Intégrales de Riemann et de Lebesgue

L'objet de ces quelques pages est de présenter les concepts fondamentaux des théories des intégrales de Riemann et de Lebesgue. Afin que les grandes lignes de ces théories apparaissent plus clairement, de nombreuses démonstrations ont été occultées. L'objectif est qu'après la lecture de ce texte vous connaissiez les concepts fondamentaux de ces théories, que vous sachiez comment ils s'imbriquent les uns par rapport aux autres et que vous connaissiez les énoncés des théorèmes fondamentaux (c'est-à-dire utiles pour fonder la théorie et non pas simplement important).

La dernière partie compare les deux théories de l'intégration sus-cités. Elle devrait vous permettre d'argumenter le choix de l'intégrale de Lebesgue comme cadre de vos leçons d'oral.

1 Intégrale de Riemann

1.1 Introduction

On veut définir $\int_a^b f(x)dx$. Dans le cas où, f est positive, le nombre $\int_a^b f(x)dx$ doit s'accorder à l'idée intuitive de l'aire de l'épigraphe.

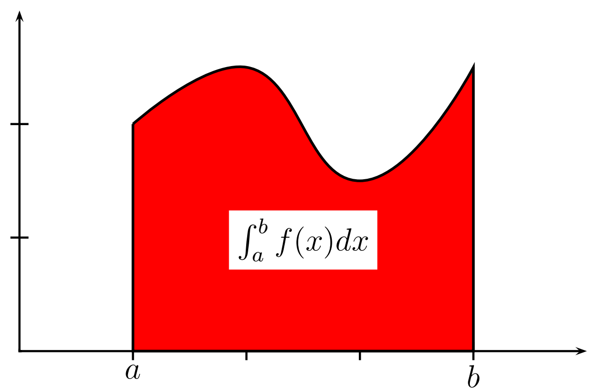

Figure 1: Aire de l'épigraphe

Pour les fonctions en escalier, cette intuition suffit à définir l'intégrale. Riemann élargit ensuite la classe de fonctions que l'on peut intégrer par des procédés d'approximation et d'encadrement.

1.2 Définitions

L'intégrale de Riemann traite de certaines fonctions numériques **bornées** sur un intervalle **fermé et borné** de $\mathbb{R}$. Soit $[a\,;\,b]$ un tel intervalle.

Définition. Une fonction $f : [a\,;\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est en escaliers s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k < \cdots < a_n = b$ de l'intervalle $[a\,;\,b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle **ouvert** $]a_{k-1}\,;\,a_k[$ pour $k = 1, \cdots, n$. On note $\mathrm{Esc}([a\,;\,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a\,;\,b]$.

Soit $f \in \mathrm{Esc}([a\,;\,b], \mathbb{R})$, a_k comme dans la définition ci-dessus et c_k la valeur de f sur $]a_{k-1}\,;\,a_k[$. On pose alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})c_k. \tag{1}$$

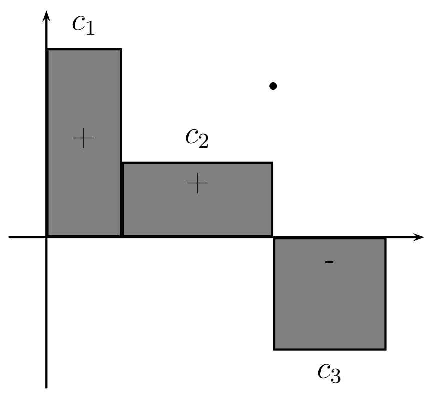

Figure 2: Intégrale des fonctions en escaliers

Remarque. Il y a plusieurs subdivisions $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k < \cdots < a_n = b$ telles que f soit constante sur chaque $]a_{k-1}\,;\,a_k[$. Il faut donc vérifier que le membre de droite de l'équation 1 ne dépend que de f. Ceci se fait facilement en montrant qu'il existe une unique telle subdivision avec n minimal et que toutes les autres en sont des raffinements.

