Nouvelle maquette du master 1 mathématiques générales (M1G)
à partir de septembre 2022

1 Architecture de la nouvelle maquette

Semestre d'automne

Le semestre d'automne du M1G est composé de quatre UE obligatoires de 6 crédits, d'une option de 3 crédits et d'une UE d'anglais de 3 crédits.

Anneaux, corps et représentations 6 ects	Analyse fonctionnelle 1 6 ects	Géométrie 6 ects	Probabilités et statistiques 6 ects	OptionA 3 ects	Anglais 3 ects

L'option sera à choisir parmi les trois UE suivantes :
- Compléments de géométrie différentielle
- Théorie analytique des nombres
- Équations différentielles, équations de transport

Semestre de printemps

Le semestre de printemps du M1G est composé de deux UE de 6 crédits, de cinq options de 3 crédits et d'un stage.

Algèbre linéaire avancée 6 ects	Analyse fonctionnelle 2 6 ects	Option P1 3 ects	Option P1 3 ects	Option P1 3 ects	Option P2 3 ects	Option P2 3 ects	Stage 3 ects

Il sera possible pour les étudiant·es qui souhaitent un parcours mixte avec le master 1 de mathématiques appliquées, statistiques (M1 MAS) de remplacer l'UE d'Analyse fonctionnelle 2 par l'UE d'Optimisation et/ou l'UE d'Algèbre linéaire avancée par l'UE de Classification et réseaux de neurones.

Les trois options P1 seront à choisir parmi les UE suivantes :
- Introduction à la cryptologie
- Processus stochastiques
- Équations aux dérivées partielles
- Théorie de Galois
- Combinatoire algébrique
- Dépendance multivariée et temporelle (M1 MAS)

Les deux options P2 seront à choisir parmi les UE suivantes :
- Groupes de lecture (deux thèmes proposés chaque année)
- Méthodes numériques pour la modélisation
- Histoire des mathématiques

2 Description des UE du M1G

2.1 Les UE de 6 crédits

2.1.1 Analyse fonctionnelle 1 (6 crédits, automne, UE obligatoire)

Format. CM : 24h ; TD : 36h.

Rappels et compléments de topologie des evn.

Espaces de Banach.

Espace dual. Exemples d'espaces duaux.

Séparabilité.

Espaces de fonctions continues. Théorème d'approximation de Weierstrass. Théorème d'Ascoli.

Espaces de Hilbert.

Généralités, théorème de projections sur un convexe fermé, théorème de représentation de Riez, adjoint, bases hilbertiennes.

Théorème de Lax-Milgram

Analyse de Fourier, éléments de distributions.

Quelques rappels sur la convolution. Résultats de régularisation.

Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbf{R}^d)$ et $L^2(\mathbf{R}^d)$. Espace de Schwartz $\mathcal{S}$.

Distributions tempérées. Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$.

Quelques éléments sur les distributions. (Définitions sans trop de topologie).

Exemples : fonctions dans L^1_{loc}, Dirac, valeur principale. Opérations. Formule des sauts. Suites de distributions.

Définition de $H^1(0,1)$ et $H^1_0(0,1)$

Applications à l'étude de quelques EDP.

Notion de solution élémentaire d'opérateurs différentiels à coefficients constants.

Notion de solution faible d'EDP.

Résolution de quelques EDP au sens classique et au sens faible : équations de Laplace, de la chaleur...

2.1.2 Anneaux, corps et représentations (6 crédits, automne, UE obligatoire)

Format. CM : 24h ; TD : 36h.

Anneaux factoriels et anneaux de polynômes

Anneaux factoriels. PGCD, PPCM, lemme de Gauss.

Anneaux principaux.

A factoriel => A[X] factoriel (et donc A[X1,...,Xn] factoriel). Anneaux de polynômes en plusieurs variables. Polynômes symétriques.

Résultant : Deux applications : théorème de Bézout faible et anneau des entiers algébriques.

Corps

Rappels sur les extensions de corps. Eléments algébriques et transcendants. Polynôme minimal. Extensions algébriques. Degré. Extensions finies. Corps de rupture.

Corps de décomposition. Classification des corps finis (construction vue en L3).

Corps algébriquement clos. Clôture algébrique.

Caractéristique. Morphisme de Frobenius.

Algorithme de Berlekamp (en TD).

Représentations des groupes finis

Caractères des groupes abéliens finis.

Caractères des groupes cycliques.

Relations d'orthogonalité.

