Université Claude Bernard Lyon 1
M2 de Mathématiques : Groupes algébriques
Année 2013–2014

Partiel de novembre

I Deux exemples

1° Un premier exemple

Soit
$$\begin{array}{rccc} \theta : & (\mathbb{C}^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (t,u) & \longmapsto & (tu, u, t^2u^3). \end{array}$$

Notons x, y et z les coordonnées sur $\mathbb{C}^3$.

a) Déterminer une fonction non nulle $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ qui s'annule sur l'image de θ.
b) Déterminer l'idéal de l'adhérence X de l'image de θ.
c) Déterminer l'espace tangent à X en $0 = (0,0,0)$.
d) Exhiber un isomorphisme de X sur $\mathbb{A}^2$.

2° Un deuxième exemple

Soit
$$\begin{array}{rccc} \zeta : & (\mathbb{C}^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (t,u) & \longmapsto & (tu, u, t^2u). \end{array}$$

Notons x, y et z les coordonnées sur $\mathbb{C}^3$.

a) Déterminer une fonction non nulle $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ qui s'annule sur l'image de ζ.
b) Déterminer l'idéal de l'adhérence Y de l'image de ζ.
c) Déterminer l'espace tangent à Y en $0 = (0,0,0)$.
d) Considérons l'action de $T = (\mathbb{C}^*)^2$ sur $\mathbb{C}^3$ définie par
$$(t,u)\cdot(x,y,z) = (tux, uy, t^2uz).$$

Vérifier que Y est stable par l'action de T. Déterminer les orbites de T dans Y en précisant si elles sont fermées ou pas.

II Actions de tores

Soit $T = (\mathbb{C}^*)^s$ (pour $s \geq 1$) un tore. On rappelle que $(S^1)^s$ est Zariski-dense dans T. On note $\mathrm{X}^*(T)$ le groupe des caractères de T, c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de groupes algébriques de T dans $\mathbb{C}^*$. On rappelle l'isomorphisme suivant
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^s & \longrightarrow & \mathrm{X}^*(T) \\ (a_1,\dots,a_s) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (t_1,\dots,t_s) & \longmapsto & \prod_{1\leq i\leq s} t_i^{a_i} \end{array}\right). \end{array}$$

1° Représentations

a) Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de T forme un sous-groupe Zariski dense de T.
b) Soit $\rho : T \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de T. Pour tout $\chi \in \mathrm{X}^*(T)$, on pose
$$V_\chi = \{v \in V \ : \ \rho(t)(v) = \chi(t)v\}.$$

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de V telle que pour tout $t \in T$, la matrice de $\rho(t)$ dans la base $\mathscr{B}$ soit diagonale. En déduire que
$$V = \bigoplus_{\chi\in \mathrm{X}^*(T)} V_\chi. \qquad (1)$$

Jusqu'à la fin du problème, on fixe une représentation $\rho : T \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et un vecteur non nul $v \in V$. On écrit $v = \sum_\chi v_\chi$ en accord avec (1). On s'intéresse à la variété $\overline{T \cdot v}$, adhérence de la T-orbite de v. Les variétés de I sont des exemples avec $s = 2$ et $v = (1, 1, 1)$.

2° **Adhérences d'orbites**

a) Posons

$$P(v) = \{\chi \in \mathrm{X}^*(T) \ : \ v_\chi \neq 0\}. \tag{2}$$

On note T_v le stabilisateur de v dans T.
Montrer que T_v est réduit à l'élément neutre si et seulement si $P(v)$ engendre $X^*(T)$ comme groupe.

b) On identifie $P(v)$ à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^s$ et donc de $\mathbb{Q}^s$ et $\mathbb{R}^s$. On note $\mathscr{P}(v)$ l'enveloppe convexe de $P(v)$ dans $\mathbb{R}^s$.
On note $\mathrm{X}_*(T)$ l'ensemble des morphismes de groupes algébriques de $\mathbb{C}^*$ dans T. On donne l'isomorphisme suivant

$$\begin{array}{rccl} \Lambda : & \mathbb{Z}^s & \longrightarrow & \mathrm{X}_*(T) \\ & (n_1, \ldots, n_s) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & T \\ t & \longmapsto & (t^{n_1}, \ldots, t^{n_s}) \end{array} \right). \end{array}$$

On suppose dorénavant que l'ensemble V^T des points fixes de T dans V est réduit à $\{0\}$.

Montrer que si $\mathscr{P}(v)$ ne contient pas 0 alors $\overline{T \cdot v} \ni 0$.
Indication : On pourra utiliser le fait suivant (sans démonstration) : si $\mathscr{P}(v)$ ne contient pas 0 alors il existe $(n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{Z}^s$ tel que pour tout $(a_1, \ldots, a_s) \in P(v)$ on a $\sum_i n_i a_i > 0$. On utilisera $\lambda = \Lambda(n_1, \ldots, n_s)$.

c) Réciproquement on suppose que 0 appartient à $\mathscr{P}(v)$. Montrer que $0 \in \overline{T \cdot v}$.
Indication : Par définition, il existe des réels x_χ positifs et non tous nuls tels que $0 = \sum_{\chi \in P(v)} x_\chi \chi$. On admettra que l'on peut choisir les x_χ rationnels et même entiers.

3° **Étude de la singularité en** 0

On suppose dorénavant que T_v est trivial et que $\overline{T \cdot v}$ contient 0. On pose $X = \overline{T \cdot v}$.

a) On considère l'action de T sur $\mathbb{C}[X]$ par changement de variables. Soit $\chi \in \mathrm{X}^*(T)$. Montrer que l'application $\mathbb{C}[X]_\chi \longrightarrow \mathbb{C}, f \longmapsto f(v)$ est injective.
Soit $S = \{\chi \in \mathrm{X}^*(T) \ : \ \mathbb{C}[X]_\chi \neq \{0\}\}$.
Montrer que, pour tout $\chi \in S$, $\mathbb{C}[X]_\chi$ est de dimension 1 et que $\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{\chi \in S} \mathbb{C}[X]_\chi$.

b) Montrer que $X /\!/ T$ est réduit à un point. Montrer que $\{0\}$ est l'unique orbite fermée de X.

c) On admettra que l'ensemble des points singuliers est stable par l'action de T. Montrer que X est lisse si et seulement si X est lisse en 0.

d) Fixons un $(n_1, \ldots, n_s)$ comme en 2°.b). Notons A_d, la somme des $\mathbb{C}[X]_\chi$ pour $\chi = (a_1, \ldots, a_d)$ satisfaisant $\sum_i n_i a_i = d$; si bien que $\mathbb{C}[X] = \oplus_{d \in \mathbb{N}} A_d$. Soit $\mathfrak{m} = \oplus_{d > 0} A_d$.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ et $f \in A_d$, on a

$$f\big((t^{n_1}, \ldots, t^{n_s}) \cdot v\big) = t^d f(v).$$

En déduire que $\mathfrak{m}$ est l'idéal de $\{0\}$.

e) Justifier l'existence d'un supplémentaire E de $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}$ stable par T. Montrer que E engendre $\mathbb{C}[X]$.
Indication : on montrera par récurrence sur d que A_d est inclus dans l'algèbre engendrée par E.

f) Construire une immersion fermée et T-équivariant $\varphi : X \longrightarrow E^* = T_0 X$.

g) Montrer que si X est lisse alors, il existe un isomorphisme T-équivariant entre X et $T_0 X$.