Université Claude Bernard Lyon 1
M2 de Mathématiques : Groupes algébriques
Année 2013–2014

Corrigé du partiel de novembre

I Deux exemples

1° Un premier exemple

Soit
$$\begin{array}{rccc} \theta : & (\mathbb{C}^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (t,u) & \longmapsto & (tu, u, t^2u^3). \end{array}$$

Notons x, y et z les coordonnées sur $\mathbb{C}^3$.

a) Déterminer une fonction non nulle $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ qui s'annule sur l'image de θ.

> Le polynôme $f(x,y,z) = x^2y - z$ convient car on a $f \circ \theta(t,u) = (tu)^2u - t^2u^3 = 0$ pour tout $t, u \in \mathbb{C}^*$.

b) Déterminer l'idéal de l'adhérence X de l'image de θ.

> L'adhérence X de l'image de θ est un fermé irréductible de $\mathbb{C}^3$. En effet, le caractère irréductible est préservé par image et par adhérence. Comme θ est injectif, toutes ses fibres sont de dimension 0. Alors, X est de dimension 2 et est une hypersurface irréductible de $\mathbb{C}^3$. On sait alors que son idéal I est engendré par un polynôme irréductible g.
> Montrons à présent que $g = f$ à un scalaire près. Par définition de l'adhérence de Zariski, f s'annulant sur l'image de θ, il s'annule aussi sur X. Ainsi $f \in I$ et g divise f. Or f est irréductible. Donc $g = f$ ou g est constant. Or g constant est impossible. Pour vérifier que f est irréductible, on peut regarder son degré en z...
>
> **Remarque.** Il n'était pas utile de montrer l'irréductibilité de X a priori.

c) Déterminer l'espace tangent à X en $0 = (0,0,0)$.

> Comme $I = (f)$, l'espace tangent est donné par les dérivées partielles de f en 0. Or
> $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \quad , \frac{\partial f}{\partial z} = -1.$$
> Ainsi, T_0X est le sev de $\mathbb{C}^3$ d'équation $z = 0$.

d) Exhiber un isomorphisme de X sur $\mathbb{A}^2$.

> La difficulté de cette question était que l'extension naïve de θ ne convient pas. L'astuce consiste à poser le changement de variable $T = tu$ et $U = u$. Considérons donc
> $$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (T,U) & \longmapsto & (T, U, T^2U). \end{array}$$
> On vérifie que X est l'image de γ. De plus, l'application $\beta : X \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $(x,y,z) \longmapsto (x,y)$ est réciproque de γ (c'est-à-dire $\gamma \circ \beta = \mathrm{Id}_X$ et $\beta \circ \gamma = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$). Donc γ est un isomorphisme.
>
> **Remarque.** Nous avons en fait exploité le fait que $f = 0$ est un graphe.

2° Un deuxième exemple

Soit

$$\begin{array}{rccc} \zeta : & (\mathbb{C}^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (t,u) & \longmapsto & (tu, u, t^2u). \end{array}$$

Notons x, y et z les coordonnées sur $\mathbb{C}^3$.

a) Déterminer une fonction non nulle $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ qui s'annule sur l'image de ζ.

> Ici, on peut prendre : $f = x^2 - yz$.

b) Déterminer l'idéal de l'adhérence Y de l'image de ζ.

> Seule change la preuve de l'irréductiblilté de f. On peut écrire une factorisation éventuelle de f en privilégiant y : $f = (\alpha y + \beta)\gamma$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}[x,z]$, puis conclure.

c) Déterminer l'espace tangent à Y en $0 = (0,0,0)$.

> Ici
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -z \quad , \frac{\partial f}{\partial z} = y.$$
>
> Ainsi, $T_0 Y = \mathbb{C}^3$.

d) Considérons l'action de $T = (\mathbb{C}^*)^2$ sur $\mathbb{C}^3$ définie par

$$(t,u) \cdot (x,y,z) = (tux, uy, t^2uz).$$

Vérifier que Y est stable par l'action de T. Déterminer les orbites de T dans Y en précisant si elles sont fermées ou pas.