On a ainsi défini une application $\int : \mathrm{Esc}([a\,;\,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \int_a^b f(x)dx$. Les propriétés (faciles) de cette intégrale utiles pour « l'extension de Riemann » sont :

Proposition 1. *On a :*

1. *L'ensemble* $\mathrm{Esc}([a\,;\,b], \mathbb{R})$ *est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de* $[a\,;\,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.
2. $\int$ *est une forme linéaire.*
3. *Si* f *est positive alors* $\int_a^b f(x)dx$ *l'est aussi.*

Si on arrive à étendre la définition de l'intégrale à d'autres fonctions f que les fonctions en escaliers tout en conservant les propriétés de la proposition 1, on aura :

$$\sup_{\substack{g \in \mathrm{Esc}([a\,;\,b],\mathbb{R}) \\ t.\,q.\ g \leq f}} \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \inf_{\substack{g \in \mathrm{Esc}([a\,;\,b],\mathbb{R}) \\ t.\,q.\ g \geq f}} \int_a^b g(x)dx \tag{2}$$

Définition. Une fonction est dite Riemann-intégrable si les inégalité 2 suffisent à déterminer $\int_a^b f(x)dx$ c'est-à-dire si $\sup_{\substack{g \in \mathrm{Esc}([a\,;\,b],\mathbb{R}) \\ t.\,q.\ g \leq f}} \int_a^b g(x)dx = \inf_{\substack{g \in \mathrm{Esc}([a\,;\,b],\mathbb{R}) \\ t.\,q.\ g \geq f}} \int_a^b g(x)dx =:$ I. On pose alors $\int_a^b f(x)dx := I$. On note $\mathrm{RI}([a\,;\,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions Riemann-intégrables sur $[a\,;\,b]$.

Il est facile de voir que

Proposition 2. *1. $\mathrm{RI}([a\,;\,b],\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est une forme linéaire.*

2. Si f est positive, $\int_a^b f(x)dx$ est positive.

Un peu moins facile :

Proposition 3. *1. Toute fonction continue est Riemann-intégrable.*

2. Toute fonction monotone bornée est Riemann-intégrable.

3. Toute fonction Riemann-intégrable est bornée.

Intégrales de Riemann et limites :

Proposition 4. *L'espace $\mathrm{RI}([a\,;\,b],\mathbb{R})$ est fermée dans l'espace des fonctions bornées pour la norme* sup. *De plus, $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est continue pour cette norme.*

Il est vivement recommander de traduire la dernière proposition en un théorème d'interversion de limite et d'intégrale.

Voici d'autres opérations possibles dans $\mathrm{RI}([a\,;\,b],\mathbb{R})$:

Proposition 5. *1. Le produit de deux fonctions Riemann-intégrables est Riemann-intégrable.*

2. Si f est Riemann-intégrable alors $|f|$ l'est aussi et $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.

La première assertion de la proposition ci-dessus pourra être vu comme un corollaire du théorème 21 ci-après.

2 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

2.1 Tribus

Soit X un ensemble (qui sera $\mathbb{R}^n$ dans le cas de la mesure de Lebesgue).

Définition. Un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X est appelé une *tribu* (ou σ-algèbre) si

1. $X \in \mathcal{T}$.
2. $A \in \mathcal{T} \Rightarrow X - A \in \mathcal{T}$.
3. $(\forall n \in A_n\ A_n \in \mathcal{T}) \ \Rightarrow\ \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Exemples

1. La plus petite tribu est $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. La plus grande est l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de toutes les parties de X.
2. Si $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ sont des tribus sur X, alors $\cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$ est une tribu. Cette propriété et le fait que $\mathcal{P}(X)$ soit une tribu permettent de parler de tribu engendrée par une partie de $\mathcal{P}(X)$.
3. Si X est un espace topologique, la tribu engendrée par les ouverts est appelée tribu Borellienne et est notée $\mathcal{B}(X)$. On peut montrer en guise d'exercice que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles $]-\infty\,;a[$ pour $a \in \mathbb{R}$.

2.2 Fonctions mesurables

Soit X un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu de parties de X.

Définition. Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *mesurable* si pour tout ouvert U de $\mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(U)$ appartient à $\mathcal{T}$.

Il revient au même de demander que pour tout borélien U de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ appartient à $\mathcal{T}$; ou encore, que pour tout réel a, $f^{-1}(]-\infty\,;a[)$ appartient à $\mathcal{T}$.

Remarque. Il convient de noter que la notion de fonction mesurable est définie indépendamment de la mesure que l'on va mettre sur $(X, \mathcal{T})$, contrairement à ce que peut laisser croire la dénomination.

