Université Claude Bernard–Lyon I
M2 de Mathématiques : Groupes algébriques
Année 2013–2014

Géométrie algébrique affine

I Noethériannité

Soit A un anneau (commutatif unitaire) et k un corps.

1° Transfert

On veut démontrer le théorème de Hilbert : *si A est noethérien, alors $A[X]$ est noethérien* (où X est une indéterminée). Supposons qu'existe un idéal I qui n'est pas de type fini. On note $d_1 = \min\{\deg(f),\ f \in I \setminus \{0\}\}$ et on fixe $f_1 \in I$ tel que $\deg(f_1) = d_1$. On note $d_2 = \min\{\deg(f),\ f \in I \setminus (f_1)\}$ et on fixe $f_2 \in I$, $\deg(f_2) = d_2$. On note $d_3 = \min\{\deg(f),\ f \in I \setminus (f_1, f_2)\}$ etc.
a) Justifier la construction de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
b) Soit a_k le coefficient dominant de f_k et J l'idéal de A engendré par les a_k. Justifier l'existence de $h \in \mathbb{N}$ tel que $a_{h+1} \in (a_1, \ldots, a_h)$.
c) Construire un élément $g = f_{h+1} - \sum_{k=1}^{h} x_k f_k$ dont le degré est strictement inférieur à d_{h+1}.
d) Observer une contradiction et en déduire le théorème.
e) Montrer que l'anneau des polynômes $k[X_1, \ldots, X_n]$ est noethérien pour tout n.

2° Noethériannité des modules

Sur un anneau noethérien, tout sous-module d'un module M de type fini est de type fini.
Un module de type fini est un quotient de A^n, montrer que l'on peut supposer que $M = A^n$.

3° Composantes irréductibles

Un espace topologique Z est *noethérien* si toute suite décroissante de fermés stationne ; *réductible* s'il existe deux fermés Z_1 et Z_2 distincts de Z tels que $Z = Z_1 \cup Z_2$; *irréductible* sinon.
a) Montrer qu'un ensemble algébrique est noethérien.
b) Montrer qu'un espace noethérien peut s'écrire comme réunion d'un nombre fini de fermés irréductibles $Z_1, \ldots, Z_r$. Montrer que tout fermé irréductible maximal est l'un des Z_i.
Si Z n'est pas irréductible, écrire $Z = Z_1 \cup Z_1'$. Si l'un de ces deux fermés, disons Z_1, n'est pas irréductible, on le décompose en $Z_1 = Z_2 \cup Z_2'$, etc.
c) Exemple : Soit $V = \mathscr{V}(\{X_1^2 - X_2X_3, X_1 - X_1X_3\})$ [notation définie ci-dessous]. Montrer que V a trois composantes irréductibles et que $\dim V = 1$.
d) Yoga
– Dans un espace irréductible, tout ouvert non vide est dense.
– L'adhérence d'une partie irréductible (pour la topologie induite) est aussi irréductible.
– L'image d'une partie irréductible par une application continue est irréductible.
– Pour I un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$, $\mathscr{V}(I)$ est irréductible SSI I est premier.
e) Application : Démontrer le théorème de Cayley-Hamilton et que « $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ ».

II Mes premières variétés algébriques...

1° Sur la définition d'une variété algébrique affine

a) Soient I, J et (I_j) des idéaux de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que $\mathscr{V}(I) \cup \mathscr{V}(J) = \mathscr{V}(IJ)$ et que $\bigcap_j \mathscr{V}(I_j) = \mathscr{V}\left(\sum_j I_j\right)$. En déduire que les $\mathscr{V}(I)$, I idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ forment une topologie.
b) Soient X, Y sont deux fermés de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$ respectivement, $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ et $\psi : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ sont des fonctions régulières telles que $\varphi|_X$ et $\psi|_Y$ sont des bijections réciproques, alors $(X, \mathscr{O}_X)$ et $(Y, \mathscr{O}_Y)$ sont isomorphes comme espaces annelés.

2° Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

a) Montrer que $f = 0$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{N}^n$, $f(x) = 0$.

b) Montrer que si $n = 1$, les parties de la forme $\mathscr{V}(S)$ ($S \subset \mathbb{C}[X_1]$) sont $\mathbb{C}$ et les parties finies.

c) Montrer que si $n \geq 2$ et f n'est pas constant, $\mathscr{V}(f)$ est un ensemble infini.

d) Montrer que si $n = 2$ et si f et g n'ont pas de facteur commun, alors $\mathscr{V}(\{f, g\})$ est un ensemble fini (de cardinal au plus $\deg(f)\deg(g)$).

Écrire ≪ l'équation aux abscisses ≫ pour le système $f = 0$, $g = 0$ – utiliser le résultant.

3° Cubique tordue

Soit I l'idéal engendré dans $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ par $f = X_2 - X_1^2$ et $g = X_3 - X_1^3$ et $C = \mathscr{V}(I)$ la variété associée. Vérifier que $C = \{(x, x^2, x^3) \ : \ x \in \mathbb{C}\}$ et montrer que $\mathscr{I}(C) = (f, g)$.

On pourra écrire tout polynôme $h \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ sous la forme $h(X_1, X_2, X_3) = p(X_1) + q(f, g)$.

4° Sous-espaces affines

Soient $f_1, \dots, f_m$ des éléments de degré 1 de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et $V = \mathscr{V}(f_1, \dots, f_m)$. Montrer que $\mathscr{I}(V) = (f_1, \dots, f_m)$ et que la dimension de V comme variété algébrique est égale à sa dimension comme espace vectoriel.

On supposera d'abord que $f_k = X_k + g_k(X_{m+1}, \dots, X_n)$ pour $1 \leq k \leq m$ et on procèdera comme pour la cubique tordue. On y ramènera le cas général par l'algorithme de Gauss.

5° Produits

Montrer que si X (resp. Y) est une sous-variété de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{C}^p$) alors $X \times Y$ est une sous-variété de $\mathbb{C}^{n+p}$ dont l'algèbre des fonctions régulières est isomorphe à $\mathscr{O}_X(X) \otimes \mathscr{O}_Y(Y)$.

On se place désormais dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, considéré comme spectre de $\mathbb{C}[X_{ij}, 1 \leq i, j \leq n]$.

6° Parties liées au rang

Soit r compris entre 1 et n. Montrer que l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ (resp. égal à r) est fermé (resp. localement fermé). Que peut-on dire de l'ensemble des matrices de rang $\geq r$?

7° Projecteurs

Montrer que l'ensemble des projecteurs (resp. de rang donné) est fermé.

Le rang d'un projecteur est égal à sa trace !

8° Classes de similitude fermées

Montrer que les classes de similitude fermées sont les classes de matrices diagonalisables.

Il s'agit d'adapter la preuve ≪ classique ≫ à la topologie de Zariski. Les fermés de Zariski sont fermés pour la topologie normique, ce qui sur $\mathbb{C}$ fait la moitié du travail.

9° Endomorphismes (non) cycliques

a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à une matrice-compagnon si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ est une base de $\mathbb{C}^n$.

b) Montrer que l'ensemble V des matrices qui ne sont semblables à *aucune* matrice-compagnon est un fermé propre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Des équations $\det(x, Ax, \dots, A^{n-1}x) = 0$ *($x \in \mathbb{C}^n$), extraire un nombre fini par noethériannité.*

Bibliographie

[1] Meinolf Geck : *An introduction to algebraic geometry and algebraic groups*, volume 10 de *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2003.

[2] Daniel Perrin : *Géométrie algébrique*. Savoirs Actuels. InterEditions, Paris, 1995. Une introduction.