Représentation des groupes abéliens finis

1. Révisions sur les groupes

Exercice 1. Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont monogènes ou denses.

Exercice 2. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Posons

$$G/H = \{gH \,:\, g \in G\},$$

l'ensemble des classes à droites. C'est un ensemble de parties de G.
a. Si G est de cardinal fini, quel est celui de G/H.
b. On veut définir sur G/H une structure de groupe en posant

$$(g_1H).(g_2H) = (g_1g_2)H. \tag{1}$$

Montrer que le membre de droite de cette égalité ne dépend que de g_1H et g_2H si et seulement si

$$\forall g \in G \qquad gHg^{-1} \subset H.$$

Dans ce cas on dit que H est *distingué* dans G.
c. Montrer que, lorsque H est distingué, la formule (1) définit une structure de groupe sur G/H.

Exercice 3. Soit G un groupe fini.
a. Montrer que le cardinal de tout sous-groupe de G divise celui de G.
b. Soit g dans G et k son ordre. Montrer que k divise le cardinal de G. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $g^a = e$ si et seulement si k divise a.
c. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ quel est l'ordre de $\bar{k}$?
d. Notons $\varphi(n)$ le nombre d'entiers $0 \leq k \leq n-1$ premiers avec n. Montrer que

$$\sum_{d\,|\,n} \varphi(d) = n.$$

e. Soit G un groupe de cardinal n. On suppose que pour tout d, G a au plus un sous-groupe de cardinal d.
Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Trouver un contre-exemple à l'assertion suivante. Si deux sous-groupes H et K d'un groupe abélien G sont isomorphes alors il existe un isomorphisme φ de G tel que $\varphi(H) = K$.

2. Dual d'un groupe abélien fini

Exercice 5. Soit G un groupe abélien fini. Soit g et h dans G. Montrer que

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g)\overline{\chi(h)} = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq h \\ |G| & \text{si } g = h \end{cases}$$

Exercice 6. Soit G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G. Soit χ un caractère de H. Combien existe t-il de caractères $\tilde{\chi}$ de G tels que $\tilde{\chi}_{|H} = \chi$? En déduire, sans utiliser le théorème de structure, que $\hat{G}$ a le même cardinal que G ?

Exercice 7. Soit G un groupe abélien fini d'ordre n et g dans G d'ordre m. Montrer que

$$\prod_{\chi \in \hat{G}} (1 - \chi(g)T) = (1 - T^m)^{\frac{n}{m}},$$

où T est une indéterminée.

3. Dual d'un groupe

Nous avons vu en cours que le dual $\hat{G}$ d'un groupe abélien fini G lui est isomorphe. De plus, sous ces mêmes hypethèses G est canoniquement isomorphe à $\hat{\hat{G}}$. Dans les exercices suivants nous observons ce que deviennent ces propriétés pour d'autres groupes.

Exercice 8. *Le groupe symétrique.* Soit S_n le groupe des permutations agissant sur $\{1, \cdots, n\}$. Soit $\chi : S_n \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un caractère.
a. Montrer que l'image de la transposition $(1\,2)$ par χ est égale à ± 1.
b. Montrer que toutes les transpositions de S_n ont la même image par χ.
c. Montrer que χ est soit constant égal à 1 soit égal à la signature. Ainsi $\hat{G} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 9. *Le groupe* $SO_3(\mathbb{R})$. On rappelle qu'une matrice carrée M de taille 3 est dans $SO_3(\mathbb{R})$ si ${}^tMM = I_3$ et $\det(M) = 1$.
a. Montrer que tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$ est une rotation.
b. Montrer que tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$ est conjugué à son inverse.
c. Soit $\chi : SO_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un caractère. Montrer que l'image de χ est incluse dans $\{\pm 1\}$.
d. Soit g un élément de $SO_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes $\varphi : S^1 \longrightarrow SO_3(\mathbb{R})$ contenant g dans son image.
e. Montrer que χ est trivial (c'est-à-dire constant égal à 1).

Exercice 10. *Le groupe* $\mathbb{R}$. On note $\hat{\mathbb{R}}'$ le sous-groupe de $\hat{\mathbb{R}}$ constitué des morphismes continus.
a. Montrer que tout morphisme continu de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est C^∞.
b. Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{R}}' \\ & a & \longmapsto & (x \mapsto ax) \end{array}$$

est bien définie et est un isomorphisme de groupes.
c. Ce résultat reste t-il vrai sans l'hypethèse de continuité ?
d. Soit G le groupe constitué des morphismes continus de S^1 dans lui-même. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

4. Transformation de Fourier

Exercice 11. On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{6}}$. On considère les caractères χ_s de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ donnés par $\chi_s(\bar{k}) = \omega^{sk}$. Dessiner les graphes de $f = Re(\chi_s)$ et $g = Im(\chi_s)$ pour $0 \leq s \leq 3$. Dessiner les graphes de $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$.