Exemples

1. Si X est un espace topologique et $\mathcal{T} = \mathcal{B}(X)$, toute fonction continue est mesurable.
2. Soit A une partie de X. La fonction caractéristique de A est mesurable si et seulement si A appartient à $\mathcal{T}$.

Voici quelques résultats de stabilité de l'ensemble des fonctions mesurables :

Théorème 6. *1. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, il en est de même pour $|f|$.*

2. Si $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite de fonctions mesurables alors $\sup_n f_n$ et $\limsup_{n\to\infty} f_n$ sont mesurables.

Corollaire 7. *1. Si f et g sont mesurables alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ le sont aussi.*

2. Toute limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Théorème 8. *Soit f et g deux fonctions mesurables. Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.*

Alors, $x \longmapsto F(f(x), g(x))$ est mesurable. En particulier, $f+g$ et fg sont mesurables.

2.3 Mesure de Lebesgue

Soit X un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu de parties de X.

Définition. Une mesure μ sur $(X, \mathcal{T})$ est une fonction $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow [0\,; +\infty]$ qui vérifie :

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints.

Exemples Soit X quelconque et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Pour $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A)$ est le cardinal de A si A est fini et vaut $+\infty$ sinon. Cette mesure est appelé « mesure de comptage ».

Voici quelques propriétés de base des mesures. Les démonstrations peuvent être faite par le lecteur en guise d'exercice.

Proposition 9. *1. Si A et B appartiennent à $\mathcal{T}$, on a*

$$\mu(A) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B) \text{ et } \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

2. Si A et B appartiennent à $\mathcal{T}$ et $A \subset B$, on a $\mu(A) \leq \mu(B)$.

3. Si A_n est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, on a $\mu(\cup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

4. Si A_n est une suite croissante ($A_n \subset A_{n+1}$) d'éléments de $\mathcal{T}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\cup_{n\geq 1} A_n.$$

5. *Si A_n est une suite décroissante ($A_n \supset A_{n+1}$) d'éléments de $\mathcal{T}$ et $\mu(A_1)$ fini, on a* $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\cap_{n\geq 1} A_n)$.

   L'hypothèse « $\mu(A_1)$ fini » est-elle nécessaire ?

On suppose désormais que $X = \mathbb{R}^n$. On cherche à construire une mesure définie sur les ouverts (et donc sur les Boréliens) qui vérifie

$$\mu(\prod_{i=1}^{n}]a_i\,;\,b_i[) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

On appelle *pavé* de $\mathbb{R}^n$ une partie de la forme $\prod_{i=1}^{n}]a_i\,;\,b_i[$.
Définition. Soit E une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$. On appelle *mesure extérieure* de E la quantité

$$\mu^*(E) := \inf\Big(\sum_{n\geq 1} \mu(P_n)\Big),$$

où l'infimum porte sur toutes les suites de pavés P_n telles que $E \subset \cup_{n\geq 1} P_n$.

Il convient de véridier que pour tout pavé P, $\mu^*(P) = \mu(P)$. On a de plus,

Proposition 10. 1. *Si $A \subset B$ alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

2. *Pour toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de X, on a $\mu^*(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(B_n)$.*

Remarque. Contrairement à ce que peut laisser penser la dénomination « mesure extérieure », l'application $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0 : +\infty]$ n'est pas une mesure. En effet, l'aasertion 1 de la proposition 9 n'est pas satisfaite.

À cause de la remarque précédente, on est contraint à restreindre la tribu :

Définition. Une partie B de X est dite Lebesgue-mesurable si

$$\forall E \in \mathcal{P}(X) \qquad \mu^*(E) = \mu^*(E\cap B) + \mu^*(E \cap (\mathbb{R}^n - B)).$$

On note $\mathcal{M}(\mu)$ l'ensemble des parties mesurables de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 11. 1. *$\mathcal{M}(\mu)$ est une tribu contenant les Boréliens.*

2. *La restriction de μ^* à $\mathcal{M}(\mu)$ est une mesure. On note λ cette mesure et on l'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Du coup on pose $\mathcal{M}(\lambda) := \mathcal{M}(\mu)$.*

3. *Pour tout partie B, $\mu^*(B) = 0$ implique $B \in \mathcal{M}(\lambda)$.*

Voici quelques propriétés de la mesure de Lebesgue.

