Feuille 4 : Topologie et Matrices

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Calculer $e^A e^B$ et e^{A+B}. Conclure.

Exercice 2. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 11 & 17 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer e^M.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la somme des vecteurs colonnes de A, ses valeurs propres, A^n (pour tout $n \in \mathbb{Z}$), puis e^A.

Exercice 4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si e^M l'est.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de valeurs propres a et b.

1. Si $a \neq b$ montrer que
$$\exp(A) = \frac{ae^b - be^a}{a-b} I_2 + \frac{e^a - e^b}{a-b} A.$$
2. Trouver une formule lorsque $a = b$.

Exercice 6. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B commutent si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\exp(t(A+B)) = \exp(tA)\exp(tB)$.

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre le sytème différentiel
$$Y'(t) = [(t-1)A^2 + t^2 A + I_n]Y(t).$$