

# Sous-groupes finis de $\text{SO}_3$ et polyèdres réguliers

## 1 Introduction

L'objet de cette note est de classifier les sous-groupes finis de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  (et  $\text{O}_3(\mathbb{R})$ ) ainsi que les polyèdres réguliers.

## 2 Définition des groupes

Si  $\delta$  est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  et  $\theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \simeq [0, 2\pi[$ , on note  $\rho_{\delta, \theta}$  la rotation d'axe  $\delta$  et d'angle  $\theta$ . Rappelons que tous les éléments de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  sont des rotations.

Notons  $\delta_z = \mathbb{R}(0, 0, 1)$  et  $\delta_y = \mathbb{R}(0, 1, 0)$ .

Voici quelques sous-groupes de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ .

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $C_n$  le sous-groupe de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  engendré par  $\rho_{\delta_z, \frac{2\pi}{n}}$ . Il est isomorphe au groupe cyclique  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $D_n$  le sous-groupe de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  engendré par  $\rho_{\delta_z, \frac{2\pi}{n}}$  et  $\rho_{\delta_y, \pi}$ . Il est isomorphe au groupe diédral d'ordre  $2n$ .
3. Soit  $\mathcal{T}_0$  l'enveloppe convexe des quatre points suivants :

$$\begin{array}{ll} A = (1, 1, 1) & B = (1, -1, -1) \\ C = (-1, 1, -1) & D = (-1, -1, 1) \end{array}$$

Soit  $G_{\mathcal{T}_0}$  le sous-groupe des rotations qui stabilisent  $\mathcal{T}_0$ .

4. Soit  $\mathcal{C}_0$  l'enveloppe convexe des huit points suivants :

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

Soit  $G_{\mathcal{C}_0}$  le sous-groupe des rotations qui stabilisent  $\mathcal{C}_0$ .

5. Soit  $\mathcal{I}_0$  l'enveloppe convexe des douze points suivants :

$$\begin{array}{l} (0, \pm 1, \pm \phi) \\ (\pm \phi, 0, \pm 1) \\ (\pm 1, \pm \phi, 0), \end{array}$$

où  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est le nombre d'or. Soit  $G_{\mathcal{I}_0}$  le sous-groupe des rotations qui stabilisent  $\mathcal{I}_0$ .

Nous allons montrer le résultat suivant.

**Théorème 1.** *Tout sous-groupe fini  $G$  de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  est conjugué dans  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  à un des groupes suivants :  $C_n$  ( $n \geq 1$ ),  $D_n$  ( $n \geq 2$ ),  $G_{\mathcal{T}_0}$ ,  $G_{\mathcal{C}_0}$  et  $G_{\mathcal{I}_0}$ . De plus,  $G_{\mathcal{T}_0}$ ,  $G_{\mathcal{C}_0}$  et  $G_{\mathcal{I}_0}$  sont respectivement isomorphes à  $A_4$ ,  $S_4$  et  $A_5$ .*

Les idées directrices sont :

1. Il est plus facile de trouver des contraintes dans le monde des groupes.  
Pour preuve le petit nombre de groupes de cardinal plus petit que 12.
2. Il est plus facile de construire un polytope qu'un groupe.

### 3 Équation aux classes

Soit  $G$  un sous-groupe fini non trivial de  $\text{SO}_3$ . On veut montrer que  $G$  est conjugué à un des groupes du théorème. Rappelons que

$$g\rho_{\delta, \theta}g^{-1} = \rho_{g\delta, \theta},$$

pour tout  $g \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ , tout axe  $\delta$  et tout angle  $\theta$ .

#### 3.1 Droites stables

Supposons qu'il existe une droite vectorielle stable par tous les éléments de  $G$ . Alors quitte à conjuguer  $G$  on peut supposer que cette droite est  $\delta_z$ . L'orthogonal de  $\delta_z$  est aussi stable par  $G$  ; si bien que  $G$  est un sous-groupe de

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

On en déduit facilement que  $G$  est conjugué à un  $C_n$  ou un  $D_n$ .

Dorénavant, nous supposons que  $G$  ne stabilise aucune droite.

#### 3.2 Axes

Les éléments non triviaux de  $G$  sont des rotations. On s'intéresse dans un premier temps à leurs axes. Considérons une rotation  $\rho$  qui ne soit pas l'identité. Son axe intersecte la sphere unité en deux points diamétralement

opposés qui sont les seuls points de la sphère fixés par  $\rho$ . L'équation aux classes nous permettra de montrer que seuls 3 cardinaux sont possibles pour  $G$ .

