Feuille 2 : Algèbre bilinéaire et Esapces Euclidiens/Hermitiens

Exercice 1.

1. Soit $q(x) = x_1^2 + 6x_2^2 + 56x_3^2 - 4x_1x_2 + 14x_1x_3 - 36x_2x_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ecrire q dans la base $(f_1 = (1,0,0),\ f_2 = (2,1,0),\ f_3 = (-3,2,1))$.
2. Simplifier l'expression suivante $q(x+y)+q(y+z)+q(x+z)-q(x+y+z)$ où q est une forme quadratique quelconque.
3. Déterminer les signatures des formes suivantes :
   (a) $q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$;
   (b) $q_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$;
   (c) $q_3(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2$;
   (d) $q_4(x) = \sum_{i<j} x_ix_j$ sur $\mathbb{R}^4$.
4. Trouver la forme bilinéaire associée à la forme quadratique suivante $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + -4x_1x_2$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique non dégénérée sur E. Montrer que tout vecteur isotrope est inclus dans un plan U tel que la restriction de q à U a signature $(1,1)$. Un tel plan est dit *hyperbolique*.

Exercice 3. Trouver sans calcul la signature de la forme quadratique de $\mathbb{R}^n$ suivante :

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Exercice 4. Soit A, B deux matrices symétriques réelles positives. On suppose que pour tout$X \in \mathbb{R}^n, 0 \leq {}^tXAX \leq {}^tXBX$. Montrer que $\det A \leq \det B$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit H un hyperplan de E. Soit A un endomorphisme symétrique de E et q la forme quadratique associée. Soit $\lambda_1 \leq \cdots \lambda_n$ les valeurs propres de A. Soit $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{n-1}$ les valeurs propres de la restriction de q à H.

Montrer que pour $k \leq n-1$, on a :

$$\lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{k+1}.$$

Exercice 6. Inégalité de Hadamard. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs colones de A. Montrer que

$$|\det(A) \leq \|C_1\| \cdot \cdots \cdot \|C_n\|.$$

Exercice 7. Décomposition en valeurs singulières

Considérons $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ muni de l'action du groupe $U_m(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C})$ donnée par la formule :

$$(U,V).M = UMV^{-1}.$$

On veut montrer le résultat suivant :

Un système complet de représentants pour cette action est
l'ensemble des matrices dont tous les coefficients non nuls sont sur la diagonale et
ceux-ci sont réels ordonnées par ordre décroissant.

Dans la suite, pour toute matrice A, on pose $A^* = {}^t\bar{A}$. Soit $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$.

1. Décrire le système complet de représentants lorsque $m > n$, $m = n$ et $m < n$.
2. Démontrer la partie unicité.
   Indication : *par une opération astucieuse tenter d'éliminer U.*

3. Justifier que la matrice M^*M est diagonalisable en base unitaire et que ses valeurs propres sont positive. Soit $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de M. Soit r le nombre de λ_i non nuls. Soit enfin $V \in U_n(\mathbb{C})$ telle que
$$M^*M = V\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)V^*.$$
4. Décrire la seule matrice Σ comme dans l'énoncé à laquelle M peut être équivalente. Notons $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ les éléments diagonaux non nuls de Σ.

   Indication : *vous savez déjà qu'il n'y en a qu'une.*
5. Notons $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ les colonnes de V. Montrer que la famille $(\frac{1}{\sigma_1}Mv_1, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}Mv_r)$ est unitaire.
6. Conclure.
7. En déduire que les valeurs propres non nulles de M^*M sont égales aux valeurs propres non nulles de MM^*.
8. En mimant la démonstration ci-dessus, écrire sous la forme $U\Sigma V^*$ les matrices suivantes :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$