I) . Toute partie dénombrable de $\mathbb{R}^n$ est mesurable et de mesure nulle.

II) .

Théorème 12. *La mesure de Lebesgue est la seule mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, finie sur les pavés et invariante par translation et telle que $\mu(\prod_{i=1}^{n}[0\,;\,1]) = 1$. (Ce résultat est difficile)*

III) . Une partie E de $\mathbb{R}^n$ est Lebesgue-mesurable si et seulement s'il existe deux Boréliens A et B tels que $A \subset E \subset B$ et $\lambda(B - A) = 0$.

Ceci implique qu'une fonction est mesurable si et seulement si elle est presque partout égale à une fonction Borélienne (i.e. mesurable pour la tribu des Boréliens).

IV) . En utilisant l'axiome du choix, on peut montrer qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ non mesurables.

Remarque. Supposons le temps de cette remarque que $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mu))$. L'espace des fonctions mesurables est stable par la pluspart des opérations de l'analyse en tête desquels le passage à la limite simple. Ceci explique que toutes les fonction « que l'on rencontre » sont mesurables. D'ailleurs, il est nécessaire d'utiliser l'axiome du choix pour construire des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne soient pas Lebesgue-mesurables.

Il faut tout de même se méfier du fait suivant : soient f, g : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f mesurable et g continue n'implique pas que $f \circ g$ est mesurable. Pour plus de détails consulter **??**[p.241]. Ce phénomène illustre me semble t-il que les deux $\mathbb{R}$ de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ n'ont pas le même role. Celui du but est l'espace topologique et celui de la source est muni de la tribu des Lebesgue-mesurables. Lorsque l'on compose $f \circ g$ on fait jouer à une même $\mathbb{R}$ les deux roles simultanement !

3 Intégrale de Lebesgue

Cet exposé n'est qu'une des façons possibles de présenter l'intégrale de Lebesgue. Une autre possibilité est celle que H. Lebesgue expose lui-même de manière limpide et briante dans l'article reproduit en annexe.

Dans cet exposé, on commence par remarquer que la théorie de la mesure peut-être penser comme une théorie de l'intégration des fonctions à deux valeurs 0 et 1 (les fonctions caractéristiques de parties en d'autres termes). Par linéarité, on étend ensuite cette « intégrale » à des fonctions étagées (c'est-à-dire ne prenant qu'un nombre finie de valeurs). On passe à des fonctions positives plus générales par un procédé d'approximation monotone. On s'affranchie enfin de l'hypothèse de positivité par linéarité (toute fonctions est la différence entre deux fonctions positives !).

Il peut sembler à la lecture du paragraphe précédent que l'idée de Lebesgue a simplement été de remplacer les fonctions en escaliers utilisées par Riemann par les fonctions étagées (ce qui a été rendu possible grâce aux travaux de Borel sur la théorie de la mesure). Cependant, la lecture de l'article d'Henri Lebesgue ci-joint nous apprend qu'il n'en est rien.

3.1 Fonctions étagées

Soit X un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu de parties de X.

Définition. Une fonction f de X vers $\mathbb{R}$ est dîte étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Si E est une partie de X, on note $\mathbb{1}_E$ la fonction caractéristique de E. Si l'image de f est $\{c_1, \cdots, c_n\}$ et $E_k = f^{-1}(c_k)$, on a $f = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathbb{1}_{E_k}$. De plus, f est mesurable si et seulement si tous les E_k le sont.

Le premier théorème fondateur de l'intégrale de Lebesgue est le

Théorème 13. *Toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ positive (mesurable) est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées (mesurables).*

Démonstration. Fixons un entier n. On découpe l'intervalle $[0\,;n]$ en $n2^n$ intervalles égaux. Posons

$i = 1, \cdots, n2^n$ $\quad E_{n,i} := \left\{x \in X \;:\; \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}$ $\quad$ et $\quad F_n := \{x \;:\; f(x) \geq n\}$.

Ces définitions sont illustrées par la figure 3.1.

