Dualité - Espaces hermitiens

1. Dualité

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \longmapsto \int_{t=-1}^{1} t^i P(t)\, dt$.
a. Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de E^*.
b. Trouver la base de E dont elle est la duale.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ distincts. On considère les formes linéaires sur E :

$$f_a \;:\; P \longmapsto P(a), \quad f_b \;:\; P \longmapsto P(b), \quad f_c \;:\; P \longmapsto P(c), \quad \varphi \;:\; P \longmapsto \int_{t=a}^{b} P(t)\, dt.$$

Étudier la liberté de (f_a, f_b, f_c, φ).

Exercice 3. Soit $f \,:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est polynomiale si elle est de la forme : $f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$, la somme portant sur un nombre fini de termes. Le degré de f est alors $\max(i + j \text{ tq } a_{ij} \neq 0)$.
On note E_k l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiales de degré inférieur ou égal à k.
a. Montrer que E_k est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et donner sa dimension.
b. Soient $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$. Montrer que les formes linéaires $f \longmapsto f(A)$, $f \longmapsto f(B)$, $f \longmapsto f(C)$ constituent une base de E_1^*.
c. Soit T le triangle plein ABC et $f \in E_1$. Montrer que $\iint_T f(x,y)\, dxdy = \frac{f(A)+f(B)+f(C)}{6}$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f,\, f_1, \ldots, f_p \in E^*$. Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_p$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} f_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} f_p$.

2. $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitienne naturelle

Exercice 5. On considère l'espace $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure hermitienne (,) naturelle donnée par

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i.$$

a. Quelle est la matrice de la forme (,) dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$?
b. Soit $\mathcal{B} = (e_i)$ une base quelconque de $\mathbb{C}^n$. Montrer que

$$h(\sum_i x_i e_i, \sum_i y_i e_i) := \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i \quad (*)$$

définit une forme hermitienne h définie positive sur $\mathbb{C}^n$.
c. Réciproquement, montrer que si h est une forme hermitienne définie positive sur $\mathbb{C}^n$, alors il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)$ telle que (*) soit vérifiée.
d. Montrer que b. et c. peuvent s'exprimer matriciellement de la manière suivante : H est une matrice hermitienne définie positive si et seulement si il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $H = P^* P$.

Exercice 6. *La Décomposition de Cholesky.* Montrer à l'aide de la méthode de Gram-Schmidt que l'on peut avoir P triangulaire supérieur avec des coefficients positifs sur la diagonale. Montrer qu'alors cette décomposition est unique.

Exercice 7. Soit l'hyperplan F de $\mathbb{C}^3$ donné par l'équation $x + 2iy - z = 0$.

a. Par la méthode de Gram-Schmidt, trouver une base orthonormée de F.

b. Donner l'expression de la projection orthogonale de $\mathbb{C}^3$ sur F pour le produit hermitien usuel, d'une part par une méthode directe, d'autre part en calculant l'expression de la projection orthogonale sur $F^\perp$.

3. Autres produits hermitiens

Exercice 8. On considère la forme h sur $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -2i & 0 \\ 2i & 7 & 3i \\ 0 & -3i & 5 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que H est hermitienne.
b. En utilisant un algorithme de type Gauss, montrer que H est définie positive et donner une base dans laquelle la matrice de h est diagonale.
c. Cette base est-elle orthonormée pour le produit scalaire hermitien usuel ?

Exercice 9. Soit $\mathbb{C}[X]_n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère la forme

$$(P,Q) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})}Q(e^{it})dt.$$

a. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]_n$.

b. Montrer que $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base orthonormée pour ce produit.

c. On fixe a dans $\mathbb{C}$. Soit F le sous-espace de $\mathbb{C}[X]_n$ constitué des polynômes P tels que $P(a) = 0$. Montrer que F est un hyperplan et en déduire que l'orthogonal $F^\perp$ pour la forme définie ci-dessus est engendré par

$$Q_0 := \sum_{i=0}^{n} \overline{a^i} X^i.$$

d. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]_n$. En décomposant un polynôme P de $\mathbb{C}[X]_n$ dans une base orthonormée adaptée à F, montrer que

$$\mathrm{Max}_{(P,P)=1}|P(a)| = \sqrt{1 + |a|^2 + \ldots + |a|^{2n}}.$$

Exercice 10. Le determinant d'une forme hermitienne a-t-il un sens (comprenez : dépend il d'une base choisie) ? Le signe du déterminant d'une forme hermitienne a-t-il un sens ? On appellera ce signe discriminant de la forme hermitienne.

Exercice 11. On munit l'espace des matrices $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ d'un produit scalaire hermitien par $(A, B) = \mathrm{Tr}(A^*B)$ où Tr désigne la trace.

a. Calculer explicitement (A, A) en fonction des coefficients de A et en déduire qu'il s'agit bien d'un produit scalaire hermitien.

b. Montrer que l'adjoint de l'endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $X \mapsto AX$ est $X \mapsto A^*X$.

4. Réduction des endomorphismes normaux

Exercice 12. Soit M une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices hermitiennes (H, H') tel que $M = H + iH'$.

b. Montrer que M est normale si et seulement si H et H' commutent.

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice unitaire U et une matrice diagonale D telle que $A = UDU^{-1}$.

Exercice 14. Soient a_i, $0 \le i \le n-1$, n nombres complexes. On considère la matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & \dots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & \dots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

a. Soit ω une racine primitive n-ième de l'unité. Montrer que pour tout entier k, le vecteur $(1, \omega^k, \dots, \omega^{(n-1)k})$ est un vecteur propre de C pour une valeur propre que l'on précisera.

b. Montrer que $1 + \omega^k + \ldots + \omega^{(n-1)k} = 0$ si et seulement si n ne divise pas k. Que vaut la somme si n divise k ?

c. Montrer que C possède une base orthogonale de vecteurs propres pour le produit scalaire hermitien usuel de $\mathbb{C}^n$.

d. Montrer que C est normale.

