2.fr/~ressayre/pubs.html> (2007), p. 1–11.
- [MS01] K. D. MULMULEY & M. SOHONI – « Geometric complexity theory. I. An approach to the P vs. NP and related problems », *SIAM J. Comput.* **31** (2001), no. 2, p. 496–526 (electronic).
- [Oda88] T. ODA – *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988, An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.
- [Pas08] B. PASQUIER – « Variétés horosphériques de fao », *Bull. SMF* **To appear** (2008), p. 1–39.

- [Pol13] G. POLYA – « Aufgabe 424 », *Archiv der Mathematik und Physik (3)* **20** (1913), p. 271.
- [Pop07] V. L. POPOV – « Tensor product decompositions and open orbits in multiple flag varieties », *J. of Algebra* **313** (2007), no. 1, p. 392–416.
- [PR06] J. PAGNON & N. RESSAYRE – « Adjacency of young tableaux and the springer fibers. », *Selecta Mathematica, New series* **12** (2006), no. 3–4, p. 517–540.
- [Res05b] — , « Balanced configurations of  $2n + 1$  plane vectors. », *Journal of Algebraic Combinatorics* **21** (2005), no. 3, p. 281–287.
- [RS90] R. W. RICHARDSON & T. A. SPRINGER – « The Bruhat order on symmetric varieties », *Geom. Dedicata* **35** (1990), no. 1–3, p. 389–436.
- [Spa77] N. SPALTENSTEIN – « On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups », *Topology* **16** (1977), no. 2, p. 203–204.
- [Spr76] T. A. SPRINGER – « Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups », *Invent. Math.* **36** (1976), p. 173–207.
- [Spr02] — , « Intersection cohomology of  $B \times B$ -orbit closures in group compactifications », *J. Algebra* **258** (2002), no. 1, p. 71–111.
- [Spr04] — , « Combinatorics of  $B$ -orbits in a wonderful compactification », in *Algebraic groups and arithmetic*, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2004, p. 99–117.
- [Spr06] T. A. SPRINGER – « Some results on compactifications of semi-simple groups », in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 1337–1348.
- [Spr07] T. A. SPRINGER – « An extension of bruhat’s lemma », *J. Algebra* **313** (2007), no. 1, p. 417–427.
- [Str06] E. STRICKLAND – « Equivariant cohomology of the wonderful group compactification », *J. Algebra* **306** (2006), no. 2, p. 610–621.
- [Tan82] T. TANISAKI – « Defining ideals of the closures of the conjugacy classes and representations of the Weyl groups », *Tôhoku Math. J. (2)* **34** (1982), no. 4, p. 575–585.

- [Tch02] A. TCHOUDJEM – « Cohomologie des fibrés en droites sur la compactification magnifique d’un groupe semi-simple adjoint », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **334** (2002), no. 6, p. 441–444.
- [Tch05] — , « Cohomologie des fibrés en droites sur les variétés magnifiques de rang minimal », *Preprint* (2005), no. Arxiv : AG/0507581, p. 1–48.
- [Tha96] — , « Geometric invariant theory and flips », *J. of Amer. Math. Soc.* **9** (1996), no. 3, p. 691–723.
- [TW03] C. TELEMAN & C. WOODWARD – « Parabolic bundles, products of conjugacy classes and Gromov-Witten invariants », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2003), no. 3, p. 713–748.
- [Val79a] L. G. VALIANT – « Completeness classes in algebra », in *Conference Record of the Eleventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Atlanta, Ga., 1979)*, ACM, New York, 1979, p. 249–261.
- [Val79b] — , « The complexity of computing the permanent », *Theoret. Comput. Sci.* **8** (1979), no. 2, p. 189–201.
- [Val82] — , « Reducibility by algebraic projections », in *Logic and algorithmic (Zurich, 1980)*, Monograph. Enseign. Math., vol. 30, Univ. Genève, Geneva, 1982, p. 365–380.
- [Vog83] D. A. VOGAN – « Irreducible characters of semisimple Lie groups. III. Proof of Kazhdan-Lusztig conjecture in the integral case », *Invent. Math.* **71** (1983), no. 2, p. 381–417.
- [vzG87] J. VON ZUR GATHEN – « Permanent and determinant », *Linear Algebra Appl.* **96** (1987), p. 87–100.
- [Wey89] J. WEYMAN – « The equations of conjugacy classes of nilpotent matrices », *Invent. Math.* **98** (1989), no. 2, p. 229–245.
- [Wol93] J. A. WOLF – « Admissible representations and geometry of flag manifolds », in *The Penrose transform and analytic cohomology in representation theory (South Hadley, MA, 1992)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 21–45.

---

---

## Quelques travaux

[2] SUR DES FACES DU LR-CÔNE GÉNÉRALISÉ. Avec PL Montagard.

[4] GEOMETRIC INVARIANT THEORY AND GENERALIZED EIGENVALUE PROBLEM.

[6] SUR LES ORBITES D'UN SOUS-GROUPE SPHÉRIQUE DANS LA VARIÉTÉ DES DRAPEAUX.

[7] ABOUT KNOP'S ACTION OF THE WEYL GROUP ON THE SET OF ORBITS OF A SPHERICAL SUBGROUP IN THE FLAG MANIFOLD.

[8] SPHERICAL HOMOGENEOUS SPACES OF MINIMAL RANK.

[9] A QUADRATIC BOUND FOR THE PERMANANT-DETERMINANT PROBLEM. Avec Thierry Mignon.

[10] INVARIANT DEFORMATIONS OF ORBIT CLOSURES IN  $\mathfrak{sl}(n)$ . Avec Sébastien Jansou.

---