Soit  $X$  l'ensemble des points de la sphère unité dont l'isotropie dans  $G$  est non triviale. Ce sont les points de norme un sur les axes des éléments non triviaux de  $G$ . En particulier  $X$  est fini et stable par l'action de  $G$ .

Soit  $\Omega_1, \dots, \Omega_s$  les orbites de  $G$  dans  $X$ . Soit  $\nu_1, \dots, \nu_s$  les cardinaux des isotropies des points des  $\Omega_i$ . Soit  $\#G$  le cardinal de  $G$ . Comme pour l'égalité de Burnside, on calcule de 2 façons le cardinal de

$$\{(x, g) \in X \times G - \{\text{Id}\} \mid gx = x\}.$$

On obtient:

$$2 - \frac{2}{\#G} = \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right). \quad (1)$$

Comme  $\nu_i \geq 2$ ,  $1 - \frac{1}{\nu_i} \geq \frac{1}{2}$ . Donc  $\sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) \geq \frac{s}{2}$ . Par ailleurs,  $2 - \frac{2}{\#G} < 2$ . On obtient donc  $\frac{s}{2} < 2$ . Donc  $s = 1, 2$  ou  $3$ .

Supposons  $s = 1$ . Puisque  $G$  est non trivial  $2 - \frac{2}{\#G} \geq 1$ . Or  $1 - \frac{1}{\nu_1} < 1$ . Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

Supposons que  $s = 2$ . L'équation (1) est alors équivalent à

$$2 = \frac{\#G}{\nu_1} + \frac{\#G}{\nu_2}.$$

Or  $\frac{\#G}{\nu_i}$  est le cardinal de  $\Omega_i$ ; il est donc  $\geq 1$ . Ainsi  $\#\Omega_1 = \#\Omega_2 = 1$ . Comme  $X$  est stable par  $-\text{Id}$ ,  $X$  est constitué de deux points diamétralement opposés. Alors  $G$  stabilise une droite. Contradiction. En fait ce cas correspond à  $G = C_n$ .

On a maintenant  $s = 3$ . On suppose que  $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3$ , quitte à renuméroter. L'équation devient alors

$$1 + \frac{2}{\#G} = \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3}.$$

En particulier,  $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} > 1$ . Donc au moins un  $\nu_i$  est de cardinal 2. Vu  $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3$ . On a  $\nu_3 = 2$ . On a alors  $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} > \frac{1}{2}$ . On en déduit que  $\nu_2 = 2$  ou  $3$ . Le cas  $\nu_2 = 2$  donne  $(\#G, \nu_1, \nu_2, \nu_3) = (n, n/2, 2, 2)$  avec  $n$  pair. Dans le cas  $\nu_2 = 3$ , l'équation devient

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{\#G} = \frac{1}{\nu_1}.$$

On obtient  $\nu_1 < 6$ . Comme  $\nu_1 \geq \nu_2$ , on a  $\nu_1 = 3, 4$  ou  $5$ . On tire ensuite  $\#G$ . Finalement, les valeurs possibles pour  $(\#G, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$  sont alors :

1.  $(n, n/2, 2, 2)$  (avec  $n$  pair),
2.  $(12, 3, 3, 2)$ ,
3.  $(24, 4, 3, 2)$ ,
4.  $(60, 5, 3, 2)$ .

## 4 Le cas $(n, n/2, 2, 2)$

Rappelons que le stabilisateur dans  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  d'un point non nul de  $\mathbb{R}^3$  est isomorphe à  $\text{SO}_2(\mathbb{R})$  c'est-à-dire à  $S^1$  le groupe des nombres complexes de module un.

Quitte à conjuguer  $G$  on peut supposer que  $(0, 0, 1)$  appartient à  $\Omega_1$ . Le stabilisateur  $H$  de ce point est alors un sous-groupe de  $G$  de cardinal  $n/2$  isomorphe à un sous-groupe de  $S^1$ . Ainsi  $H = \{\rho_{\delta_z, \frac{4k\pi}{n}} : k = 0, \dots, n/2 - 1\}$ .

Soit  $B$  un point de  $\Omega_2$  et  $\rho$  l'élément non trivial du stabilisateur de  $B$  : c'est la rotation d'angle  $\pi$  et dont l'axe  $\delta$  contient  $B$ . Comme  $H$  est d'indice 2 dans  $G$ , il est distingué. En particulier  $\rho$  normalise  $H$ . On en déduit que  $\rho$  stabilise globalement  $\delta_z$  et donc que  $\delta$  et  $\delta_z$  sont orthogonaux. Quitte à conjuguer  $G$  par un élément du stabilisateur de  $(0, 0, 1)$  dans  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ , on peut supposer que  $\delta = \delta_y$ . Alors  $G$  est égal à  $D_n$ .

