UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
—FAC DES SCIENCES—
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Année universitaire 2009-2010
L3-S5
FLMA 504. Algèbre linéaire 4

FEUILLE D'EXERCICES N°1 : ESPACES VECTORIELS - MATRICES

1. EXEMPLES DE CORPS

Exercice 1. On note $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b dans $\mathbb{Q}$.

(1) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est stable par multiplication et addition.

(2) Montre que muni de ces 2 lois, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un corps.

Exercice 2. On pose $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. et On munit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de deux lois : pour $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on note $\bar{a} + \bar{b}$ (resp. $\bar{a}.\bar{b}$) le reste de la division euclidienne par 2 de $a + b$ (resp. $a.b$) surmonté d'une barre.

(1) Écrire les tables de ces deux lois.

(2) Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ muni de ces deux lois est un corps.

(3) Montrer que l'on peut munir $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ d'une structure de corps de la même manière en remplaçant 2 par 3.

(4) Montrer que cette construction ne fonctionne pas pour $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. (Trouver un élément non nul a tel que $a.a = \bar{0}$.)

2. ESPACES VECTORIELS

Exercice 3. Décrire tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. VRAI ou FAUX ?

(1) L'ensemble vide est un espace vectoriel.

(2) Un corps est toujours un espace vectoriel sur lui-même.

(3) $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-espace vectoriel, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-ev, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$-ev.

(4) Si $\lambda \in K$ et $x \in E$, alors $\lambda x = 0$ implique que $\lambda = 0$ ou $x = 0$.

(5) Le noyau d'une application linéaire est un sev.

(6) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x + y = 1\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(7) L'intersection de deux sev est toujours un sev.

(8) La réunion de deux sev est toujours un sev.

(9) Le complémentaire d'un sev F de E est toujours un sev, on l'appelle le supplémentaire de F dans E.

(10) Si F_1, F_2 sont deux sev de E, on a toujours $F_1 \cup F_2 \subset F_1 + F_2$

(11) Si A est une partie de E, on a toujours $\mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(A)$.

(12) Si A, B sont deux parties de E, on a toujours $\mathrm{Vect}(A \cap B) = \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$.

(13) Dans $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z), l'axe des x est en somme directe avec l'axe des z. Et le plan des (x, y) est en somme directe avec le plan des (y, z).

(14) Si D_1, D_2, D_3 sont trois droites de $\mathbb{R}^3$ distinctes deux à deux, alors on a $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$.

(15) L'image d'une application linéaire est un sev.

(16) Une application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = 0$.

(17) Une application linéaire f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = 0$.

(18) Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

(19) Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors on a $(f+g)^2 = f^2 + 2f \circ g + g^2$.

(20) La dérivation D est un automorphisme de l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

(21) Si F_1, F_2 sont des sev de E, l'application $\phi : F_1 \times F_2 \to F_1 + F_2$ définie par $\phi(x, y) := x + y$ est toujours un isomorphisme.

(22) Si P_1 et P_2 sont deux plans de E tels que $P_1 \cap P_2 = 0$, alors $\dim E \geq 4$.

(23) Il existe deux sous-espaces F, G de $\mathbb{R}^5$ tous deux de dimension 3, tels que $F \cap G = 0$.

Exercice 5. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des matrices 3×3 ?

(1) L'ensemble des matrices inversibles.

(2) L'ensemble des matrices de déterminant nul.

(3) L'ensemble des matrices diagonales.

(4) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

(5) L'ensemble des matrices symétriques.

(6) L'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont positifs.

(7) L'ensemble des matrices dont le noyau contient le vecteur $(1, 2, 3)$.

(8) L'ensemble des matrices dont l'image contient le vecteur $(1, 2, 3)$.

Exercice 6. Soit P le plan euclidien. On munit P d'un repère orthonormé : P est ainsi identifié à $\mathbb{R}^2$.

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Considérons la rotations r de centre 0 et d'angle θ. Celle-ci est définie par les propriétés suivantes :

– $0M = Or(M)$,

– Les vecteurs OM et $Or(M)$ forment un angle de mesure θ.

(1) Montrer que θ est une application linéaire.

(2) Déterminer la matrice de r.

(3) Le fait que le centre de la rotation est O joue t-il un rôle.

Exercice 7. (1) On considère $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre.

(2) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que la famille $(f_a : x \mapsto |x - a|)$ est libre.

Exercice 8. (1) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : $F \subset G$ ou $G \subset F$.

(2) Existe t-il un espace vectoriel E de dimension supérieure à deux qui soit réunion de deux (resp. trois) droites ?

Exercice 9. Soit F_1, F_2, F_3 3 sev de E. Définir les assertions suivantes :

(1) $E = F_1 + F_2 + F_3$.

(2) La somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe.

Exercice 10. Soit E un ev et f un endomorphisme de E. On suppose que pour tout x dans E, la famille $(x, f(x))$ est lié.

(1) Montrer que pour tout $x \in E$ non nul il existe un unique λ_x dans le corps de base tel que $f(x) = \lambda_x x$.

(2) Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$ pour tout x, y.

(3) En déduire que f est une homothétie.

Exercice 11. Montrer que la famille $((1,0,1),(-1,-1,2),(-2,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées du vecteur $(3,2,-4)$ dans cette base.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les deux sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } x+2y+t=0\} \text{ et } G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid z+t=0\}.$$

(1) Expliquer pourquoi $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

(2) Trouver une base de $F \cap G$ puis la compléter en une base de F.

Exercice 13. Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $f(P) = P(X+1) - P'(X)$. On considère les bases $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{C} = (1+X, X+X^2, 1+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

(1) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

(2) Déterminer de deux manières différentes $\mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{CB}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.