Université Claude Bernard–Lyon I
M2 de Mathématiques : Groupes algébriques
Année 2013–2014

Théorème de Chevalley

I Préliminaires algébriques

1° Lemme de Nakayama

Soient A un anneau, $\mathfrak{a}$ un idéal de A et M un A-module de type fini.
a) Montrer que si $M = \mathfrak{a}M$, alors il existe $a \in \mathfrak{a}$ tel que $(1+a)M = 0$.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ *une famille génératrice de* M*. Écrire l'hypothèse sous la forme* $(\mathrm{I}_n - B)E = 0$*, où* B *est une matrice* $n \times n$ *à coefficients dans* $\mathfrak{a}$ *et* $E = {}^t(e_1 \ \cdots \ e_n) \in M^n$*. Utiliser alors la « règle de Cramer » :* ${}^t\mathrm{com}(C)C = \det(C)\mathrm{I}_n$ *pour toute matrice* C*.*
b) Montrer que si de plus, A est local, *i.e.* s'il n'existe qu'un seul idéal maximal, alors $M = 0$.
c) Variante : si A est local d'idéal maximal $\mathfrak{a}$ et s'il existe un sous-module N de M tel que $M = \mathfrak{a}M + N$, alors $N = M$.

2° Extensions entières

Définition. Soient $A \subset B$ deux anneaux[1]. Un élément $b \in B$ est *entier sur* A s'il existe n et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ tels que $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = 0$. L'anneau B est *entier sur* A si tout élément de B est entier sur A.

Soit $b \in B$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) l'élément b est entier sur A ;
(ii) l'anneau $A[b]$ engendré par A et b est un A-module de type fini ;
(iii) il existe un anneau $C \subset B$ qui contient b et est un A-module de type fini.

(iii)⇒(i) *Soit* $(c_1, \ldots, c_n)$ *une famille génératrice de* C *comme* A*-module. Écrire* bc_j *sous la forme* $\sum_{i=1}^n a_{ij}c_j$ $(1 \leq j \leq n)$*, en déduire une relation de la forme* $\det(b\mathrm{I} - M) = 0$ *(*cf. *Nakayama).*

3° Lemme de normalisation de Noether

Extrait du problème III de [2] avec une petite simplification.

Théorème (Noether)**.** *Soit* A *une algèbre de type fini sur un corps* K *qui est un anneau intègre. Soit* L *le corps des fractions de* A *et* n *le degré de transcendance de* L/K*. Il existe des éléments* $x_1, \ldots, x_n$ *dans* A*, algébriquement indépendants sur* K*, tel que* A *est entier sur* $K[x_1, \ldots, x_n]$*.*

a) On écrit A comme un quotient $K[Y_1, \ldots, Y_m]/I$. Prouver que $m \geq n$ et le théorème si $m = n$.
b) On suppose que $m > n$. Soient $y_1, \ldots, y_m$ les images de $Y_1, \ldots, Y_m$ dans A. Prouver qu'elles satisfont à une équation algébrique $F(y_1, \ldots, y_m) = 0$, avec $F \in K[Y_1, \ldots, Y_m]$ non nul.
c) Soient $r_1, \ldots, r_{m-1}$ des entiers naturels non nuls et soient

$$z_1 = y_1 - y_m^{r_1}, \ldots, \ z_{m-1} = y_{m-1} - y_m^{r_m}.$$

Prouver que $z_1, \ldots, z_{m-1}, y_m$ satisfont à une équation algébrique à coefficients dans K.
d) Montrer que pour un choix convenable des r_i, y_m est entier sur l'anneau $A[z_1, \ldots, z_{m-1}]$.
On écrit F *sous la forme :* $F(Y_1, \ldots, Y_m) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_m^{\alpha_m}$*. En étudiant le coefficient dominant par rapport à* Y_1*, montrer qu'il suffit d'assurer que pour deux multi-indices* $\alpha \neq \alpha'$*, on a :* $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i r_i + \alpha_m \neq \sum_{i=1}^{m-1} \alpha'_i r_i + \alpha'_m$*. Pour cela, on pourra montrer et utiliser que* $\mathbb{N}^m$ *n'est pas contenu dans une réunion finie d'hyperplan affines.*

1. Tous les anneaux, toutes les algèbres considérés sont associatives, commutatives et ont un élément unité.

e) Terminer la preuve du théorème par récurrence sur m.