## 5 Le cas $(12, 3, 3, 2)$

Quitte à conjuguer  $G$  on peut supposer que  $N = (0, 0, 1)$  appartient à  $\Omega_1$ . Le stabilisateur  $H$  de  $N$  est un sous-groupe de  $\text{SO}_2$  isomorphe à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

Mise à part  $N$  et  $-N$  qui sont fixés par  $H$ , toutes les orbites de  $H$  dans  $S^2$  sont de cardinal 3. Comme  $\Omega_1$  est de cardinal 4 et est stable par  $H$ ,  $\Omega_1$  est la réunion de  $\{N\}$  et de la  $H$ -orbite  $\{A, B, C\}$  de cardinal 3. Les 3 points  $A$ ,  $B$  et  $C$  appartiennent à un même plan orthogonal à  $\delta_z$  et forment un triangle équilatéral.

L'isobaricentre de  $(N, A, B, C)$  est fixé par tous les éléments de  $G$  : c'est donc l'origine de  $\mathbb{R}^3$ . On en déduit que  $(A, B, C)$  sont dans le plan  $z = -\frac{1}{3}$ . Comme  $(A, B, C)$  forment un triangle équilatéral inscrit dans la sphère, ceci le détermine modulo l'action du stabilisateur de  $N$  dans  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ .

Soit  $A = (0, x, -\frac{1}{2})$ , où  $x$  est choisi pour que  $A \in S^2$ . Ainsi  $x^2 + \frac{1}{4} = 1$ . Prenons par exemple  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Posons  $B = \rho_{\delta_z, \frac{2\pi}{3}}(A)$  et  $C = \rho_{\delta_z, -\frac{2\pi}{3}}(A)$ . Notons  $\mathcal{T}$  le tétraèdre dont les sommets sont les 4 points  $N$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Soit  $G_{\mathcal{T}}$  le groupe des rotations qui préservent  $\mathcal{T}$ .

**Attention.** Lorsque l'on applique le raisonnement précédent avec  $A$  à la place de  $N$ , on obtient que le triangle  $(N, B, C)$  est équilatéral. Le problème est que ce raisonnement présuppose l'existence du groupe et ne permet donc pas de la montrer.

Le groupe  $G_{\mathcal{T}}$  contient les rotations  $\rho_{\delta_z, \pm \frac{2\pi}{3}}$ . Un simple calcul montre que  $NA = NB = NC = AB = AC = BC$ . Alors  $G_{\mathcal{T}}$  contient les rotations  $\rho_{\delta, \pm \frac{2\pi}{3}}$  où  $\delta$  est un des trois axes passant par  $A$ ,  $B$  ou  $C$ . En particulier  $G_{\mathcal{T}}$  a cardinal au moins 9 ( $= 1 + 4 * 2$ ) éléments et agit transitivement sur les 4 sommets de  $G_{\mathcal{T}}$ . Par élimination,  $G_{\mathcal{T}}$  est nécessairement dans le cas de la section 5 et a 12 éléments. Nous avons montré l'existence.

L'unicité découle aussi de ce que nous avons fait. En effet, nous avons montré que tout groupe  $G$  comme dans la section 5 est conjugué à un sous-groupe de  $G_{\mathcal{T}}$ . Or, nous venons de montrer que  $G_{\mathcal{T}}$  est de cardinal 12 tout comme  $G$ .

Nous voulons à présent décrire les 3 éléments de  $G_{\mathcal{T}}$  dont nous avons prouvé l'existence de manière indirecte. Soit  $\delta$  la droite passant par les milieux de  $NA$  et  $BC$ . Alors  $\delta$  est une droite vectorielle, puisque 0 est l'isobarycentre de  $(N, A, B, C)$ . La rotation  $\rho_{\delta, \pi}$  stabilise  $\mathcal{T}$  ; plus précisément elle échange  $N$  et  $A$ , puis  $B$  et  $C$ .