Exercice 12. Soit G un groupe abélien fini et $f \in \mathbb{C}[G]$. On pose

$$\mathrm{supp} f = \{g \in G \,:\, f(g) \neq 0\}.$$

Rappelons que $\hat{f} \in \mathbb{C}[\hat{G}]$ désigne la transformé de Fourier de f.
a. Montrer que pour tout g dans G

$$|f(g)| \leq \frac{|\mathrm{supp}\hat{f}|}{|G|} \max_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|.$$

b. Montrer que

$$|\mathrm{supp} f|.|\mathrm{supp}\hat{f}| \geq |G|.$$

Exercice 13. Soit G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G. Posons

$$H^\perp = \{\chi \in \hat{G} \,:\, \chi_{|H} = 1\}.$$

a. Montrer que $H^\perp$ est un sous-groupe de G de cardinal $[G : H]$.
b. Soit $\delta_H \in \mathbb{C}[G]$ la fonction caractéristique de H. Calculer $\hat{\delta}_H$.
c. Soit $f \in \mathbb{C}[G]$. Montrer que

$$\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} f(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in H^\perp} \hat{f}(\chi).$$

Cette identité s'appelle *formule de Poisson*.

Exercice 14. On se donne la fonction f sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ donnée par $f(\bar{k}) = 0$ pour $k = -1, 0, 1$ et $f(\bar{k}) = 1$ pour $k = 2, 3, 4$. Dessiner le graphe de f, puis dessiner le graphe des fonctions $f * f$, $\widehat{f}$, $\widehat{f * f}$.

Exercice 15. Soit G un groupe abélien fini et $\phi : G^n \to G$ une application. Pour tout h dans G, on note $N(h)$ le nombre de n-uplets $(g_1, \ldots, g_n)$ tels que $\phi(g_1, \ldots, g_n) = h$.
a. Soit $\delta_0 \in \mathbb{C}[G]$ la fonction caractéristique de l'élément neutre. Montrer

$$N(h) = \sum_{(g_1,\ldots,g_n)\in G^n} \delta_0(\phi(g_1, \ldots, g_n) - h).$$

b. En déduire

$$N(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{(g_1,\ldots,g_n)\in G^n} \sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(\phi(g_1, \ldots, g_n))\overline{\chi}(h).$$

Exercice 16. Soit G un groupe abélien fini et A une partie de G. On considère la fonction caractéristique f_A de A. On veut trouver un encadrement de

$$\phi(A) = \mathrm{Max}\{|\widehat{f_A}(\chi)|,\ \chi \in \widehat{G},\ \chi \neq \chi_0\},$$

où χ_0 est le caractère trivial.
a. Montrer que si B est le complémentaire de A dans G, alors $f_B = \chi_0 - f(A)$ et en déduire $\phi(B) = \phi(A)$.
b. Soit χ un caractère. Montrer que $|\widehat{f_A}(\chi)|$ est majorée par $|A|$ avec égalité si $\chi = \chi_0$.
c. Montrer $\langle f_A, f_A \rangle = \frac{|A|}{|G|}$, puis en utilisant la formule de Plancherel, déduire que $\langle \widehat{f_A}, \widehat{f_A} \rangle = |A|$.
d. Montrer de façon directe l'inégalité

$$|G|\langle \widehat{f_A}, \widehat{f_A} \rangle \leq |A|^2 + (|G| - 1)\phi(A)^2.$$

e. Déduire que si $|A| \leq \frac{|G|}{2}$, alors $\sqrt{\frac{|A|}{2}} \leq \phi(A) \leq |A|$. Donner un encadrement équivalent dans le cas où $|A| \geq \frac{|G|}{2}$.
On montre que $\phi(A)$ mesure la répartition de A dans G. Si A est bien répartie, alors $\phi(A)$ se rapproche de sa borne inférieure.

