UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
—FAC DES SCIENCES—
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Année universitaire 2009-2010
L3-S5
FLMA 504. Algèbre linéaire 4

FEUILLE D'EXERCICES N°3 : POLYNÔMES

1. DÉTERMINANTS

Exercice 1. Vrai ou Faux ? Dans ce qui suit A et B sont deux matrices carrées de même taille et λ est un scalaire.

(1) $\det(-A) = -\det(A)$.
(2) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
(3) Si tous les coefficients de A sont des entiers pairs $\det(A)$ l'est aussi.
(4) $\det({}^tA) = \det(A)$.
(5) $\det(AB) = \det(BA)$.

Exercice 2. Vérifier les valeurs des déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 90 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

2. POLYNÔMES

Exercice 3. Quel est le reste de la division euclidienne de X^{50} par $X^2 - 3X + 2$ et $X^2 + 2X + 1$.

Exercice 4. Calculer $P \wedge Q$ et déterminer un couple $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $UP + VQ = P \wedge Q$ dans les cas suivants :

(1) $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$.
(2) $P = X^4 - 10X^2 + 1$ et $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.

Exercice 5. Soient m, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Soit r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = (X^n - 1) \wedge (X^r - 1)$.
(2) En déduire que : $(X^m - 1) \wedge (X^n - 1) = X^{m \wedge n} - 1$.

Exercice 6. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ tels que : $X(X-1)P' + P^2 - (2X+1)P + 2X = 0$.

Exercice 7. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que le polynôme $X^4 - 2X^3 + \lambda X^2 + 2X - 1$ ait une racine au moins triple.

Exercice 8. Démontrer que le polynôme $1 + X + X^n$ de $\mathbb{C}[X]$ n'a que des racines simples.

Exercice 9. Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit a, b, c les racines de $X^3 - X + 1$. Calculer $a^3 + b^3 + c^3$.

Exercice 11. Démontrer que pour tout polynôme P, $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.

Exercice 12. Trouver une CNS sur (λ, μ) pour que $X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 13. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Exercice 14. Déterminer l'ensemble des polynômes divisibles par leur dérivé.

Exercice 15. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \exists Q, R \in \mathbb{R}[X] \;\text{ tels que } P = Q^2 + R^2\}$.

(1) Montrer que E est stable par multiplication.
(2) Montrer que E est l'ensemble des polynômes P tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) \geq 0$.