> L'image de ζ est stable car si $(x,y,z) = \zeta(t',u')$ alors $(t,u) \cdot (x,y,z) = \zeta(tt', uu')$. Son adhérence est donc stable. En effet, pour tout $(t,u) \in T$ l'application $(x,y,z) \mapsto (t,u) \cdot (x,y,z)$ est continue pour la topologie de Zariski.
> On vérifie que l'image de θ est l'ouvert de Y défini par $z \neq 0$ et $y \neq 0$. Attention, la condition $x \neq 0$ ne suffit pas. Pour cela, on pose $u = y$ et $t = x/y$ ou z/x. D'après le premier paragraphe, ceci est une orbite de T, notée $\mathscr{O}^0$.
> L'ensemble de Y défini par $z = 0$ et $y \neq 0$ est $\{0\} \times \mathbb{C}^* \times \{0\}$. C'est une orbite de T, notée $\mathscr{O}_y$.
> L'ensemble de Y défini par $z \neq 0$ et $y = 0$ est $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}^*$. C'est une orbite de T, notée $\mathscr{O}_z$.
> L'ensemble de Y défini par $z = 0$ et $y = 0$ est $\{(0)\}$. C'est une orbite de T, notée $\mathscr{O}_0$.
> On a donc 4 orbites et $\mathscr{O}^0$ est ouverte, $\mathscr{O}_0$ est fermée ; alors que $\mathscr{O}_y$ et $\mathscr{O}_z$ ne sont ni ouvertes ni fermées.

II Actions de tores

Soit $T = (\mathbb{C}^*)^s$ (pour $s \geq 1$) un tore. On rappelle que $(S^1)^s$ est Zariski-dense dans T. On note $\mathrm{X}^*(T)$ le groupe des caractères de T, c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de groupes algébriques de T dans $\mathbb{C}^*$. On rappelle l'isomorphisme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^s & \longrightarrow & \mathrm{X}^*(T) \\ (a_1, \dots, a_s) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (t_1, \dots, t_s) & \longmapsto & \prod_{1 \leq i \leq s} t_i^{a_i} \end{array} \right). \end{array}$$

1° **Représentations**

a) Montrer que l'ensemble des éléments d'ordre fini de T forme un sous-groupe Zariski dense de T.

> Pour $s = 1$, les fermés de Zariski de $\mathbb{C}^*$ sont les ensembles finis. Le résultat en découle dans ce cas.
> Prenons maintenant s quelconque et notons Γ l'ensemble des éléments d'ordre fini. Comme T est abélien, Γ est un sous-groupe. Alors $\overline{\Gamma}$ est un sous-groupe. Par ailleurs, le cas $s = 1$ montre que $\overline{\Gamma}$ contient $\{1\} \times \cdots \times \{1\} \times \mathbb{C}^* \times \{1\} \times \cdots \times \{1\}$. Ces deux affirmations impliquent que $\overline{\Gamma} = T$.

b) Soit $\rho : T \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ une représentation de T. Pour tout $\chi \in \mathrm{X}^*(T)$, on pose

$$V_\chi = \{v \in V \,:\, \rho(t)(v) = \chi(t)v\}.$$

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de V telle que pour tout $t \in T$, la matrice de $\rho(t)$ dans la base $\mathscr{B}$ soit diagonale. En déduire que

$$V = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{X}^*(T)} V_\chi. \tag{1}$$

> Tous les éléments de Γ sont diagonalisables car ils annulent un polynôme scindé à racines simples ($X^N - 1$ où N est l'ordre de l'élément). Comme Γ est abélien, il existe un base $\mathscr{B}$ de V telle que pour tout $t \in \Gamma$, la matrice de $\rho(t)$ dans la base $\mathscr{B}$ soit diagonale.
> Comme l'ensemble des matrices diagonales est Zariski-fermé, pour tout $t \in T$, la matrice de $\rho(t)$ dans la base $\mathscr{B}$ soit diagonale.
>
> Pour tout élément v de la base, il existe $f_v : T \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $t \cdot v = f(t)v$. Or f est un coefficient matriciel de $\rho(t)$, donc f est régulière. De plus, $tt' \cdot v = t \cdot f(t')v = f(t)f(t')v = f(tt')v$. Donc f est un morphisme de groupes. L'égalité $V = \bigoplus_{\chi \in \mathrm{X}^*(T)} V_\chi$ en découle aussitôt.