Théorème de prolongement des caractères ; application à la structure des groupes abéliens finis.

Groupe dual et bidual, transformation de Fourier et convolution.

Représentations linéaires d'un groupe fini.

Définition, morphisme et isomorphisme de représentations, sous-représentation, représentation irréductible ; exemples (groupe symétrique, représentations régulières, groupes de petit ordre...).

Construction de nouvelles représentations : somme directe, quotient par une sous-représentation, représentation duale, espace des applications linéaires entre deux représentations.

Théorème de Maschke, décomposition d'une représentation comme somme de représentations irréductibles. Lemme de Schur, le cas des groupes abéliens fini (représentation irréductibles de dimension 1).

Caractère d'une représentation. Fonctions centrales, opérations sur les caractères. Relations d'orthogonalité.

Caractérisation d'une représentation par son caractère. Décomposition de la représentation régulière. Table de caractères.

2.1.3 Géométrie (6 crédits, automne, UE obligatoire)

Format. CM : 24h ; TD : 36h.

Autour des courbes et des surfaces

Courbes paramétrées (coniques, cycloïdes, spirales). Propriétés métriques des courbes (longueur, courbure, torsion)

Formes différentielles et théorème de Green-Riemann.

Propriétés globales des courbes (indice d'un lacet, inégalité isopérimétrique)

Surfaces paramétrées (surfaces réglées, surfaces de rotation), plan tangent et position relative.

Sous-variétés

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

Sous-variétés et applications différentiables. Espace tangent.

Multiplicateurs de Lagrange et minimisation sous contrainte.

(Classification des surfaces ?)

Introduction aux variétés. Variétés différentiables, partition de l'unité, calcul différentiel sur les variétés... Espace tangent. On se limitera à des exemples élémentaires (tore, sphère, exemples de groupes de Lie)

2.1.4 Probabilités et statistiques (6 crédits, automne, UE obligatoire)

Format. CM : 24h ; TD : 36h.

Rappels

Rappels rapides du formalisme des probabilités et des théorèmes-limites (notions de convergence, loi des grands nombres, théorème central limite).

Rappels sur vecteurs gaussiens.

Théorème de Cochran. Théorème central limite dans $\mathbf{R}^n$.

Statistiques

Modèle statistique. Notion d'estimateur et d'intervalle de confiance. Exemples : estimateurs de la moyenne et de la variance. Estimation par maximum de vraisemblance : définition et exemples.

Distributions d'échantillonnage. Loi du khi-deux. Loi de Student. Loi de Fisher. Intervalles de confiance pour la moyenne. Cas des grands échantillons, cas des petits échantillons gaussiens.

Tests paramétriques (exemple : test de la moyenne). Tests d'ajustement (tests du khi-deux, tests de Kolmogorov-Smirnov). Exemples d'utilisation.

Introduction au modèle linéaire gaussien : calculs par moindres carrés, régression linéaire, exemples d'utilisation.

Probabilités

Chaînes de Markov à espace d'états dénombrable :

Définition, temps d'arrêt, propriété de Markov (fort et faible).

Récurrence, transience, classification des états.

Mesures invariantes, convergence vers l'équilibre (théorème ergodique et convergence en loi) ; lien avec le théorème de Perron-Frobenius.

Ouvertures possibles : vitesses de convergence, temps de mélange.

Exemples : marches aléatoires dans $\mathbf{Z}^d$, processus de branchement (de type Galton-Watson).

2.1.5 Analyse fonctionnelle 2 (6 crédits, printemps, UE obligatoire)

Format. CM : 24h ; TD : 36h.

Compléments sur les espaces de Banach. Lemme de Baire et applications : théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, du graphe fermé. Dual, bidual.
Théorèmes de Hahn-Banach et applications. Théorème de prolongement de Hahn-Banach. Ensemble convexes. Théorème de séparation de Hahn-Banach. Applications : norme de la transposée d'une application linéaire continue, séparation des points, caractérisation de la densité par l'orthogonal. Dualité des espaces L^p.
Convergences faibles et topologies faibles. Définitions et généralités. Compacité pour la topologie pré-faible (Banach-Alaoglu), applications, exemples. Espaces de Banach réflexifs.
Introduction aux opérateurs compacts et à la théorie spectrale des opérateurs bornés sur un Hilbert.

2.1.6 Algèbre linéaire avancée (6 crédits, printemps, UE obligatoire)

Format. CM : 24h ; TD : 36h.

