Sous-groupes finis de SO_3 et polyèdres réguliers

1 Introduction

L'objet de cette note est de classifier les sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ainsi que les polyèdres réguliers. Comme nous le verrons les deux classifications sont intimement liées. Les idées directrices sont :

1. Il est plus facile de trouver des contraintes dans le monde des groupes. Pour preuve le petit nombre de groupes de cardinal plus petit que 12.

2. Il est plus facile de construire un polytope qu'un groupe.

2 Équation aux classes

On veut **classifier les sous-groupes finis de SO_3 à conjugaison près**. Tous les ops dans ce texte se rapporte à cet objectif.

Soit G un sous-groupe fini non trivial de SO_3.

2.1 Droites stables

S'il existe une droite stable par tous les éléments de G, alors G stabilise son orthogonal. Ainsi, ops que G est diagonal par blocs. On en déduit que G est un groupe cyclique ou diédral. Dorénavant, nous supposons que G ne stabilise aucune droite.

2.2 Axes

Les éléments non triviaux de G sont des rotations. On s'intéresse dans un premier temps à leurs axes. L'équation aux classes nous permettra de montrer que seuls 3 cardinaux sont possibles pour G.

Soit X l'ensemble des points de la sphère unité dont l'isotropie dans G est non triviale. Ce sont les points de norme un sur les axes des éléments non nuls de G. Alors, le groupe G agit sur X.

Soit $\Omega_1, \cdots, \Omega_s$ les orbites de G dans X. Soit $\nu_1, \cdots, \nu_s$ les cardinaux des isotropies des points des Ω_i. Soit $\#G$ le cardinal de G. Comme pour l'égalité de Burnside, on calcule de 2 façons le cardinal de

$$\{(x, g) \in X \times G - \{e\} \mid gx = x\}.$$

On obtient:

$$2 - \frac{2}{\#G} = \sum_{i=1}^{s} (1 - \frac{1}{\nu_i}). \tag{1}$$

On montre d'abord que $s = 2$ ou 3. On montre ensuite que si $s = 2$, G a une droite stable.

On a maintenant $s = 3$. On suppose que $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3$. Les valeurs possibles pour $(\#G, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ sont alors :

1. $(n, n/2, 2, 2)$. Dans ce cas, G a une droite stable.
2. $(12, 3, 3, 2)$,
3. $(24, 4, 3, 2)$,
4. $(60, 5, 3, 2)$.

3 Le cas $(12, 3, 3, 2)$

Soit $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Considérons l'orbite Ω_1. À conjugaison près, ops $N \in \Omega_1$. Le stabilisateur de N est un sous groupe de SO_2 isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. D'où le fait que la base du tétraèdre Ω_1 est un triangle équilatéral. Comme N ne joue pas de rôle particulier, on en déduit que Ω_1 est un tétraèdre régulier. L'existence et l'unicité en découle dans ce cas.

L'action de G sur Ω_1 est fidèle. On en déduit que $G \simeq \mathcal{A}_4$.

4 Le cas $(24, 4, 3, 2)$

On suppose $N \in \Omega_1$. On veut construire Ω_2. Par unicité, Ω_2 est stable par $x \mapsto -x$. L'action du stabilisateur de N sur Ω_2 montre que Ω_2 est la réunion de 2 carrés opposés. En changeant le point de Ω_1 utilisé on déduit que Ω_2 est un cube régulier C. L'existence et l'unicité en découle.

On a aussi montré que Ω_1 est un octaèdre régulier O.

Dans ce cas, $G \simeq S_4$. On montre cela en considérant l'action de G sur les paires de faces opposées ou encore sur les paires de sommets opposés de O.

5 Le cas $(60, 5, 3, 2)$

Ops $N \in \Omega_1$. On remarque que $-\Omega_1 = \Omega_1$ (seule orbite de cardinal 12). Le stabilisateur de N a cardinal 5. On en déduit que Ω_1 est la réunion de $\pm N$ et de 2 pentagones réguliers horizontaux opposés. Modulo conjugaison la seule liberté est la hauteur h à laquelle se situe ces parallélogrammes. En changeant de point N, on montre qu'une seule valeur de h est possible. Soit I le polytope ainsi obtenu.

Soit H le stabilisateur de I dans SO_3. Il est clair que H est fini, agit transitivement sur les sommets de I. De plus, les sommets de I sont des axes d'éléments de H. On en déduit que pour H on obtient $(60, 5, 3, 2)$ par élimination. En particulier, H a cardinal 60. On a montré l'existence et l'unicité dans ce cas. On a construit le dodécaèdre régulier D en prime.

Soit Ic l'orbite Ω_2. C'est un polytope à 20 sommets. Ces faces sont des pentagones réguliers.

Cette fois G est isomorphe à $\mathcal{A}_5$. Pour cela on considère l'ensemble des parties S des sommets de Ic telles que toute face de Ic contient un unique éléments de S. Il y en a 10. On les regroupes en 5 paires en utilisant $x \mapsto -x$. Ceci est l'ensemble à 5 éléments cherchés.

6 Polyèdres réguliers

On constate à chaque fois que le nombre de drapeaux du polyèdre est la moitié du cardinal de G. Ceci conduit à la définition de polyèdre régulier.