Jusqu'à la fin du problème, on fixe une représentation $\rho : T \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ et un vecteur non nul $v \in V$. On écrit $v = \sum_\chi v_\chi$ en accord avec (1). On s'intéresse à la variété $\overline{T \cdot v}$, adhérence de la T-orbite de v. Les variétés de I sont des exemples avec $s = 2$ et $v = (1, 1, 1)$.

2° **Adhérences d'orbites**

a) Posons

$$P(v) = \{\chi \in \mathrm{X}^*(T) \,:\, v_\chi \neq 0\}. \tag{2}$$

On note T_v le stabilisateur de v dans T.
Montrer que T_v est réduit à l'élément neutre si et seulement si $P(v)$ engendre $X^*(T)$ comme groupe.

> Le sous-groupe T_v est l'ensemble des $t \in T$ tels que, pour tout $\chi \in P(v)$, $\chi(t) = 1$. Alors, si $P(v)$ engendre $X^*(T)$ comme groupe, pour tout $\chi \in X^*(T)$ et tout $t \in T_v$, $\chi(t) = 1$. On en déduit que T_v est trivial.
> Réciproquement, supposons que $P(v)$ engendre un sous-groupe strict Γ de $X^*(T)$. Un résultat du cours sur les groupes diagonalisables montre alors que l'ensemble des $t \in T$ tels que $\chi(t) = 1$ pour tout $\chi \in \Gamma$ est un sous-groupe non trivial de T. Or T_v contient ce sous-groupe de T.

b) On identifie $P(v)$ à un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^s$ et donc de $\mathbb{Q}^s$ et $\mathbb{R}^s$. On note $\mathscr{P}(v)$ l'enveloppe convexe de $P(v)$ dans $\mathbb{R}^s$.
On note $\mathrm{X}_*(T)$ l'ensemble des morphismes de groupes algébriques de $\mathbb{C}^*$ dans T. On donne l'isomorphisme suivant

$$\begin{array}{rccc}\Lambda : & \mathbb{Z}^s & \longrightarrow & \mathrm{X}_*(T) \\ & (n_1, \dots, n_s) & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & T \\ t & \longmapsto & (t^{n_1}, \dots, t^{n_s}) \end{array}\right).\end{array}$$

On suppose dorénavant que l'ensemble V^T des points fixes de T dans V est réduit à $\{0\}$.

Montrer que si $\mathscr{P}(v)$ ne contient pas 0 alors $\overline{T \cdot v} \ni 0$.
Indication : On pourra utiliser le fait suivant (sans démonstration) : si $\mathscr{P}(v)$ ne contient pas 0 alors il existe $(n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{Z}^s$ tel que pour tout $(a_1, \dots, a_s) \in P(v)$ on a $\sum_i n_i a_i > 0$. On utilisera $\lambda = \Lambda(n_1, \dots, n_s)$.