Deux objectifs : familiariser les étudiants avec le calcul matriciel sur un anneau euclidien et approfondir l'étude des endomorphismes d'un espace vectoriel. La notion de module sur un anneau euclidien, qui unifie naturellement ces deux thèmes, pourra être illustrée sous forme d'exercices, sans toutefois faire l'objet d'une présentation systématique.

Matrices à coefficients dans un anneau euclidien

Inversibilité. Échelonnement par opérations élémentaires, forme normale de Smith.

Applications (en TD) : exemples de résolution des systèmes linéaires diophantiens, engendrement de $GL_n(A)$ et $SL_n(A)$.

Théorème de structure des groupes abéliens de type fini (déjà vu pour les groupes finis au S7 par une autre méthode).

Réduction des endomorphismes (sur un corps K)

Algèbre des polynômes en un endomorphisme, réduction de Dunford-Jordan : points de vue géométrique (lemme des noyaux) et algorithmique (méthode de Newton).

Endomorphisme nilpotents : noyaux emboîtés, injections de Frobenius, théorème de Jordan.

Endomorphismes cycliques. Réduction de Frobenius (invariants de similitudes) : point de vue géométrique. Le calcul effectif des invariants de similitude, via le calcul matriciel sur K[X], sera illustré en TD.

Les théorèmes d'algèbre linéaire et bilinéaire sous le prisme des groupes

Reformulation des théorèmes de structure comme classification des orbites pour une action sur les matrices (certains exemples seront évoqués uniquement en TD) :

action de $GL(n)$ sur K^n et base incomplète ;

action de $GL(m) \times GL(n)$ sur $M_{m,n}$, pivot de Gauss et théorème du rang ;

action de $GL(m)$ sur $M_{m,n}$ par produit et pivot de Gauss ; le noyau comme invariant total ; action de $GL(n)$ sur $M_{m,n}$ par produit, image (en TD) ;

action de $GL(n)$ sur M_n par conjugaison et réduction des endomorphismes ;

action de $GL(n)$ sur S_n par congruence et classifications des formes quadratiques (rang sur $\mathbf{C}$, signature sur $\mathbf{R}$ et théorème de Sylvester, rang + discriminant sur $\mathbf{K}$ fini) ;

action de $O(n)$ sur $S_n(R)$ et théorème spectral ; version hermitienne ;

action de $O(n)$ sur $GL(n)$ par produit à droite et décomposition polaire ;

action de $O(m) \times O(n)$ sur $M_{m,n}$ et décomposition en valeurs singulières (en TD).

Applications de la topologie en algèbre linéaire

Raisonnement par densité : théorème de Cayley-Hamilton ; polynôme caractéristique d'un produit.

Caractérisation des classes de similitudes de matrices diagonalisables (semi-simples) par leur fermeture.

Compléments sur l'exponentielle de matrices. Applications : lien entre matrices nilpotentes et unipotentes, entre matrices symétriques et symétriques définies positives (en TD).

Racine carrée d'une matrice symétrique positive. Décomposition polaire. Applications : ellipsoïde de John-Loewner ; maximalité du groupe orthogonal parmi les sous-groupes compacts du groupe linéaire (en TD).

Composantes connexes des groupes linéaires complexes et réels (et avatars), des groupes orthogonaux et unitaires : par le pivot de Gauss ou la réduction, par la décomposition polaire.

2.2 Les UE de 3 crédits optionnelles

2.2.1 Compléments de géométrie différentielle (3 crédits, automne, UE optionnelle)

Format. CM : 12h ; TD : 18h.

Aspect métrique des sous-variétés (première forme fondamentale).
Courbures et Theorema Egregium (seconde forme fondamentale, courbures principales/de Gauss/moyenne).
Courbes tracées sur les surfaces, géodésiques.
Champs de vecteurs, formule de Stokes.
Champs de vecteurs, flot, dynamique ; dérivée, crochet de Lie, EDO ; difféomorphisme.
Formule de Gauss-Bonnet.

2.2.2 Théorie analytique des nombres (3 crédits, automne, UE optionnelle)

Format. CM : 12h ; TD : 18h.