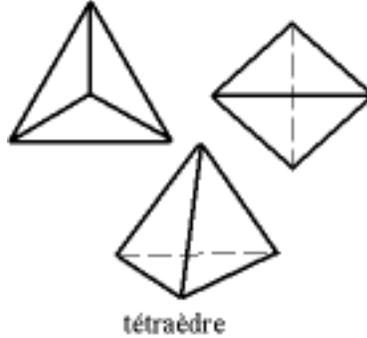


Figure 1: Tétraèdre

L'action de  $G$  sur  $\Omega_1$  est fidèle. On en déduit que  $G \simeq \text{Bij}(A, B, C, N) \simeq \mathcal{S}_4$ . Nous avons vu que l'image est constituée de l'identité, les 8 trois cycles et les 3 composés de 2 transpositions à supports disjoints : l'image n'est autre que  $\mathcal{A}_4$ . Ainsi  $G$  est isomorphe à  $\mathcal{A}_4$ .

Résumons les étapes de la preuve ci-dessus :

1. L'orbite  $\Omega_1$  est unique modulo l'action de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ ;
2. Le stabilisateur de  $\Omega_1$  dans  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$  a le même cardinal que  $G$ ;
3. On en déduit l'existence et l'unicité de  $G$  ;
4. On montre que  $G$  est isomorphe à  $\mathcal{A}_4$ .

## 6 Le cas $(24, 4, 3, 2)$

Supposons qu'un groupe  $G$  réalise ces cardinaux. On peut supposer  $N \in \Omega_1$ . Le stabilisateur de  $N$  dans  $G$  est engendré par  $\rho_{\delta_z, \frac{\pi}{2}}$ . On veut construire  $\Omega_2$ . Il est clair que  $-\Omega_2$  est une orbite de  $G$  de cardinal 8 ; par unicité  $-\Omega_2 = \Omega_2$  et  $\Omega_2$  est stable par  $x \mapsto -x$ . L'action du stabilisateur de  $N$  sur  $\Omega_2$  montre que  $\Omega_2$  est la réunion de 2 carrés opposés : un  $(A, B, C, D)$  a une hauteur  $h > 0$  et  $(-D, -C, -B, -A)$ . En changeant le point de  $\Omega_1$  utilisé on déduit que  $\Omega_2$  est un cube régulier  $\mathcal{C}$ .

Le stabilisateur  $G_{\mathcal{C}}$  de  $\mathcal{C}$  contient :

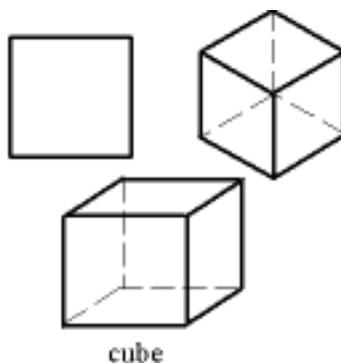


Figure 2: Cube

1. L'identité ;
2. Les  $3 * 3$  rotations dont l'axe est engendré par les centres de deux faces opposées et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  ou  $-\frac{\pi}{2}$  ;
3. Les  $4 * 2$  rotations dont l'axe est engendré par deux sommets opposés et d'angle  $\pm \frac{2\pi}{3}$  ;
4. Les 6 rotations dont l'axe est engendré par les milieux de deux côtés opposés et d'angle  $\pi$ .

Ainsi,  $G_C$  a cardinal au moins 24 et a au moins 3 orbites dans  $X$ . Vu l'ensemble des solutions de l'équation aux classes. On en déduit que nous avons décrit tous les éléments de  $G_C$ .

L'existence et l'unicité de  $G$  en découle.

On a aussi montré que  $\Omega_1$  est un octaèdre régulier  $O$ .

Considérons l'action de  $G_C$  sur les paires de sommets opposés du cube :

$$\theta : G \longrightarrow \mathcal{S}_4.$$

Soit  $g$  dans le noyau de  $\theta$ . Les sommets du cubes sont alors des vecteurs propres de  $G$ . On en déduit que  $g = \pm \text{Id}$ . Comme  $g \in \text{SO}_3$ ,  $g$  est trivial. Ainsi  $\theta$  est injectif. Vu les cardinaux,  $\theta$  est un isomorphisme.



Figure 3: Octaèdre

## 7 Le cas $(60, 5, 3, 2)$

Supposons  $N \in \Omega_1$ . On remarque que  $-\Omega_1 = \Omega_1$  (seule orbite de cardinal 12). Le stabilisateur de  $N$  a cardinal 5. On en déduit que  $\Omega_1$  est la réunion de  $\pm N$  et de 2 pentagones réguliers horizontaux opposés. Modulo conjugaison la seule liberté est la hauteur  $h$  à laquelle se situe ces parallélogrammes. En changeant de point  $N$ , on montre qu'une seule valeur de  $h$  est possible. Soit  $\mathcal{I}$  le polytope ainsi obtenu.

