

Algèbre VI. Représentation des groupes finis

Journal du cours

1 Présentation du cours

Ce cours se divise en trois grandes parties de longueur à peu près équivalentes :

1. Compléments d'algèbre linéaire (dualité, espaces hermitiens).
2. Représentation des groupes abéliens finis (théorème de structure, transformée de Fourier).
3. Représentation des groupes finis (notion de caractère).

2 Au jour le jour

Jeudi 31 janvier Début du chapitre *Dualité*.

- Rappels sur la matrice d'une application linéaire dans une base : $\text{Mat}_{CB}(u)$.
- Description implicite et explicite d'un sev et motivation de la dualité.
- Hyperplan, Espace dual, matrice d'une forme linéaire.
- base duale.
- orthogonal d'un sev de E^* (noté F°).

Jeudi 7 février Fin du chapitre dualité et début du chapitre *Espaces hermitiens*.

- orthogonal d'un sev de E (noté ${}^\circ F$).
- Bidualité
- Transposé d'une application linéaire.
- Rappel sur les formes bilinéaires sur \mathbb{R} : matrice d'une forme, noyau

Jeudi 14 février – 3 heures Suite du chapitre *Espaces hermitiens*

- rappels sur les espaces euclidiens : Cauchy-Schwarz, Gram-Schmidt
- Espace vectoriel complexe = espace vectoriel réel + multiplication par i
- Espace hermitien = Espace vectoriel complexe + norme euclidienne i - invariante
- Forme hermitienne, Matricie, Changement de base
- Orthogonal, projection .

Jeudi 21 février Fin du chapitre *Espaces hermitiens* et début des groupes abéliens

- réduction des endomorphismes normaux
- Rappels sur les groupes : groupe, sous-groupe, morphisme, action, ordre d'un élément
- Dual d'un groupe
- Énoncé du théorème de classification des groupes finis.Exemple.

Jeudi 7 mars – 3 heures Groupes abéliens

- extension des caractères et preuve du théorème de classification
- L'espace hermitien des fonctions sur un groupe abélien G , sa base canonique
- Base des caractères.
- Définition de la transformée de Fourier. Formule de Plancherel.

Jeudi 14 mars Groupes abéliens

- Exemples de matrices de transformées de Fourier
- Coefficients de Fourier sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et d'une fonction 2π -périodique
- Produit de convolution et lien avec la transformée de Fourier.
- Transformé de Fourier Rapide (FFT) : début.

Jeudi 21 mars Partiel

Jeudi 28 mars – 3 heures Fin du chapitre « Représentation des groupes abéliens finis ». Début du chapitre « Représentation des groupes finis ».

- Algorithme FFT et sa complexité.
- Application à la multiplication des polynômes et des entiers.
- Définition d'une représentation, exemples.

- Représentations duales, morphismes entre représentations, sous-représentation.
- Existence d'un produit hermitien invariant.
- Exemple de non existence d'une forme bilinéaire non dégénérée invariante.

3 Références

Gabriel Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*