Ce cours offre une introduction aux méthodes analytiques en théorie des nombres. Une première partie est consacrée à l'étude classique des séries de Dirichlet et une deuxième à l'étude de la fonction zêta de Riemann et à ses propriétés et à leur application à la répartition des nombres premiers.
Séries de Dirichlet de fonctions arithmétiques
Séries des Dirichlet, Produits eulériens, Convolution de fonctions arithmétiques, Séries de Dirichlet de fonctions arithmétiques classiques, Théorèmes taubériens et applications.
Fonction zêta de Riemann et nombres premiers
Premières propriétés, Formule intégrale et continuation, Fonction Gamma et équation fonctionnelle, Pôle et zéros triviaux, Quelques valeurs particulières, Théorème des nombres premiers, Fonction L de Dirichlet et répartition des nombres premiers

2.2.3 Équations différentielles, équations de transport (3 crédits, automne, UE optionnelle)

Format. CM : 12h ; TD : 18h.

Rappels et compléments sur les équations différentielles.
Théorie de Cauchy-Lipschitz. Théorème de sortie de tout compact. Propriétés qualitatives.
Dépendance par rapport aux données initiales et à des paramètres. Définition et propriétés du flot. Stabilité.
Équations aux dérivées partielles d'ordre 1.
Équations de transport linéaires. Méthode des caractéristiques. Solutions classiques et solutions faibles.

2.2.4 Introduction à la cryptologie (3 crédits, printemps, UE optionnelle)

Format. CM : 12h ; TD : 9h ; TP : 9h.

Le but de ce cours est de fournir les notions et les outils nécessaires pour bien appréhender les enjeux de la cryptographie moderne. Pour cela, nous étudierons les différents principes sur lesquels reposent les protocoles modernes (ex. AES, RSA, ElGamal, etc.) ainsi que les attaques contre ces protocoles (cryptanalyse). Une partie du cours sera dévolue à la programmation sur le logiciel SAGE de certains protocoles et d'attaques sur ces protocoles.

1. Aperçu historique
2. Cryptologie moderne
3. Outils mathématiques : arithmétique de base
4. Protocole de signature RSA
5. Outils mathématiques : groupes cycliques
6. Protocole de chiffrement de Elgamal
7. Primitive cryptologique : fonctions de hachage
8. Protocoles cryptologiques avancés

2.2.5 Processus stochastiques (3 crédits, printemps, UE optionnelle)

Format. CM : 12h ; TD : 18h.

Espérance conditionnelle. Exemples de lois conditionnelles (Gaussien, lois à densité)

Martingales à temps discret. Théorèmes de convergence pour les martingales : p.s., L^p. Théorème(s) d'arrêt.

Application des martingales. Par exemple : Galton-Watson, ruine du joueur, urnes de Polya, Azuma–Hoeffding, fonctions harmoniques...

Construction du mouvement brownien.

2.2.6 Équations aux dérivées partielles (3 crédits, printemps, UE optionnelle)

Format. CM : 12h ; TD : 18h.

L'objectif de cette UE est de présenter divers modèles d'équations aux dérivées partielles et d'étudier certaines de leurs propriétés à l'aides d'outils d'analyse variés.

Pour chaque modèle, on pourra s'intéresser aux solutions classiques et/ou aux solutions faibles.

Outils mathématiques.

Espaces de Sobolev, analyse géométrique. Séries de Fourier, transformée de Fourier. Théorie spectrale.

Exemples d'EDP.

— Lois de conservations scalaires (méthode des caractéristiques, solutions faibles).

— Introduction aux problèmes elliptiques d'ordre 2. Fonction de Green. Formulation variationnelle. Principe du maximum.

— Équation de la chaleur, équations paraboliques. Méthodes à la Fourier. Séparation de variables.

— Équation des ondes. Méthodes à la Fourier. Séparation de variables.

2.2.7 Introduction à la topologie algébrique (3 crédits, printemps, UE optionnelle)

Format. CM : 12h ; TD : 18h.

Homotopie des applications, groupe fondamental, (espaces simplement connexes), type d'homotopie, (espaces contractiles), rétracte, rétracte par déformation, Théorème de Seifert-van Kampen.

Le groupe fondamental du cercle.

Revêtements, relèvement des applications, action du groupe fondamental sur la fibre d'un revêtement, automorphismes du revêtement et action de groupe d'automorphismes, classification des revêtements, revêtement universel.

2.2.8 Théorie de Galois (3 crédits, printemps, UE optionnelle)

Format. CM : 12h ; TD : 18h.

Cadre : extensions finies.

Rappels sur les extensions de corps : extensions monogènes, extensions de décomposition.

Polynômes et extensions séparables. Corps parfaits.

Groupe des automorphismes d'une extension. Extensions normales.