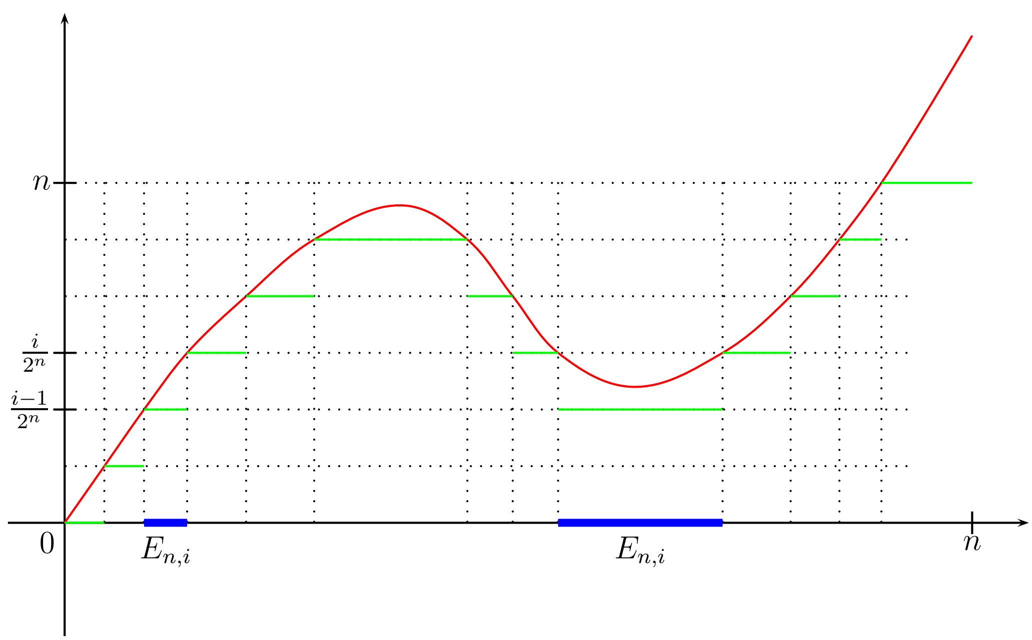

Figure 3: Fonctions positives et étagées

Posons $f_n := \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \mathbb{1}_{E_{n,i}} + n\mathbb{1}_{F_n}$. Il est facile de voir que la suite f_n est croissante et tend vers f. De plus, si f est mesurable les f_n le sont. $\square$

3.2 Intégration des fonctions positives

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f = \sum_{k=0}^{n} c_k \mathbb{1}_{E_k}$ une fonction étagée mesurable et positive. On pose alors

$$I(f) := \sum_{k=0}^{n} c_k \mu(E_k), \tag{3}$$

avec la convention suivante : $0. + \infty = 0$.

Remarque. Si $\mu(X)$ est fini (par exemple si X est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue) on peut se passer de l'hypothèse f positive. En effet, celle-ci n'est là que pour éviter une indétermination du type $(+\infty) + (-\infty)$.

Soit f une fonction mesurable positive pouvant avoir $+\infty$ pour valeur. On pose :

$$\int_X f \, d\mu := \sup_{\substack{g \text{ tage} \\ 0 \leq g \leq f}} I(g). \tag{4}$$

Si E appartient à $\mathcal{T}$, on pose $\int_E f d\mu := \int_X (f.\mathbb{1}_E) \, d\mu$. Voici quelques propriétés immédiates de cette intégrale :

Proposition 14. *Soit f et g mesurables positives et $\lambda \geq 0$. Alors,*

1. *Si $f \leq g$, alors $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.*
2. *$\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu$.*

Remarque. La définition 4 a bien entendu un sens même si f n'est pas mesurable. Cependant, si on intègre toutes les fonctions positives, la formule

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

est FAUSSE ! Le problème est en fait le même qu'avec la définition de la mesure extérieure qui avait un sens pour toute partie mais qui n'était pas une mesure. Les contre-exemples aussi sont les-mêmes.

La dernière remarque montre la nécessité de démonstrations même pour les propriétés les plus simples. Celles-ci viendront du théorème 13 et du théorème de convergence monotone ci-dessous.

Théorème 15. *Soit (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives. Soit $f : X \longrightarrow [0\,; +\infty]$ sa limite simple.*

Alors, $\int_X f_n \, d\mu$ tend vers $\int_X f \, d\mu$.

