Université Montpellier II
—Fac des Sciences—
Département de Mathématiques

Année universitaire 2009-2010
L3-S5
FLMA 504. Algèbre linéaire 4

FEUILLE D'EXERCICES N°2 : GROUPE SYMÉTRIQUE-DÉTERMINANT

1. Groupe symétrique

Exercice 1. Quel est le cardinal de Σ_n ?

Exercice 2. On considère les éléments suivants de Σ_9, $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 3 & 6 & 4 & 1 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ et $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 4 & 1 & 9 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

(1) Calculer $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^{-1} et τ^{-1}.

(2) Écrire σ et τ comme produit de cycles à supports disjoints.

(3) Calculer la signature de σ et τ.

Exercice 3. Soit n un entier naturel non nul et $0 \leq p, q \leq n$. Soit $a_1, \cdots, a_p$ (resp. $a'_1, \cdots, a'_q$) des entiers entre 1 et n deux à deux distincts. Soit c et c' les deux cycles suivants de Σ_n : $c = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_p)$ et $c' = (a'_1\ a'_2\ \cdots\ a'_q)$.
Quand est-ce que $c = c'$?

Exercice 4. Soit $c = (3\ 8\ 2)(5\ 6)(1\ 4\ 8\ 7) \in \Sigma_9$.

(1) Écrire c sous forme « application de $\{1, \cdots, 9\}$ dans lui-même ».

(2) Calculer c, c^2, c^{-1}. On pourra exprimer les résultats sous forme d'applications ou de produit de cycles à supports disjoints. Calculer la signature de c.

(3) Soit $c' = (3\ 4\ 2)(5\ 7)(8\ 2\ 1\ 6) \in \Sigma_8$. Calculer c'^{-1}.

2. Déterminant

Exercice 5. Compléments de cours.

(1) Quel est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ? Justifier votre réponse en utilisant seulement le cours.

(2) Développer la formule de définition du déterminant pour des matrices de taille 2 et 3.

Exercice 6. Calculer les déterminants $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 7. (1) Soit $a, b, c, d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Montrer que $f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est dérivable et que :

$$f'(x) = \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}.$$

(2) Généraliser à un déterminant $n \times n$.

(3) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}.$$

Exercice 8. (1) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}.$$

(2) Additionner les éléments de chaque colonne de cette matrice. Que constatez vous ?

(3) Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & b-1 & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}.$$

(4) Même question que 2.

(5) Pouvez-vous retrouver le résultat 1 sans calcul.

Exercice 9. Soit M la matrice d'ordre 3 définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

En remarquant que 204, 527 et 255 sont divisibles par 17, montrer que le déterminant de M est divisible par 17.

Exercice 10. soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne trois réels a, b et λ. On définit une matrice $D = (d_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ par :

(i) $d_{ii} = \lambda$ pour tout $i = 1, \dots, n$
(ii) $d_{i,i+1} = a$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$
(iii) $d_{i+1,i} = b$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$
(iv) tous les autres coefficients d_{ij} sont nuls.

Calculer le déterminant de D.

Exercice 11 (déterminant de Cauchy)**.** Si $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ sont des nombres réels (ou complexes), on pose

$$C(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) := \det(1/(x_i + y_j)) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1+y_1} & \cdots & \dfrac{1}{x_1+y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{x_n+y_1} & \cdots & \dfrac{1}{x_n+y_n} \end{bmatrix}$$

(1) En retranchant successivement la dernière colonne de chacune des autres, montrer que

$$C(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \frac{(y_n - y_1)\dots(y_n - y_{n-1})}{(x_1+y_n)\dots(x_n+y_n)} \det \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_1+y_1} & \cdots & \dfrac{1}{x_1+y_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{x_n+y_1} & \cdots & \dfrac{1}{x_n+y_{n-1}} & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Dans le dernier déterminant obtenu, retrancher successivement la dernière ligne de toutes les autres, pour montrer que

$$C(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \frac{(y_n - y_1)\dots(y_n - y_{n-1})}{(x_1+y_n)\dots(x_n+y_n)} \frac{(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})}{(x_n+y_1)\dots(x_n+y_{n-1})} C(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1})$$

(3) En conclure que

$$C(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\frac{\prod_{i>j}(y_i-y_j)(x_i-x_j)}{\prod_{i,j}(x_i+y_j)}$$

Exercice 12. Une matrice carrée $n\times n$ est dite **matrice de permutation** si chacune de ses lignes et de ses colonnes comporte un et un seul 1, et des 0 ailleurs. Par exemple, la matrice 3×3 suivante est une matrice de permutation :

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

mais celle-ci ne l'est pas :

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

(1) Faire la liste de toutes les matrices de permutation 2×2, puis 3×3.

(2) Combien y a-t-il de matrices de permutation $n\times n$?

(3) Si A est une matrice carrée et P est une matrice de permutation de même taille, quelle différence y a-t-il entre A et AP ? Et entre A et PA ?

(4) Pourquoi toute matrice de permutation P est-elle inversible ? Quelle relation simple y a-t-il entre P^{-1} et P ? Ou encore : comment peut-on déterminer sans calcul P^{-1} en connaissant P ?

(5) Le produit de deux matrices de permutation est-il encore une matrice de permutation ?

(6) Soit $\sigma\in\Sigma_n$. Soit P_σ la matrice dont le coefficient à la ligne i et la colonne j vaut 1 si $\sigma(j)=i$ et 0 sinon. Quel est le lien entre le graphe de l'application σ et la matrice P ? En déduire que P_σ est une matrice de permutation.

(7) Comparer $P_\sigma.P_\tau$ et $P_{\sigma\tau}$. En déduire que $Det(P_\sigma)=\varepsilon(\sigma)$.