Soit  $G_{\mathcal{I}}$  le stabilisateur de  $\mathcal{I}$ . On montre que  $G_{\mathcal{I}}$  contient

1. les  $6 \times 4$  rotations dont les axes sont engendrés par les sommets de  $\mathcal{I}$  et l'angle  $\frac{2k\pi}{5}$  pour  $k = 1, 2, 3$  ou 4;
2. les  $10 \times 2$  rotations dont les axes sont engendrés par les milieux des faces de  $\mathcal{I}$  et l'angle  $\pm \frac{2\pi}{3}$ ;
3. les 15 rotations dont les axes sont engendrés par les milieux des arêtes de  $\mathcal{I}$  et l'angle  $\pi$ ;

Cette fois  $G_{\mathcal{I}}$  est isomorphe à  $\mathcal{A}_5$ . Pour le montrer, il faut trouver un ensemble à 5 éléments muni d'une action de ce groupe.

Nous affirmons qu'il y a exactement 10 familles  $F$  de sommets vérifiant :

Toute face contient un unique sommet de  $F$ .

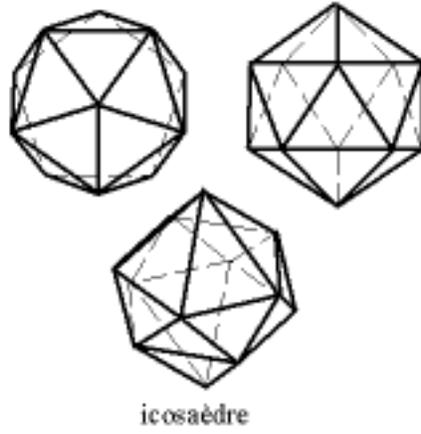


Figure 4: Icosaèdre

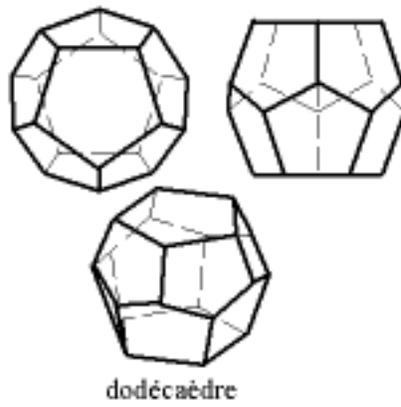


Figure 5: Dodecaèdre

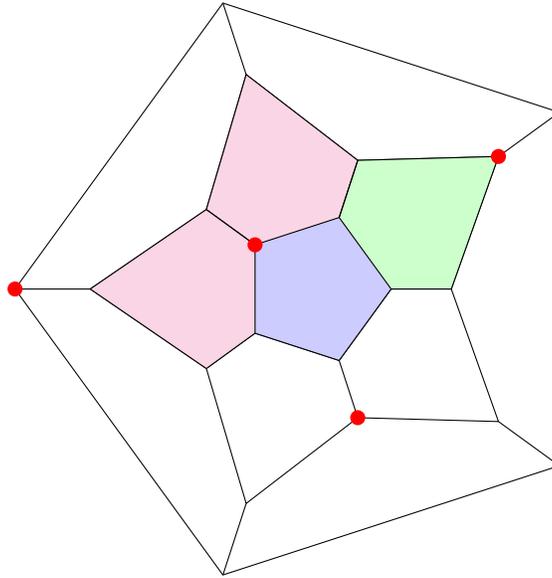


Figure 6: Dodécaèdre combinatoire

La figure 7 est une représentation combinatoire du dodécaèdre. On y voit les 12 faces (une est l'extérieur du dessin, les 20 sommets et les 30 arêtes.

Construisons toutes les familles  $F$ . Pour le sommet sur la face bleu, on a 5 choix. Par symétrie, on peut supposer que  $F$  contient le sommet rouge de cette face. Aucun sommet des deux faces roses ne peut appartenir à  $F$ . En particulier, pour le sommet sur la face verte on a deux choix. Il reste à vérifier que pour chacun de ces deux choix, les deux autres sommets de  $F$  sont déterminés comme étant les 2 derniers sommets rouges de la figure.

L'antipodie (cad l'application  $x \mapsto -x$  de la sphère unité dans elle-même) groupe ces 10 familles en 5 paires. L'action sur ces 5 paires de tétraèdres induit l'isomorphisme cherché.

## 8 Isométries