Exercice 15.

Soit C^n muni de sa structure hermitienne canonique notée $(\ ,\ )$.

On dit qu'une matrice A carrée de taille n est hermitienne si ${}^t\bar{A} = A$.

a. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles.

On numérote les valeurs propres λ_i de A de telle sorte que $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_n$.

b. Montrer que

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

et

$$\lambda_n = \min_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Le but de l'exercice est d'obtenir les autres valeurs propres de A de manière similaire.

c. Soit F_k un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ de dimension k.

Montrer qu'il existe x dans $F_k \cap \mathrm{Vect}(e_k, \cdots, e_n)$ de norme un.

En déduire que

$$\lambda_k \ge \min_{x \in F_k, \|x\|=1} (Ax, x).$$

d. Montrer que

$$\lambda_k = \max_{\dim F_k = k} \min_{x \in F_k, \|x\|=1} (Ax, x).$$

Exercice 16. Théorème de Herman Weyl, 1912

Si A est une matrice hermitienne de taille n, on note $\lambda_k(A)$ sa k-ième valeur propre lorsqu'elles sont ordonnées par ordre décroissant.

Soit A et B deux matrices hermitiennes de taille n.

a. Question préliminaire.

Soit F, G et H des sous-espaces vectoriels de C^n tels que $\dim(F) + \dim(G) + \dim(H) > 2n$.

Montrer quer $F \cap G \cap H$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

[Considérer une application linéaire bien choisie de $F \times G \times H$ dans $E \times E$.]

b. Montrer que

$$\lambda_1(A+B) \le \lambda_1(A) + \lambda_1(B).$$

c. Soit i et j deux entiers tels que $1 \le i, j, i+j-1 \le n$.

Montrer que

$$\lambda_{i+j-1}(A+B) \le \lambda_i(A) + \lambda_j(B).$$

5. Compléments

Exercice 17. Soit A une matrice de SU_2. Montrer qu'il existe a et b complexes tels que $A = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Quelle est la forme générale d'une matrice de U_2 ?

Exercice 18.

a. Soit A une matrice complexe inversible. Montrer que l'on peut la décomposer en le produit HU d'une matrice H hermitienne définie positive et d'une matrice unitaire U.

b. Montrer que U_n est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et déduire de ce qui précède qu'il s'agit d'un sous-groupe compact maximal.

Exercice 19. Soit H une matrice hermitienne de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et soit I une partie de $\{1, \ldots, n\}$. On considère la sous-matrice H_I de H constituée de ses lignes et colonnes indexées par I.

a. Montrer que H_I est hermitienne. Montrer que si de plus H est définie positive, alors H_I est définie positive (en une ligne !).

b. Donner un exemple où H_I est définie positive et où H ne l'est pas.

c. On pose $I_k = \{1, \ldots, k\}$ pour tout k, $1 \leq k \leq n$. Montrer que si $\det(H_{I_k}) > 0$ pour tout k, alors H est définie positive.
On pourra montrer le fait suivant : si h est une forme hermitienne définie positive sur un hyperplan et si son discriminant est strictement positif, alors h est définie positive.

Exercice 20.
On rappelle que l'équation dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $ax^2 + ay^2 + 2bx + 2cy + d = 0$ est l'équation d'un cercle (ou éventuellement le vide ou un cercle dégénéré en un point) si $a \neq 0$ et d'une droite (ou éventuellement le vide) si $a = 0$.

a. Donner une condition sur a, b, c, d pour que cette équation définisse bien un cercle non dégénéré ou une droite. On appelera $\mathcal{DC}$ l'ensemble des droite et cercles du plan affine.

b. Montrer que si $C \in \mathcal{DC}$, alors le quadruplet (a, b, c, d) associé à C est défini de façon unique à un scalaire non nul près.

c. Montrer que l'on a une bijection
$$b : \mathcal{DC} \to H_2^{(1,1)}(\mathbb{C}) / \mathbb{R}^*$$
entre $\mathcal{DC}$ et l'ensemble des matrices hermitiennes de signature $(1,1)$, et qui à la droite ou cercle d'équation $ax^2 + ay^2 + 2bx + 2cy + d = 0$ associe la classe de la matrice $\begin{pmatrix} a & b+ic \\ b-ic & d \end{pmatrix}$ modulo $\mathbb{R}^*$.

d. Montrer que cette bijection est compatible avec l'action de $SL_2(\mathbb{C})$, i.e. $b(A(C)) = Ab(C)A^*$.

Exercice 21. Soit $A \in \mathrm{M}_n\mathbb{C}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'elle admet une décomposition $A = UT\,{}^tU$ avec U unitaire et T triangulaire supérieure si et seulement si le spectre de $A\overline{A}$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

a. Décider quelle implication est la plus facile et montrer la.

Supposons désormais que le spectre de $A\bar{A}$ est dans $\mathbb{R}^+$.

b. Soit λ une valeur propre de $A\bar{A}$. Montrer qu'il existe w de norme 1 et α dans $\mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} A\bar{w} = \alpha w \\ \alpha^2 = \lambda \end{cases}$$

c. Justifier l'existence d'une matrice unitaire U dont la première colonne est w. Calculer les premières colonnes de ${}^t\bar{U}A\bar{U}$ et ${}^t\bar{U}A\bar{A}U$.

d. Conclure l'exercice au moyen d'une récurence.