Démonstration. Utilisant la proposition 14, il est facile de voir que la suite $\int_X f_n \, d\mu$ est croissante ; elle converge donc vers un élément a de $[0\,;+\infty]$. De plus, comme $\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$, on a $a \leq \int_X f \, d\mu$.

Il s'agit maintenant de montrer que $a \geq \int_X f \, d\mu$ c'est-à-dire (d'après l'égalité 4) que pour toute fonction mesurable étagée ϕ comprise entre 0 et f on a $a \geq I(\phi)$. Fixons une telle fonction ϕ.

Fixons $0 < \alpha < 1$ et montrons que $a \geq \alpha \int_X \phi \, d\mu$. En faisant tendre α vers 1 ceci suffira.

Posons $X_n := \{x \in X \ : \ f_n(x) \geq \alpha\phi(x)\}$. On a $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$ et $X = \cup_{n=1}^{+\infty} X_n$. Or pour tout n, on a :

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{X_n} f_n \, d\mu \geq \alpha \int_{X_n} \phi \, d\mu. \tag{5}$$

Écrivons $\phi = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{E_i}$ avec E_i dans $\mathcal{T}$. Alors, $\int_{X_n} \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^k c_i \mu(E_i \cap X_n)$. Or chaque $\mu(E_i \cap X_n)$ tend vers $\mu(E_i)$ quand n tend vers l'infini d'après la proposition 9[assertion 5]. Prenant la limite dans l'inégalité 5, on obtient donc :

$$\int_X f \, d\mu \geq \alpha \int_X \phi \, d\mu.$$

□

Le théorème 15 a de nombreux corollaires. Tout d'abord, avec le théorème 13 il permet de voir la définition 4 de $\int_X f \, d\mu$ comme une définition par approximation de f par des fonctions étagées. Les corollaires énoncés ci-dessous se démontrent tous de la même manière : on les montre d'abord pour les fonctions étagées, on passe ensuite au cas général par approximation grâce aux théorèmes 13 et 15. Les démonstrations précises sont laissées au lecteur.

Corollaire 16. *Soit f_1 et f_2 deux fonctions mesurables positives. Alors, on a*

$$\int_X (f_1 + f_2) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f_2 \, d\mu.$$

Corollaire 17. *Soit f une fonction mesurable à valeurs dans $[0; +\infty]$. Alors, $\mu_f \ : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \longmapsto \int_E f \, d\mu$ est une mesure sur $\mathcal{T}$. De plus, pour toute fonction mesurable positive g, on a :*

$$\int_X g \, d\mu_f = \int_X gf \, d\mu.$$

La démonstration du corollaire suivant se fait sans appel aux fonctions étagées.

Corollaire 18 (Lemme de Fatou). *Soit $f_n \ : \ X \longrightarrow [0; +\infty]$ une suite de fonctions mesurables. Alors, on a :*

$$\int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

3.3 Intégrale de fonctions de signe quelconques

Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, on pose $f_+ = \max(0, f)$ et $f_- = \max(0, -f)$ de telle sorte que f_+ et f_- soient positives et $f = f_+ - f_-$. Si f est mesurable, f_+ et f_- le sont.
Définition.

1. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Si $\int_X f_+ \, d\mu$ **ou** $\int_X f_- \, d\mu$ est fini, on pose :
$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu.$$
2. On dit que f si Lebesgue-intégrable (ou intégrable) si $\int_X |f| \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu + \int_X f_- \, d\mu$ est fini. Il convient de remarquer que « f intégrable » est plus exigent que « $\int_X f \, d\mu$ défini »!
3. On note $\mathcal{L}(\mu)$ l'ensemble des fonctions Lebesgue-intégrable sur X.

La démonstration du théorème suivant laissée au lecteur est essentiellement algébrique.

Théorème 19. *1. $\mathcal{L}(\mu)$ est un espace vectoriel.*

2. $\int : \mathcal{L}(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

3. Si $f \in \mathcal{L}(\mu)$, $|\int_X f \, d\mu| \leq \int_X |f| \, d\mu$.

4. Le théorème de convergence monotone et le lemme de Fatou restent valables pour des suites de fonctions de $\mathcal{L}(\mu)$.

Nous finissons cette section par le théorème de convergence dominée. La démonstration que l'on peut trouver dans tout bon livre sur l'intégration utilise le lemme de Fatou via des manipulations assez fines de lim sup et lim inf.

