Feuille 0 : Groupes

Exercice 1. Lemme Chinois sur $\mathbb{Z}$

1. Soit n_1 et n_2 deux entiers non nuls et premiers entre eux. Rappeler pourquoi il existe deux entiers u et v tels que $un_1 + vn_2 = 1$.
2. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver u et v pour $n_1 = 27$ et $n_2 = 22$.
3. Soit $n_1, \ldots, n_s$ des entiers naturels non nuls et deux à deux premiers entre eux et n leur produit. Montrer que « l'application diagonale » $\delta : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$ induit un isomorphisme entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$.
   Penser à utiliser le cardinal.
4. Traduire l'énoncé précédent en terme de sytème de congruences.
5. Ici $s = 2$. Soit a_1 et a_2 dans $\mathbb{Z}$. Décrire en fonction de u et v, l'ensemble
$$\{x \in \mathbb{Z} \,:\, x \equiv a_1 \ [n_1] \text{ et } x \equiv a_2 \ [n_2]\}.$$
6. En déduire un algorithme pour résoudre un système du type
$$\forall i = 1, \ldots, s \qquad x \equiv a_i \quad [n_i].$$

Exercice 2. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X et K un corps. Montrer que G agit naturellement sur l'ensemble des parties de X et sur l'espace vectoriel K^X des fonctions de X dans K.

Exercice 3. Théorème de Cauchy

Soit G un groupe fini et p un diviseur premier de $\sharp G$. On considère l'ensemble
$$E = \{(x_1, \ldots, x_p) \in G^p \,:\, x_1 \ldots x_p = e\}.$$

1. Dénombrer E.
2. Montrer que l'action naturelle de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur G^p induit une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E.
3. Montrer qu'il existe un élément d'ordre p dans G.

Exercice 4. Groupes Linéaires

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps de cardinal q.

1. Déterminer le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.
2. Déterminer le cardinal de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ ainsi que celui de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$.
3. Montrer que l'action naturelle de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{F}_q^n$ est fidèle.
4. En déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à S_3 et que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à S_4.
5. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4)$ est isomorphe au groupe alterné A_5.

Exercice 5. Décrire un système complet de représentants de l'action de $\mathrm{GL}_p(K) \times \mathrm{GL}_q(K)$ sur $\mathcal{M}_{pq}(K)$ définie par
$$(g, h) \cdot M := gMh^{-1}.$$

Exercice 6. Théorèmes de Sylow.

Soit G un groupe fini et p un diviseur premier de $\sharp G$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que p^α divise $\sharp G$ et $p^{\alpha+1}$ ne divise pas $\sharp G$. Un *p-Sylow* de G est un sous-groupe de cardinal p^α.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ admet un p-Sylow.
2. Soit S un p-Sylow de G et H un sous-groupe de G. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $gSg^{-1} \cap H$ est un p-Sylow de H. *Indication : considérer l'action de H sur G/S et déterminer les stabilisateurs.*
3. En déduire que G admet un p-Sylow.
4. Soit S un p-Sylow de G et H un p-sous-groupe. Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $H \subset gSg^{-1}$.
5. Montrer que deux p-Sylow de G sont conjugués. Montrer que le nombre n_p de p-Sylow vérifie

$$n_p \equiv 1 \ \ [p] \qquad n_p | \frac{\sharp G}{p^\alpha}$$

Indication : considérer l'action par conjugaison d'un p-Sylow S sur l'ensemble des p-Sylow.

6. Montrer qu'un groupe de cardinal 200 n'est pas simple.
7. Soit p un nombre premier. Déterminer le nombre de p-Sylow du groupe symétrique S_p.

Exercice 7. Stabilisateurs

Soit K un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit B (resp. T) l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_n(K)$ qui sont triangulaires supérieures (resp. diagonales).

1. Montrer que T et B sont des sous-groupes de $G = \mathrm{GL}_n(K)$.
2. Exhiber des actions pour lesquelles T et B sont des stabilisateurs.
3. En déduire des descriptions de G/B et G/T.

Exercice 8. Matrices échelonnées

Soit K un corps et $p, q \in \mathbb{N}^*$. On étudie ici l'action de $\mathrm{GL}_p(K)$ sur $\mathcal{M}_{pq}(K)$ par multiplication à gauche. On définit trois relations d'équivalence sur $\mathcal{M}_{pq}(K)$:

i Deux matrices sont dites GL-équivalentes si et seulement si elles aparatiennent à la même orbite.

ii Deux matrices A et B sont dites Ker-équivalentes si et seulement si $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}B$.

iii Deux matrices sont dites op-équivalentes si et seulement s'il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes transformant l'une en l'autre. Ici les opérations élémentaires utilisées sont les échanges de deux lignes, les multiplications d'une ligne par des scalaires non nuls, les ajouts d'un multiple d'une ligne à une autre.

Soit $M \in \mathcal{M}_{pq}(K)$. Pour $1 \leq i \leq p$, on note λ_i la colonne contenant le premier élément non nul de la ligne i. Si la ligne est nulle on pose $\lambda_i = \infty$. On dit que M est *échelonnée* si les lignes nulles de M sont en bas et $\lambda_1 < \cdots < \lambda_s$, où s est le nombre de ligne non nulles. On dit que M est *échelonnée réduite* si pour tout $i \leq s$, le premier élément non nul de la ligne i vaut 1 et si c'est le seul élément non nul de sa colonne.

1. Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ sont GL-équivalentes si et seulement si elles sont Ker-équivalentes.
2. Montrer que si deux matrices de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ sont op-équivalentes alors elles sont Ker-équivalentes.
3. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est op-équivalente à une matrice échelonnée.
4. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est op-équivalente à une matrice échelonnée réduite.
5. En déduire que le groupe $\mathrm{GL}_p(K)$ est engendré par les matrices de transvection, dilatation et permutation.
6. En déduire la réciproque de la question 2.
7. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_{pq}(K)$ est op-équivalente à une unique matrice échelonnée réduite.