Extensions galoisiennes. Groupes de Galois d'une extension galoisienne, d'un polynôme séparable. Lien avec les permutations des racines d'un tel polynôme.

Correspondance de Galois.

Résolubilité par radicaux des équations algébriques.

Théorème de l'élément primitif (toute extension finie séparable est monogène).

Exemples, applications :

(i) les problèmes de constructions à la règle et au compas. Dans le détail : raffinement du théorème de Wantzel (un nombre algébrique est constructible s'il existe une extension de degré une puissance de 2 contenant tous ses conjugués) et caractérisation des polygones réguliers constructibles.

(ii) les corps finis.

2.2.9 Combinatoire algébrique (3 crédits, printemps, UE optionnelle)

Format. CM : 12h ; TD : 18h.

Dénombrements en algèbre linéaire

Le dénombrement d'objets standards associés à des espaces vectoriels sur un corps fini de cardinal q permet de mettre en œuvre les grands théorèmes et apporte des applications inattendues :

Nombre de bases, cardinal du groupe linéaire (et avatars).

Nombre de sous-espaces de dimension donnée. Formule du binôme quantique. Application : formule du triple produit de Jacobi.

Nombre de points sur certaines quadriques. Application : loi de réciprocité quadratique.

Nombre de matrices nilpotentes.

Séries génératrices

Anneau des séries formelles. Séries génératrices ordinaire et exponentielle associées à une suite d'entiers.

Exemples (surtout en TD) :

nombres de Fibonacci ; nombres de Catalan ;

nombre de dérangements, d'involutions ; statistique du nombre d'inversions ;

partitions, partitions en parts distinctes et partitions en parts impaires.

Formules du triple produit de Jacobi. Applications : théorème des nombres pentagonaux d'Euler, théorème des deux carrés...

2.2.10 Histoire des mathématiques (3 crédits, printemps, UE optionnelle)

Format. CM : 22,5h ; TP : 7,5h ; projet.

L'UE a une ambition double : d'une part, donner aux étudiant·es des notions historiques et chronologiques générales à travers quatre blocs de cours correspondant à l'histoire de certaines sous-disciplines mathématiques (algèbre et théorie des nombres ; analyse ; géométrie ; probabilités et statistiques), auquel s'ajoute un bloc sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques. D'autre part, il s'agit de faire travailler les étudiant·es sur des textes historiques, sélectionnés au préalable par les enseignants et portant sur un théorème, une notion, un objet, etc. Il s'agit d'un travail continu (et suivi par les enseignants) tout au long du semestre. Les étudiant·es travailleront en groupe ; ils ou elles écriront un petit rapport sur le sujet choisi et présenteront leurs résultats devant la classe.

2.2.11 Méthodes numériques pour la modélisation (3 crédits, printemps, UE optionnelle)

Format. CM : 6h ; TP : 24h ; projet.

Initiation au langage de programmation PYTHON utilisé en recherche et à l'agrégation dans les options A et B de l'épreuve de modélisation.

Méthodes numériques au programme général de l'agrégation.

Résolution de systèmes d'équations linéaires (décompositions LU, décomposition en valeurs singulières)

Méthodes itératives de résolution approchée d'équations réelles et vectorielles (méthode de la puissance, méthode du gradient à pas optimal, dichotomie, méthode de Newton)

Intégration numérique (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo)

Approximation de fonctions numériques (polynôme de Lagrange)

Équations différentielles ordinaires (méthode d'Euler explicite)

Transformée de Fourier discrète (transformée de Fourier rapide)

Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire

Loi faible et loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

Outils de statistique

2.2.12 Groupes de lecture (3 crédits, printemps, UE optionnelle)

Format. TD : 16h par groupe de lecture.

Proposition de deux groupes de lecture sur des thématiques différentes. Thèmes à définir chaque année, choisis parmi les propositions reçues.

Après quelques heures de cours introductives, les étudiant·es, encadré·es par les enseignant·es, travaillent sur un des thèmes proposés, rédigent un rapport et font une soutenance.

2.2.13 Stage en M1 Mathématiques et applications (3 crédits, printemps)

Format. CM : 4,5h ; TP : 4,5h.

Pour tou·tes les étudiant·es du M1G souhaitant préparer l'agrégation l'année suivante, stage en établissement scolaire de deux semaines. Possibilité dans le cas d'un autre projet de poursuite d'étude de remplacer par un stage d'une autre nature.

Les CM sont une introduction à la didactique des mathématiques. Les TP sont des TP d'introduction à LaTeX.