Exercice 17.
On se donne k parties A_i, $1 \leq i \leq k$ dans un groupe abélien fini G. On veut trouver le nombre N de solutions de l'équation de

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = a, \quad x_i \in A_i,$$

où a est un élément de G fixé.
a. Montrer que, quitte à changer A_1 en $A_1 - \{a\} := \{x_1 - a,\ x_1 \in A_1\}$, on peut se ramener au cas où $a = 0$. Ce que l'on supposera par la suite.
b. Montrer en utilisant l'exercice 5 que l'on a

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi\in\widehat{G}} \sum_{x_i\in A_i} \chi(x_1 + \cdots + x_k),$$

et pour χ fixé

$$\sum_{x_i\in A_i} \chi(x_1 + \cdots + x_k) = \prod_{i=1}^{k} \widehat{f_{A_i}}(\chi).$$

c. En déduire

$$N = \frac{\prod_{i=1}^{k} |A_i|}{|G|} + R,$$

avec $R = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi\neq\chi_0} \prod_{i=1}^{k} \widehat{f_{A_i}}(\chi)$.
d. On suppose dorénavant que $k = 3$. Montrer

$$|R| \leq \frac{\phi(A_3)}{|G|} \sum_{chi\in\widehat{G}} |\widehat{f_{A_1}}(\chi)||\widehat{f_{A_2}}(\chi)|.$$

En utilisant Cauchy-Schwarz et l'exercice 5, en déduire l'inégalité

$$|R| \leq \phi(A_3)\sqrt{|A_1||A_2|}.$$

e. En déduire que si

$$\frac{\phi(A_3)}{|A_3|} < \frac{\sqrt{|A_1||A_2|}}{|G|},$$

alors l'équation étudiée possède au moins une solution.

On peut donc interpréter ce résultat ainsi : si un des trois ensembles est suffisamment bien équiréparti, alors il existe une solution à l'équation étudiée.

6. Déterminant d'un groupe

Exercice 18.

a. Démontrer en utilisant le cours et par un calcul explicite la formule :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ y & x & t & z \\ z & t & x & y \\ t & z & y & x \end{vmatrix} = (x+y+z+t)(x-y+z-t)(x+y-z-t)(x-y-z+t).$$

b. Soit G un groupe fini (non nécessairement abélien) et $(X_g)_{g\in G}$ un jeu de variables. On choisit une numérotation des éléments de G. On note Δ_G le déterminant de la matrice dont l'entrée à la ligne $g \in G$ (c'est-à-dire portant le même numéro que g) et à la colonne $h \in G$ vaut $X_{gh^{-1}}$.

Soit $\chi \in \hat{G}$. Montrer que $\sum_{g\in G} \chi(g) X_g$ divise Δ_G.

7. Transformation de Walsh

Exercice 19. On considère le groupe abélien $G_n = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. A tout élément $g := (\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n)$ de G_n, on associe le nombre b_g dont l'écriture binaire est $\overline{g_1 \ldots g_n}$, avec $g_i = 0, 1$.

a. Montrer que l'on construit ainsi une bijection entre G_n et $[0, 2^n - 1]$. On notera g_b l'élément de G_n associé au nombre b. De même on construit une bijection

$$\widehat{G}_n \simeq \widehat{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \times \ldots \times \widehat{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq [0, 2^n - 1].$$

On notera χ_a le caractère associé au nombre a.

b. On note $W_n = (\chi_a(g_b))_{a,b}$. Montrer

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ W_n = \begin{pmatrix} W_{n-1} & W_{n-1} \\ W_{n-1} & -W_{n-1} \end{pmatrix}$$

c. Pour tout χ de $\widehat{G_n}$, on associe sa "fréquence" $\omega_n(\chi)$ égale au nombre de changements de signe le long de la ligne correspondant à χ dans W_n. Dit autrement :

$$\omega_n(\chi) := \#\{b,\ \chi(g_b)\chi(g_{b+1}) < 0,\ 0 \leq b \leq 2^n - 2\}.$$

Calculer les fréquences pour les caractères dans les cas $n = 1, 2, 3$. Puis, montrer les formules de récurrence suivantes :

$$\omega_n(\chi_{\overline{0a}}) = 2\omega_{n-1}(\chi_a) \text{ si } a \text{ est pair, } \omega_n(\chi_{\overline{0a}}) = 2\omega_{n-1}(\chi_a) + 1 \text{ si } a \text{ est impair,}$$
$$\omega_n(\chi_{\overline{1a}}) = 2\omega_{n-1}(\chi_a) + 1 \text{ si } a \text{ est pair, } \omega_n(\chi_{\overline{1a}}) = 2\omega_{n-1}(\chi_a) \text{ si } a \text{ est impair.}$$

En déduire que ω établit une bijection de $\widehat{G_n}$ sur $[0, 2^n - 1]$.