4° *Going-up* de Cohen-Seidenberg

À présent, on veut prouver la forme faible suivante du lemme de "*going-up*" ([1], 2.2.4).

Lemme. *Soient $A \subset B$ deux anneaux tels B est de type fini et entier sur A. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m} \subset A$, il existe un idéal maximal $\mathfrak{q} \subset B$ tel que $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{q}$.*

On se place dans les hypothèses du lemme.
a) Montrer que B est un A-module de type fini (*cf.* 2°).
b) Montrer que $\mathfrak{m}B$, l'idéal engendré par $\mathfrak{m}$ dans B, est un idéal propre de B (*cf.* 1°, $1 \in B$).
c) Vérifier que pour $\mathfrak{q}$ idéal maximal contenant $\mathfrak{m}B$, on a bien : $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{q}$.

II Factorisation d'un morphisme

Soient $\varphi : X \to Y$ un morphisme de variétés affines et $\varphi^* : \mathscr{O}_Y(Y) \to \mathscr{O}_X(X)$ son comorphisme.

1° Morphisme dominant et injection fermée

Définition. On dit que φ est *dominant* si $\overline{\varphi(X)} = Y$. On dit que φ est une *injection fermée* si φ est injectif, si $\varphi(X)$ est fermé dans Y et si φ induit un isomorphisme $\varphi_1 : X \to \varphi(X)$.

a) ([1], 2.2.1) Montrer que φ est dominant si et seulement si φ^* est injectif.
b) ([1], *loc. cit.*) Montrer que φ est une injection fermée si et seulement si φ^* est surjectif.

2° Morphisme fini

Définition. On dit que φ est *fini* si $\mathscr{O}_X(X)$ est entier sur $\varphi^*(\mathscr{O}_Y(Y))$.

a) Soit $X = \mathscr{V}(X_1 - X_2^2) \subset \mathbb{C}^2$, $Y = \mathbb{C}$, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1$: vérifier que φ est fini.
b) Montrer que le cardinal des fibres d'un morphisme fini est borné par une constante :

$$\exists c \in \mathbb{N},\ \forall y \in Y,\ |\varphi^{-1}(y)| \leq c.$$

On peut supposer que $X \subset \mathbb{C}^n$ et $Y \subset \mathbb{C}^m$ et que $\mathscr{O}_X(X) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ et $\mathscr{O}_Y(Y) = \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$. Érire une relation de dépendance intégrale pour chaque coordonnées x_i sur $\varphi^*(\mathscr{O}_Y(Y))$ et constater que pour un point de Y fixé, il y a un nombre fini et borné de solutions pour chaque coordonnée d'un antécédent.
c) Soit $\varphi : X \to Y$ fini et soient X', Y' des sous-variétés fermées telles que $\varphi(X') \subset Y'$. Montrer que la restriction de φ à X' est finie.
d) Montrer que l'image $\varphi(X)$ est fermée.
Plus précisément, $\varphi(X)$ est l'ensemble des $y \in Y$ tels que l'idéal maximal $\mathfrak{m}_y$ contient $\operatorname{Ker} \varphi^*$.
e) Montrer que φ est un morphisme fermé (l'image d'un fermé est un fermé).
f) En particulier, vérifier qu'un morphisme fini et dominant est surjectif.