Théorème 20 (Convergence dominée)**.** *Soit f_n une suite de fonctions Lebesgue-intégrable qui converge simplement vers une fonction f. Alors, f est mesurable.*

Si de plus il existe une fonction $g : X \longrightarrow [0; +\infty]$ telle que $\int_X g \, d\mu < +\infty$ et pour tout n, $|f_n| \leq g$ alors f est Lebesgue-intégrable et $\int_X f_n \, d\mu$ tend vers $\int_X f \, d\mu$.

4 Comparaison entre l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann

Le théorème suivant montre que toute fonction Riemann-intégrable sur un segment est Lebesgue-intégrable. Ainsi, la théorie de Lebesgue généralise (strictement d'après les exercices 2 et 3) celle de Riemann. De plus, les fonctions Riemann-intégrables sont soumises a des conditions de régularité très fortes.

Théorème 21. *1. Si f est Riemann-intégrable sur $[a;b]$ alors elle est Lebesgue-intégrable et les deux intégrales conïncident.*

2. Une fonction sur un segment est Riemann-intégrable si et seulement si elle est bornée et continue presque partout.

5 Quelques exercices

Exercise 1. Montrer que toute fonction Riemann-intégrable est bornée.

Exercise 2. Donner un exemple de fonction Lebesgue-intégrable non bornée sur $[0;1]$.

Exercise 3. Existe-t-il des fonctions bornées sur $[0;1]$ Lebesgue-intégrable et non Riemann-intégrable ?

Exercise 4. Exhiber un élément non dénobrable de $\mathcal{M}(\mu)$ qui soit de mesure nulle.

Exercise 5. Toute fonction mesurable bornée sur un segment est-elle Lebesgue-intégrable ?

Exercise 6. Soit f mesurable positive. Montrer que $\int_X f \, d\mu = 0$ si et seulement si f est presque partout nulle (c'est-à-dire si l'ensemble des x tels que $f(x) \neq 0$ est de mesure nulle). Rappeler la définition de l'espace fonctionnel $L^1(\mu)$.

Exercise 7. Montrer que le théorème de convergence dominée est faux pour l'intégrale de Riemann.

Exercise 8. Montrer que l'hypothèse de domination dans le théorème de convergence dominée est nécessaire. Indication : *Considérer* ....

Reproduction des pages 1025 à 1027 du tome 132
(janvier-février 1901) des Comptes rendus des
Séances de l'Académie des Scineces.

Séance du lundi 29 avril 1901.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une généralisation de l'intégrale définie*
Note de M: **H. Lebesgue**, présentée par M. Picard.

Dans le cas des fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche des fonctions primitives n'est donc pas résolu par l'intégration ; et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de résoudre le problème des fonctions primitives[1].

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue croissante

$$\gamma(x)(a \leq x \leq b),$$

on divise l'intervalle en intervalles partiels et l'on fait la somme des quantités obtenues en multipliant la longueur de chaque intervalle partiel par l'une des valeurs de y quand x est dans cet intervalle. Si x est dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}), y varie entre certaines limites m_i, m_{i+1}, et réciproquement si y est entre m_i et m_{i+1}, x est entre a_i et a_{i+1}. De sorte qu'au lieu de se donner la division de la variation de x, c'est-à-dire de se donner les nombres a_i, on aurait pu se donner la division de la variation de y, c'est-à-dire les nombres m_i. De là deux manières de généraliser la notion d'intégrale. On sait que la première (se donner les a_i) conduit à la définition donnée par Riemann et aux définitions des intégrales par excès et par défaut données par M. Darboux. Voyons la seconde.

Soit la fonction y comprise entre m et M. Donnons-nous

$$m = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_{p-1} < M = m_p\,;$$

$y = m$ quand x fait partie d'un ensemble E_0 ; $m_{i-1} < y \leq m_i$ quand x fait partie d'un ensemble E_i.

Nous définirons plus loin les mesures λ_0, λ_i de ces ensembles. Considérons l'une ou l'autre des sommes

$$m_0\lambda_0 + \sum m_i\lambda_i\ ;\ m_0\lambda_0 + \sum m_{i-1}\lambda_i\ ;$$

si, quand l'écart maximum entre deux m_i consécutifs tend vers zéro, ces sommes tendent vers une même limite indépendante des m_i choisis, cette limite sera par définition l'intégrale des y qui sera dite *intégrable.*

---

[1] Ces deux conditions imposées *a pripori* à toute généralisation de l'intégrale sont évidemment compatibles, car toute fonction dérivée intégrable, au sens de Riemann, a pour intégrale une de ses fonctions primitives.

