

Algèbre VI. Représentation des groupes finis

Journal du cours

1 Présentation du cours

Ce cours se divise en trois grandes parties de longueur à peu près équivalentes :

1. Compléments d'algèbre linéaire (dualité, espaces hermitiens).
2. Représentation des groupes abéliens finis (théorème de structure, transformée de Fourier).
3. Représentation des groupes finis (notion de caractère).

2 Au jour le jour

Jeudi 16 février Début du chapitre *Dualité*.

- Rappels sur la matrice d'une application linéaire dans une base : $\text{Mat}_{CB}(u)$.
- Description implicite et explicite d'un sev et motivation de la dualité.
- Hyperplan, Espace dual, matrice d'une forme linéaire.
- base duale.
- orthogonal d'un sev de E (noté F°).

Jeudi 23 février Fin du chapitre dualité et début du chapitre *Espaces hermitiens*.

- orthogonal d'un sev de E^* (noté ${}^\circ F$).
- Bidualité
- Transposé d'une application linéaire.
- Rappel sur les formes bilinéaires sur \mathbb{R} : matrice d'une forme, noyau

Jeudi 1 mars (3 heures) Suite du chapitre *Espaces hermitiens*.

- forme quadratique : def et lien avec formes bilinéaires mais pas signature.
- espace euclidien, Cauchy-Schwarz, Gram-Schmidt, projection orthogonale sur un sev.
- Def de norme hermitienne sur un \mathbb{C} -ev comme une norme euclidienne (pour la structure de \mathbb{R} -ev) vérifiant $\|ix\| = \|x\|$.
- Formes sesquolinéaires et polarisation des normes hermitiennes.
- Expression matricielle des formes sesquolinéaires.
- Cauchy-Schwarz, Gram-Schmidt, projection orthogonale sur un sev : comme corollaire du cas réel.

Jeudi 8 mars Fin du chapitre *Espaces hermitiens* et début de *Représentations des groupes abéliens finis*.

- Réduction des endomorphismes normaux.
- Dual d'un groupe.

Jeudi 15 mars Suite de *Représentations des groupes abéliens finis*.

- Caractère d'un produits de groupes abéliens.
- Extension des caractères d'un sous-groupe d'un groupe abélien fini.
- Théorème de structure des groupes abéliens finis.

Jeudi 22 mars Suite de *Représentations des groupes abéliens finis*.

- fin de la preuve du théorème de structure + exemple d'un produit de groupes cycliques.
- L'espace vectoriel hermitien $\mathbb{C}[G]$ et ses deux bases (presque) unitaires $(\delta_g)_{g \in G}$ et \hat{G} .
- Transformée de Fourier et échangeement de bases.

Jeudi 29 mars Suite de *Représentations des groupes abéliens finis*.

- Transformée de Fourier, Inverse, Plancherel.
- Exemples de matrices de la transformée de Fourier pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et un produit.

Jeudi 5 avril Séance Reportée.

Jeudi 12 avril Vacances de printemps.

Jeudi 19 avril Partiel.

Jeudi 26 avril Fin du chapitre groupe abélien. Tout début de la partie Représentation des groupes finis non nécessairement abéliens.

- Produit de convolution et transformée de Fourier.
- Transformée de Fourier Rapide pour $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$.
- Application à la multiplication de polynômes.
- Début de la dernière partie : définition et exemples d'action de groupe, d'orbite et de stabilisateurs.

Jeudi 3 mai Représentation des groupes finis non nécessairement abéliens : suite.

- Les orbites forment une partition, cardinal d'une orbite et d'un stabilisateur...
- Application à "les p -groupes ont un centre non trivial".
- Représentations des groupes finis : définition exemples.
- Sous-représentation, duale, $Hom(V_1, V_2)$...
- Produit hermitien invariant, semisimplicité.
- Lemme de Schur.

Jeudi 10 mai Représentation des groupes finis non nécessairement abéliens : fin.

- Applications du lemme de Schur : unicité de la décomposition en somme d'irréductibles, représentations irréductibles des groupes abéliens finis.
- Caractère d'une représentation, de la somme de représentations, de la représentation duale.
- Orthogonalité des caractères.
- Le caractère caractérise la représentation.
- Représentation régulière gauche : multiplicités.
- Nombre de représentations irréductibles.
- Exemple de tables des caractères.