Université Montpellier II
—Fac des Sciences—
Département de Mathématiques

Année universitaire 2009-2010
L3-S5
FLMA 504. Algèbre linéaire 4

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{o}}$5 : RÉDUCTION 2

Exercice 1. Soit A et B deux matrices carrées de taille n.

(1) Montrer que si A est inversible, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
(2) Montrer qu'il existe une suite A_n de matrices inversibles qui tend vers A. Indication : quand est-ce que la matrice $A + tI_n$ est inversible ?
(3) Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(1) Montrer que la somme de deux endomorphismes nilpotents qui commuttent est nilpotente.
(2) Trouver deux endomorphismes nilpotents dont la somme n'est pas nilpotente.
(3) Soit d et d' deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Montrer qu'il existe une base dans laquelle les 2 matrices de d et d' sont diagonales.
(4) Montrer que la somme de deux endomorphismes diagonalisables qui commuttent est diagonalisable.
(5) Trouver deux endomorphismes diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.

Exercice 3. Soit A une matrice carré de taille n telle

$$\forall i = 1, \cdots, n \qquad \sum_{j \neq i,\, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}| < |a_{ii}|. \tag{1}$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 4. Soit P un polynôme unitaire de degré n à coéfficients complexes. On écrit :

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0. \tag{2}$$

Soit z une racine de P.

En utilisant l'exercice 3, montrer que :

$$|z| \leq \max(|a_0|, 1 + |a_1|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|). \tag{3}$$

Exercice 5. Soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par A.