Considérons un ensemble de points de (a, b) ; on peut d'une infinité de manières enfermer ces points dans une infinité dénombrable d'intervalles ; la limite inférieure de la somme des longueurs de ces intervalles est la mesure de l'ensemble. Un ensemble E est dit *mesurable* si sa mesure augmentée de celle de l'ensemble des points ne faisant par partie de E donne la mesure de (a, b)[2]. Voici deux propriétés de ces ensembles : une infinité d'ensembles mesurables E_i étant donnée, l'ensemble des points qui font partie de l'un au moins d'entre eux est mesurable ; si les E_i n'ont deux à deux aucun point commun, la mesure de l'ensemble obtenu est la somme des mesures des E_i. L'ensemble des points communs à tous les E_i est mesurable.

Il est naturel de considérer d'abord les fonctions telles que les ensembles qui figurent dans la définition de l'intégrale soient mesurables. On trouve que ; *si une fonction limitée supérieurement en valeur absolue est telle que, quels que soient A et B, l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a $A < y \leq B$ est mesurable, elle est intégrable* par le procédé indiqué. Une telle fonction sera dite *sommable.* L'intégrale d'une fonction sommable est comprise entre l'intégrale par défaut et par excès. De sorte que, *si une fonction intégrable au sens de Riemann est sommable, l'intégrale est la même avec les deux définitions.* Or, *toute fonction intégrable au sens de Riemann est sommable*, car l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle, et l'on peut démontrer que si, en faisant abstraction d'un ensemble de valeurs de x de mesure nulle, il reste un ensemble en chaque point duquel une fonction est continue, cette fonction est sommable. Cette propriété permet de former immédiatement des fonctions non intégrables au sens de Riemann et cependant sommables. Soit $f(x)$ et $\phi(x)$ des fonctions continues, $\phi(x)$ n'étant pas toujours nulle ; une fonction que ne diffère de $f(x)$ qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle partout dense et qui en ces points est égale à $f(x) + \phi(x)$ est sommable sans être intégrable au sens de Riemann. *Exemple :* La fonction égale à 0 si x est irrationnel, égale à 1 si x est rationnel. Le procédé de formation qui précède montre que l'ensemble des fonctions sommables a une puissance supérieure au continu. Voici deux propriétés des fonctions de cet ensemble.

1. Si f et ϕ sont sommables, $f + \phi$ et $f\phi$ le sont et l'intégrale de $f + \phi$ est la somme des intégrales de f et de ϕ.

2. Si une suite de fonctions sommables a une limite, c'est une fonction sommable.

L'ensemble des fonctions sommables contient évidemment $y = k$ et $y = x$; donc, d'après 1, il contient tous les polynômes et comme, d'après 2, il contient toute ses limites, il contient toutes les fonctions continues, toutes les limites de fonctions continues, c'est-à-dire les fonctions de première classe (voir Baire, *Annali di Matematica*, 1899), il contient toutes celles de seconde classe, etc.

En particulier, *toute fonction dérivée, limitée supérieurement en valeur absolue*, étant de première classe, *est sommable* et l'on peut démontrer que *son intégrale, considérée comme fonction de sa limite supérieure, est une de ses fonctions primitives.*

[2] Si l'on ajoute à ces ensembles des ensembles de mesures nulles convenablement choisis, on a des ensembles mesurables au sens de M. Borel *(Leçons sur la théorie des fonctions).*

Voici maintenant une application géométrique : si $|f'|$, $|g'|$, $|\phi'|$ sont limitées supérieurement, la courbe

$$x = f(t),\ y = \phi(t),\ z = \psi(t)$$

a pour longueur l'intégrale de $\sqrt{f'^2 + \phi'^2 + \psi'^2}$. Si $\phi = \psi = 0$, on a la variation totale de la fonction f à variation limitée. Dans le cas où $|f'|$, $|g'|$, $|\phi'|$ n'existent pas, on peut obtenir un théorème presque identique en remplaçant les dérivées par les nombres dérivés de Dini.