L3 - Math VI- Représentation des groupes finis- 2011-2012

Partiel - Le 19 avril 2012 - 2h00

Avertissement. La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction et de la précision des arguments employés.

1. Endomorphismes normaux

Soit $(E, (\cdot,\cdot))$ un espace hermitien de dimension n et u un endomorphisme de E.

a. Montrer que $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

b. Montrer qu'il existe une base unitaire $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

c. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de u répétées en accord avec leurs mulitplicités dans le polynôme caractéristique de u. Montrer que

$$\operatorname{tr}(u^*u) \geq |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2.$$

d. Montrer que u est normal si et seulement si

$$\operatorname{tr}(u^*u) = |\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2.$$

e. Si u est normal montrer que $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

f. Posons

$$C(u) = \{(\frac{(x, u(x))}{(x,x)} \ : \ x \in E, \ x \neq 0\}.$$

On suppose que u est normal. Montrer que $C(u)$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des valeurs propres de u.

Rappel. L'enveloppe convexe d'un ensemble $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ de nombres complexes est l'ensemble des nombres complexes de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i,$$

pour un n-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. C'est le plus petit polygône convexe de $\mathbb{C}$ qui contienne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

2. Sommes de Gauss

Soit n un entier naturel non nul. Considérons le goupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et pour tout entier k, notons $\bar{k}$ la classe de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

a. Pour tout k dans $\mathbb{Z}$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(1) k et n sont premiers entre eux ;

(2) il existe $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $a\bar{k} = \bar{1}$.

b. On pose

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{\bar{k} \ : \ k \wedge n = 1\}.$$

Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est un groupe pour la multiplication.

c. On suppose dorénavant que $n = p$ est premier. Soit φ un caractère additif de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et χ un carctère multiplicatif de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. On pose

$$G(\chi, \varphi) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \varphi(x)\chi(x).$$

Montrer que

$$|G(\chi, \varphi)| \leq p - 1.$$

L'objectif de la suite de l'exercice est d'utiliser les résultats vus en cours pour améliorer cette majoration.

d. Posons

$$f_\chi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \chi(x) & \text{si } x \neq \bar{0} \\ 0 & \text{si } x = \bar{0}, \end{cases} \end{array}$$

et notons $\hat{f}_\chi$ sa transformée de Fourrier. Montrer que

$$G(\chi, \varphi) = \hat{f}_\chi(\varphi).$$

e. On note $G(\chi, \cdot)$ la fonction de $\widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}$ qui à φ associe $G(\chi, \varphi)$. Sur $\mathbb{C}[\widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}]$, on considère le produit scalaire donné par la formule

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{p} \sum_{\psi \in \widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}} \overline{f_1(\psi)} f_2(\psi),$$

pour tout $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[\widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}]$.

Montrer que

$$\langle G(\chi, \cdot), G(\chi, \cdot) \rangle = p - 1.$$

f. Montrer que

$$\chi = \frac{1}{p} \sum_{\psi \in \widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}} G(\chi, \overline{\psi}) \psi.$$

g. Soit ω un racine primitive p-ième de l'unité. On note, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\varphi_m = (\bar{k} \longmapsto \omega^{mk}) \in \widehat{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$.

Soit a, b dans $\mathbb{Z}$ tels que a est premier avec p. Montrer que

$$G(\chi, \varphi_{ab}) = \overline{\chi(\overline{a})} G(\chi, \varphi_b).$$

h. On suppose dorénavant que χ n'est pas le caractère constant égal à un. Montrer que

$$\langle G(\chi, \cdot), G(\chi, \cdot) \rangle = \frac{p-1}{p} |G(\chi, \varphi_a)|^2.$$

i. En déduire que

$$|G(\chi, \varphi_a)| = \sqrt{p}.$$