3° Factorisation

a) ([1], 2.2.6) Soient $R \subset S$ deux $\mathbb{C}$-algèbres de type fini qui sont des anneaux intègres. Soient K et L les corps des fractions respectifs de R et S et d le degré de transcendance de L/K. Montrer qu'il existe $f \in R$, non nul, et $s_1, \ldots, s_d \in S$, algébriquement indépendants sur K, tels que[2] S_f est entier sur $R_f[a_1, \ldots, a_d]$.
Appliquer le lemme de Noether à la K-algèbre $A = S^* = \{s/r\ :\ s \in S,\ 0 \neq r \in R\}$. Réduire les x_i obtenus au même dénominateur $r \in R$: $x_i = s_i/r$ pour $s_i \in S$ convenables. Pour $s \in S \subset S^*$, montrer que s est entier sur $R_g[s_1, \ldots, s_d]$ pour $g \in R$ convenable. Prendre pour f le produit des g lorsque s décrit un système de générateurs de la $\mathbb{C}$-algèbre S.

2. Ici, S_f désigne l'anneau localisé $\{g/f^k\ :\ g \in S,\ k \in \mathbb{N}\}$; idem pour R_f.

b) ([1], 2.2.7) Soit $\varphi : X \to Y$ un morphisme dominant de variétés irréductibles : $\varphi^* : \mathscr{O}_Y(Y) \to \mathscr{O}_X(X)$ est injective et $d = \dim(X) - \dim(Y) \geq 0$. Montrer qu'existent un élément $g \in \mathscr{O}_Y(Y)$ et une factorisation $\varphi|_{X_{\varphi^*(g)}} : X_{\varphi^*(g)} \xrightarrow{\overline{\varphi}} Y_g \times \mathbb{C}^d \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} Y_g$, où $\overline{\varphi}$ est fini et dominant et pr_1 est la première projection.
Il s'agit de traduire le point précédent en termes géométriques...
c) En déduire que l'image d'un ouvert non vide par un morphisme dominant entre variétés irréductibles contient un ouvert.
Pourquoi, dans la factorisation précédente, $\overline{\varphi}$ est-il surjectif ?

III Image d'un morphisme : théorème de Chevalley

1° Du facile

a) Soit $\varphi : V \to W$ un morphisme de variétés. Montrer que si V est irréductible, $\overline{\varphi(V)}$ aussi.
Si $fg \in \mathscr{I}(\overline{\varphi(V)})$, montrer que $\varphi(V) \subset \mathscr{I}(f)$ ou $\varphi(V) \subset \mathscr{I}(g)$ et passer à l'adhérence.
b) Soit $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(x, y) \mapsto (xy, y)$. Vérifier que $\varphi(\mathbb{C}^2)$ n'est ni ouvert, ni fermé. Au passage, vérifier que φ est dominant mais pas fini et comparer à II 2° f).

2° Le théorème

Définition. On dit qu'une partie d'un espace topologique est *localement fermée* si elle est ouverte dans son adhérence, *i.e.* si elle est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé ; qu'elle est *constructible* si c'est une réunion finie de parties localement fermées.

Théorème (Chevalley)**.** *L'image d'un partie constructible par un morphisme de variétés affines est constructible.*

Soit $\varphi : X \to Y$ le morphisme. On commence par montrer que $\varphi(X)$ est constructible lorsque X est irréductible ; on procède par récurrence sur $\dim(Y)$.
a) Initialiser la récurrence.
b) Pourquoi peut-on supposer que Y est irréductible ?
c) Prouver le résultat dans ce cas à l'aide de II 3° c).
On passe au cas général. Soit $Z \subset X$ une partie constructible.
d) Montrer que l'on peut écrire Z sous la forme $\bigcup_i V_i \cap \Omega_i$, où les V_i sont fermés irréductibles et les Ω_i sont des ouverts principaux de X.
e) Pourquoi peut-on supposer que $Z = X_f$, où $f \in \mathscr{O}_X(X)$ et X irréductible ?
f) Traiter cette situation en utilisant c).

Bibliographie

[1] Meinolf Geck : *An introduction to algebraic geometry and algebraic groups*, volume 10 de *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2003.

[2] Daniel Perrin : *Géométrie algébrique*. Savoirs Actuels. InterEditions, Paris, 1995. Une introduction.