> Considérons
>
> $$\lambda(t)v = \sum_{\chi \in P(v)} \chi(t^{n_1}, \dots, t^{n_s}) v_\chi = \sum_{\chi = (a_1, \dots, a_s) \in P(v)} t^{\sum_i n_i a_i} v_\chi.$$
>
> Vu l'hypothèse l'application régulière $\mathbb{C}^* \longrightarrow V$, $t \longmapsto \lambda(t) \cdot v$ se prolonge en une application régulière α de $\mathbb{C}$ dans V. De plus, $\alpha(0) = 0$. Donc 0 appartient à l'adhérence de $\alpha(\mathbb{C}^*)$ et donc à l'adhérence de $T \cdot v$.

c) Réciproquement on suppose que 0 appartient à $\mathscr{P}(v)$. Montrer que $0 \in \overline{T \cdot v}$.
Indication : Par définition, il existe des réels x_χ positifs et non tous nuls tels que $0 = \sum_{\chi \in P(v)} x_\chi \chi$. On admettra que l'on peut choisir les x_χ rationnels et même entiers.

> Complétons la famille $(v_\chi)_\chi$ en une base de V respectant la décomposition de la question 1.b. Notons z_χ la coordonnée (élément de la base duale) en v_χ pour cette base. Avec les notations de l'indication, considérons le monôme $f = \prod_{\chi \in P(v)} z_\chi^{x_\chi}$. On vérifie que $t \cdot z_\chi = \chi(t^{-1}) z_\chi$ pour l'action de T sur le dual V^*. Alors $t \cdot f = \prod_{\chi \in P(v)} \chi(t^{-x_\chi}) z_\chi^{x_\chi} = \left(\sum_{\chi \in P(v)} x_\chi \chi\right)(t)\, f = f$. Comme $f(v) = 1$, on en déduit que $f(t \cdot v) = 1$ pour tout $t \in T$. Donc $f(x) = 1$ pour tout $x \in \overline{T \cdot v}$. Or $f(0) = 0$. Donc $0 \notin \overline{T \cdot v}$.

3° Étude de la singularité en 0

On suppose dorénavant que T_v est trivial et que $\overline{T \cdot v}$ contient 0. On pose $X = \overline{T \cdot v}$.
a) On considère l'action de T sur $\mathbb{C}[X]$ par changement de variables. Soit $\chi \in \mathrm{X}^*(T)$. Montrer que l'application $\mathbb{C}[X]_\chi \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \longmapsto f(v)$ est injective.

> Cette application est linéaire. Soit f dans son noyau. Alors $f(t \cdot v) = \chi(t)^{-1} f(v) = 0$. Donc f est nulle sur $T \cdot v$ et donc sur X. Donc $f = 0$.

Soit $S = \{\chi \in \mathrm{X}^*(T) \ : \ \mathbb{C}[X]_\chi \neq \{0\}\}$.
Montrer que, pour tout $\chi \in S$, $\mathbb{C}[X]_\chi$ est de dimension 1 et que $\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{\chi \in S} \mathbb{C}[X]_\chi$.

> La dimension de $\mathbb{C}[X]_\chi$ est inférieure ou égale à 1, puisqu'il s'injecte dans $\mathbb{C}$. Or par définition de S, cet espace est non nul. Donc pour tout $\chi \in S$, $\mathbb{C}[X]_\chi$ est de dimension 1.

b) Montrer que $X//T$ est réduit à un point.

> L'anneau des invariants est $\mathbb{C}[X]_0$. On vient de voir qu'il est de dimension au plus 1. Il est donc réduit aux fonctions constantes. Par définition, cela signifie que $X//T$ est réduit à un point.

Montrer que $\{0\}$ est l'unique orbite fermée de X.

> D'après l'hypothèse, 0 appartient à X et $\{0\}$ est une orbite de T. C'est donc une orbite fermée de X.
> Comme $X//T$ est réduit à un point, X contient une unique orbite fermée de T.
> Finalement, $\{0\}$ est l'unique orbite fermée de X.

c) On admettra que l'ensemble des points singuliers est stable par l'action de T. Montrer que X est lisse si et seulement si X est lisse en 0.

