Université Claude Bernard Lyon 1
M2 de Mathématiques : Groupes algébriques
Année 2013–2014

Un peu de multilinéarité

I Déjà vu ?

Faire les (certains des) exercices du texte sur le produit tensoriel.

Complément : Pour X compact, on note $\mathscr{C}(X)$ l'algèbre des fonctions continues sur X. On prend $S = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Définir une application naturelle $\mathscr{C}(S) \otimes \mathscr{C}(S) \to \mathscr{C}(S \times S)$. Montrer qu'elle n'est pas surjective.

II Plongement de Plücker (ensembliste)

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n et k un entier compris entre 0 et n. On fixe une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V.

1° Multivecteurs et formes alternées

On appelle k^e *puissance extérieure de* V et on note $\bigwedge^k V$ le quotient de $V^{\otimes k}$ par l'espace engendré par les vecteurs de la forme $v_1 \otimes \cdots v_k$ tels que $v_i = v_j$ pour deux indices convenables $i \neq j$. Pour $v_1, \ldots, v_k \in V$, on note $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ l'image de $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ dans $\bigwedge^k V$.
Soit $\mathscr{P}_n^k$ l'ensemble des parties à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Pour $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \in \mathscr{P}_n^k$, on note $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$.
a) On suppose $k = 2$: montrer que $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$ pour tous $v_1, v_2 \in V$. Montrer de même que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ est transformé en son opposé quand on permute deux des v_i.
b) Montrer que la famille $(e_I)_{I \in \mathscr{P}_n^k}$ engendre $\bigwedge^k V$.
Il suffit de développer et réordonner.

Soit $I \in \mathscr{P}_n^k$ et $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in V^k$. Pour $1 \leq j \leq k$, on écrit $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, ce qui définit une matrice $A(\mathbf{v}) \in \mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{C})$. On note $m_I(\mathbf{v})$ le mineur $k \times k$ de $A(\mathbf{v})$ correspondant aux lignes indexées par I.
c) Vérifier que m_I passe au quotient par $\bigwedge^k V$, c'est-à-dire que $m_I(\mathbf{v})$ dépend seulement de $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$, et même de $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.
d) Montrer que (e_I) est une base et que (m_I) est sa base duale. En particulier : $\dim \bigwedge^k V = \binom{n}{k}$.
e) Justifier l'isomorphisme naturel : $\bigwedge^k(V^*) \simeq \left(\bigwedge^k V\right)^*$.

2° Puissance extérieures et dualité

Remarquons que $\dim \bigwedge^k V = \dim \bigwedge^{n-k} V$. Nous allons voir que cette égalité de dimension « se relève » en un isomorphisme presque canonique entre $\bigwedge^k V$ et le dual de $\bigwedge^{n-k} V$.
a) Montrer qu'il existe une unique application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \psi_{k,\ell} : & (\bigwedge^k V) \otimes (\bigwedge^\ell V) & \longrightarrow & \bigwedge^{k+\ell} V \\ & (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \otimes (w_1 \wedge \cdots \wedge w_\ell) & \longmapsto & v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_\ell. \end{array}$$

b) On reprend la base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V. Alors, $(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$ est une base de $\bigwedge^n V$ qui s'identifie alors à $\mathbb{C}$. Montrer que $\psi_{k,n-k}$ est une une forme bilinéaire non dégénérée.
On pourra chercher à écrire la matrice de $\psi_{k,n-k}$ dans les bases induites par $\mathbf{e}$.

3° Plongement de Plücker ensembliste

Soit $\mathrm{Gr}_k(V)$ la grassmannienne des k-plans de V, c'est-à-dire l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de V. On va plonger $\mathrm{Gr}_k(V)$ dans $\mathbb{P}\left(\bigwedge^k V\right) = \mathrm{Gr}_1\left(\bigwedge^k V\right)$.

a) Pour $W \in \mathrm{Gr}_k(V)$, on fixe une base $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$ de W. Montrer que la droite engendrée par $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ ne dépend que de W et pas du choix de $\mathbf{v}$.
Cela permet de définir une application $P : \mathrm{Gr}_k(V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$.
b) Soit W_0 l'espace engendré par $(e_1, \dots, e_k)$ et soit $W \in \mathrm{Gr}_k(V)$ tel que $P(W) = P(W_0)$. Montrer que $W = W_0$.
Soit $\mathbf{v}$ *une base de* W. *On suppose que* $A(\mathbf{v})$ *possède une ligne non nulle d'indice* $\ell > k$ *: en utilisant le théorème de la base incomplète et le fait que* $m_{I_0}(\mathbf{v}) \neq 0$ *où* $I_0 = \{1, \dots, k\}$, *exhiber un mineur non nul de* $A(\mathbf{v})$ *« contenant » la ligne* ℓ.
c) En déduire que P est injective.

4° **De futurs ouverts affines**

a) Soit S un sous-espace de V de dimension $n-k$ (où n est la dimension de V). Choisissons une base de V, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ dont les $n-k$ derniers vecteurs forment une base de S. Soit $W \in \mathrm{Gr}_k(V)$. Justifier que $W \oplus S = V$ si et seulement s'il existe une base $(w_1, \dots, w_k)$ de W avec, pour tout $i = 1, \dots, k$:

$$w_i = e_i + s_i, \quad \text{avec } s_i \in S.$$

b) Exprimer les coordonnées projectives de $P(W)$ dans la base induite par $\mathbf{e}$ en fonction de celles des s_i dans la base $\mathbf{e}$.
c) Soit $\tilde{P}(W)$ et $\tilde{P}(S)$ des représentants de $P(W)$ et $P(S)$ dans les espaces vectoriels correspondants. Montrer que $W \oplus S = V$ si et seulement si $\psi_{k,n-k}(\tilde{P}(W) \otimes \tilde{P}(S)) \neq 0$.

[À suivre...]