> Une direction est triviale. Supposons maintenant que X est lisse en 0. Soit X^{sing} le lieu des points singuliers de X. Il s'agit de montrer que X^{sing} est vide. Supposons par l'absurde qu'il contient un point w. Comme X^{sing} est un fermé stable par l'action de T, il contient $\overline{T \cdot w}$. Or $\overline{T \cdot w}$ contient une T-orbite fermée (*cf.* cours). Par la question précédente cette orbite fermée ne peut être que $\{0\}$. Contradiction.

d) Fixons un $(n_1, \ldots, n_s)$ comme en 2°.b). Notons A_d, la somme des $\mathbb{C}[X]_\chi$ pour $\chi = (a_1, \ldots, a_d)$ satisfaisant $\sum_i n_i a_i = d$; si bien que $\mathbb{C}[X] = \oplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$. Soit $\mathfrak{m} = \oplus_{d>0} A_d$.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ et $f \in A_d$, on a

$$f\big((t^{n_1}, \ldots, t^{n_s}) \cdot v\big) = t^d f(v).$$

> C'est le même calcul qu'en 2.c.

En déduire que $\mathfrak{m}$ est l'idéal de $\{0\}$.

> Le quotient $\mathbb{C}[X]/\mathfrak{m}$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X]_0 = \mathbb{C}$. Donc $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal. C'est donc l'idéal d'un point x de X. Or pour tout $f \in A_d$ pour $d > 0$, $f(0) = 0$ (on passe à la limite dans l'égalité précédente). Donc pour tout $f \in \mathfrak{m}$, $f(0) = 0$. Alors $\mathfrak{m}$ est l'idéal de 0 dans X.

e) Justifier l'existence d'un supplémentaire E de $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}$ stable par T.

> Prenons une famille finie d'éléments de $\mathfrak{m}$ dont les classes engendrent $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ comme espace vectoriel. Chaque élément de cette famille est incluse dans un sous-espace vectoriel T-stable de dimension finie. La somme F de ces sous-espaces est stable par T, de dimension finie et $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = F/(\mathfrak{m}^2 \cap F)$. Comme T est réductif, il existe un supplémentaire E de $(\mathfrak{m}^2 \cap F)$ dans F qui soit stable par T. Alors E est aussi un supplémentaire de $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}$.

Montrer que E engendre $\mathbb{C}[X]$.
Indication : on montrera par récurrence sur d que A_d est inclus dans l'algèbre engendrée par E.

Notons A' l'algèbre engendrée par E. Comme $\mathfrak{m}^2 \subset \oplus_{d\geq 2} A_d$, E contient A_1. Supposons que $A_e \subset A'$ pour tout $0 < e < d$, avec $d \geq 2$. Soit $f \in A_d$. Soit $e \in E$ tel que $f - e \in \mathfrak{m}^2$. On écrit

$$f - e = \sum g_i h_i,$$

pour certains $g_i, h_i \in \mathfrak{m}$ homogènes tous non nuls (on peut enlever les éventuels 0). Alors, les dégrés des g_i et des h_i sont strictement inférieurs à d. Par récurence, chaque g_i et chaque h_i appartient à A'. Donc f appartient à A'.

f) Construire une immersion fermée et T-équivariante $\varphi\ :\ X \longrightarrow E^* = T_0X$.

Le comorphisme du φ que l'on cherche est un morphisme d'algèbre $\varphi^*\ :\ S^*E \longrightarrow \mathbb{C}[X]$. Considérons l'inclusion $E \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ qui est T-équivariante. Par propriété universelle de l'anneau des polynômes cette inclusion se prolonge en un unique morphisme d'algèbres $S^*E \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ T-équivariant. Notons $\varphi\ :\ X \longrightarrow E^*$ le morphisme de variétés affines associée.
Comme E est un système de générateurs de l'algèbre $\mathbb{C}[X]$, φ^* est surjectif et le morphisme φ est une immersion fermée.

g) Montrer que si X est lisse alors, il existe un isomorphisme T-équivariant entre X et T_0X.

Dans ce cas, $\varphi(X)$ est une sous-variété de T_0X de même dimension que T_0X. Alors $\varphi(X) = T_0X$ et φ est surjective. Comme φ est une immersion fermée, φ est l'isomorphisme cherché.